IUT BELFORT MONTBÉLIARD

Mesures Physiques

COURS ELECTRICITE
1ère année
Semestre 1

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Chapitre 1 - CIRCUITS ELECTRIQUES EN REGIME STATIONNAIRE

1 – VOCABULAIRE, DEFINITIONS

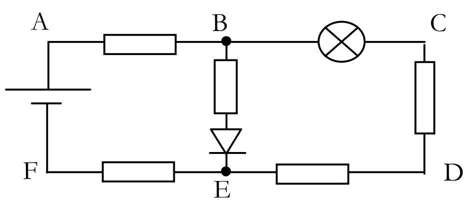
Un circuit électrique est un ensemble de composants conducteurs ou semi-conducteurs, reliés entre eux par des fils de jonctions et dans lequel circule un courant électrique.

Un dipôle électrique est un composant électrique limité par deux bornes (résistor, condensateur, bobine, pile, etc …)

Un nœud est un point commun à plus de deux dipôles.

Une maille est une portion d'un circuit électrique constituant un contour fermé.

Une branche est une portion de circuit électrique entre deux nœuds consécutifs.



Exercice :

Nommer les différentes branches de ce circuit.

Nommer les différentes mailles de ce circuit.

Nommer les différents noeuds de ce circuit.

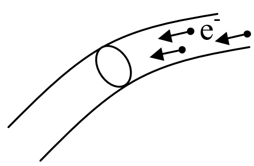
2 – COURANT ELECTRIQUE

2.1 - DEFINITION

De façon générale, le courant électrique résulte d'un déplacement de porteurs de charges dans un conducteur.

Ce peut être le déplacement d'ions dans une solution (électrolyse cf chimie) ou le déplacement d'électrons dans un métal.

Ce dernier cas nous intéresse plus particulièrement dans le cadre du cours d'électricité !

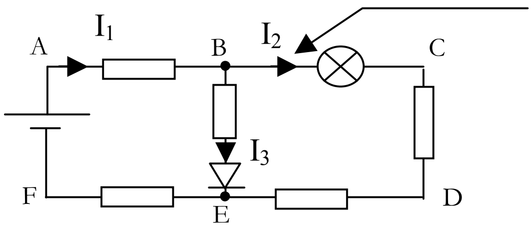


Ainsi le courant électrique dans un conducteur métallique apparaît comme un mouvement d'ensemble des électrons libres du métal conducteur : tous les électrons se mettent en mouvement en même temps, en tout point du circuit

La vitesse de déplacement des électrons est faible (de l'ordre du m s^{-1}, ce n'est pas la vitesse de la lumière !)

Attention : le sens conventionnel du courant électrique est celui de porteurs de charge positive. En électricité, les porteurs de charge sont les électrons dont la charge est négative, le sens conventionnel du courant est donc opposé au sens de déplacement des électrons.

2.2 – ORIENTATION D'UNE BRANCHE



Chaque branche doit être orientée :

Le choix du sens est **arbitraire …**

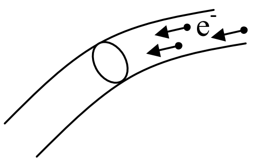
… mais avec une certaine habitude, on choisira le sens donnant des intensités positives après calculs.

Orienter une branche consiste à placer une flèche sur le conducteur et placer une lettre I à proximité.
Chaque branche étant a priori parcourue par des courants d'intensité différentes, on indicera la lettre I.

2.3 – RELATION ENTRE CHARGE ET INTENSITE

Charge électrique d'un électron est : $q_e = -1{,}6.10^{-19}$ C

L'intensité du courant électrique traversant un conducteur est un débit de charge : c'est la charge dq traversant une section droite du conducteur pendant un intervalle de temps dt.



$i = dq / dt$ *($i = dN\, q_e / dt$)*

dN : nombre d'électrons.

i en ampères A
dq en Coulomb C
dt en secondes s

Si quelle que soit la date t de l'évaluation de i on obtient toujours la même valeur : i(t) = cste, alors le courant est continu, on le note en majuscules : I.

Sinon le courant est variable dans le temps, on le note en minuscules i(t) ou plus simplement i.
On parle de grandeur instantanée.
On pourra alors comme en mécanique pour les vitesses s'intéresser à une intensité moyenne I_{moy}

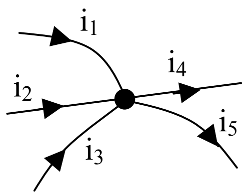
On parle de régime stationnaire quand la loi d'évolution des grandeurs électriques est définitivement établie. Cela ne veut pas dire qu'elles soient continues c'est à dire constantes dans le temps.

L'intensité du courant est une grandeur algébrique. Suivant l'orientation arbitraire de la branche effectuée, le résultat du calcul de i peut être

- positif : les électrons se déplacent en sens inverse de l'orientation choisie
- négatif : les électrons se déplacent dans le sens de l'orientation choisie

2.4 - LOI DES NOEUDS

Elle résulte du principe de conservation de la charge électrique en régime stationnaire : En régime stationnaire, il n'y a ni accumulation ni disparition de charge électrique dans un circuit.



Orienter les courants sur les conducteurs (sens arbitraire)
somme des courants entrants = somme des courants sortants :
$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5$

Conséquence : L'intensité du courant électrique est la même en tout point d'une même branche.

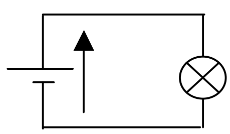
2.5 – MESURE DE L'INTENSITE DU COURANT

Compte tenu de la définition du courant, il faut que l'appareil de mesure soit traversé par le débit d'électrons à mesurer.

L'intensité du courant électrique se mesure à l'aide d'un ampèremètre inséré en série dans la branche dans laquelle on souhaite réaliser la mesure.

3 - TENSION OU DDP

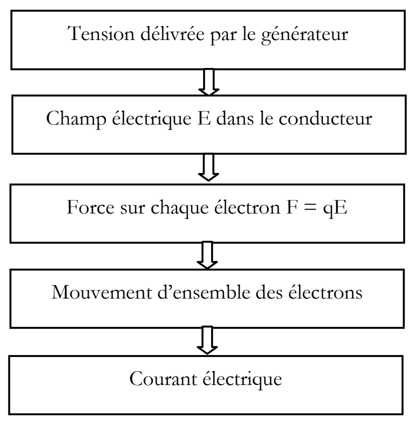
3.1 - TENSION : FORCE ELECTROMOTRICE



Le générateur de tension agit comme une pompe ou une différence de hauteur dans un système hydraulique : Il est nécessaire pour obtenir un courant.

Attention : la fem reste une tension exprimée en Volt, ce n'est pas une force au sens mécanique en Newton !

La tension est dans le cas des générateurs parfois appelée « force électromotrice » (fem), en effet :

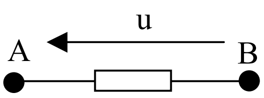


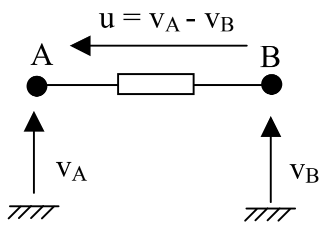
3.2 - TENSION : DIFFERENCE DE POTENTIEL

La tension peut aussi être considérée dans le cas des récepteurs et des générateurs comme une différence de potentiels (ddp) => toujours entre deux points

Les potentiels sont définis à une constante près, seule la tension ou différence de potentiel a un sens physique.

La masse d'un circuit est un point servant de référence des potentiels auquel on attribue arbitrairement un potentiel nul.

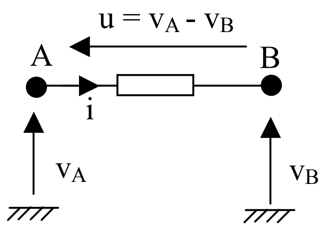




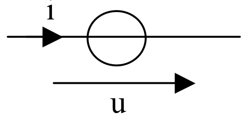
Ainsi la tension entre deux points A et B d'un dipôle est représentée par une flèche tension. C'est une grandeur algébrique (avec signe) qui s'exprime en Volt.

3.3 – CONVENTIONS D'ORIENTATIONS

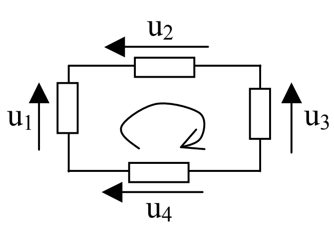
Convention récepteur :



Convention générateur :



3.4 - LOI DES MAILLES



Définir un sens de parcours positif pour la maille.
Compter + les tensions dans le même sens et – celles dans le sens opposé, la somme algébrique étant nulle :

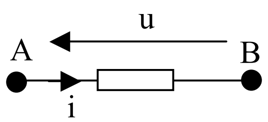
$$\text{Ex : } u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0$$

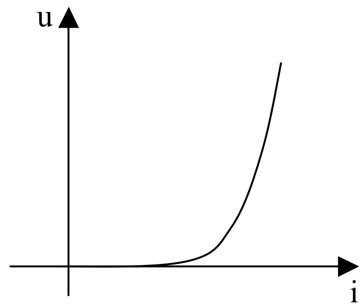
3.5 – MESURE DES TENSIONS

La tension se mesure entre deux points d'un circuit, le Voltmètre est branché en parallèle entre ces deux points. Il y a forcément deux fils !

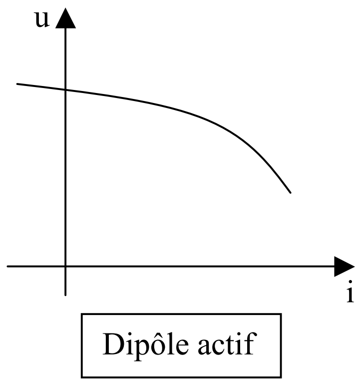
4 – GENERALITES SUR LES DIPOLES

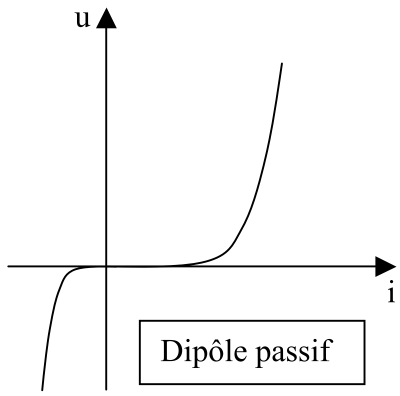
4.1 – CARACTERISTIQUE COURANT/TENSION



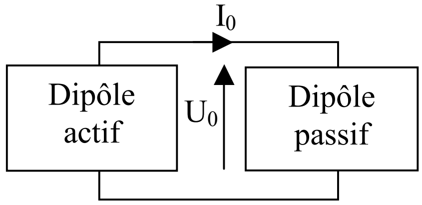


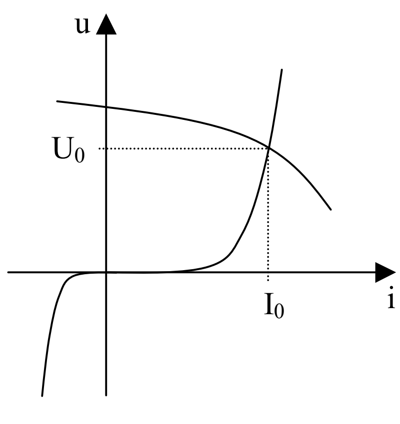
4.2 – DIPOLES PASSIFS OU ACTIFS





4.3 – POINT DE FONCTIONNEMENT D'UN CIRCUIT

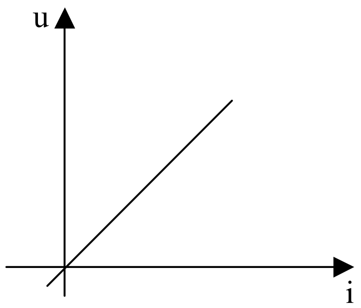




Chapitre 2 – DIPOLE PASSIF RESISTIF

1 – RESISTANCE, LOI D'OHM

Un dipôle passif résistif (résistor) est un dipôle dont la caractéristique courant/tension est une fonction linéaire, c'est à dire une droite passant par l'origine.



La relation entre u et i est une relation de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité (pente de la droite) est appelé résistance et noté R..

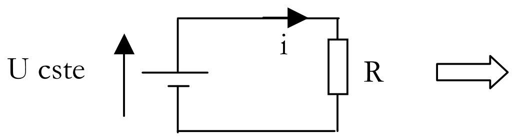
En utilisant la convention récepteur, on a ainsi la loi d'Ohm :

$\boxed{u = R\,i}$

| U en volts
I en Ampère
R en Ohm (Ω)

La conductance G est l'inverse de la résistance : G = 1/R
G s'exprime en Siemens (S).

Dans un circuit constitué d'un résistor alimenté par un générateur de tension => u = cste



Plus R est grande, plus i est faible

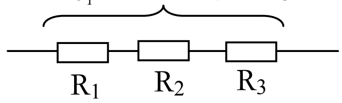
Plus R est faible, plus i est grand

Remarque : Si la branche comportant le résistor est orientée selon la convention générateur, la loi d'Ohm devient u = -Ri

2 - GROUPEMENT DE RESISTANCES

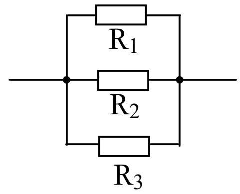
En série :

$R_{éq} = R_1 + R_2 + R_3$



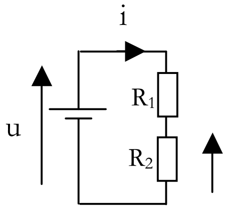
En parallèle :

$1/R_{éq} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$



Exercice : démontrer ces relations en utilisant les lois énoncées au chapitre 1.

3 – DIVISEUR DE TENSION



$v = R_2\, u \,/\, [\, R_1 + R_2\,]$

Attention : La formule n'est applicable que s'il y a même courant dans les deux résistances

Exercice : Démontrer cette relation

4 – LOI DES NOEUDS EN TERMES DE POTENTIELS

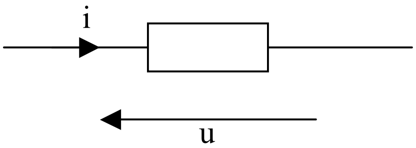
4.1 - METHODE

Dans un circuit électrique, on sera le plus souvent amené à utiliser la loi des nœuds. Pour cela on respectera la procédure suivante :

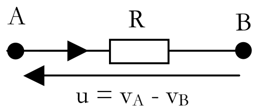
1) Sur le schéma :

a) Nommer et orienter les courants dans chaque branche menant au nœud

b) Faire apparaître les flèches tensions aux bornes des composants en respectant la convention récepteur.



c) Ecrire les tensions sous formes de différences de potentiel :

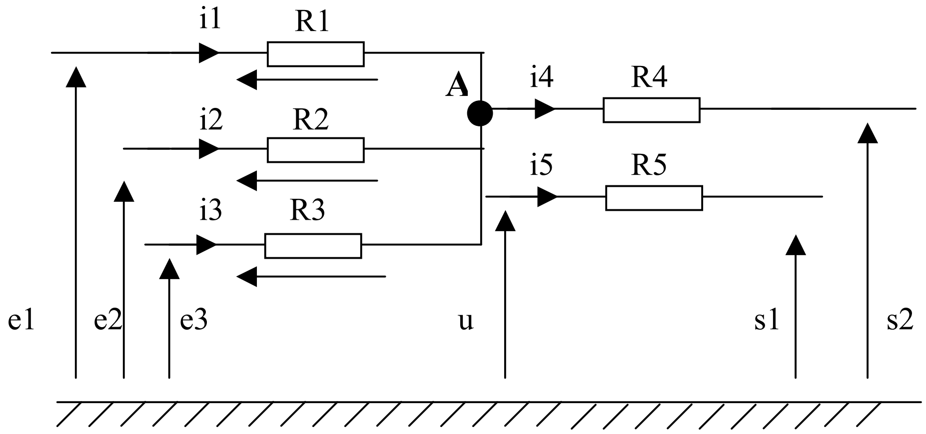


2) Ecrire la loi des nœuds

3) La modifier en appliquant la loi d'Ohm pour chaque courant de chaque branche :
$i = (vA – vB) / R$

En général, on évite d'utiliser la loi des mailles, elle génère trop d'équations, trop de variables, les étudiants s'y perdent !

4.2 - EXEMPLE :

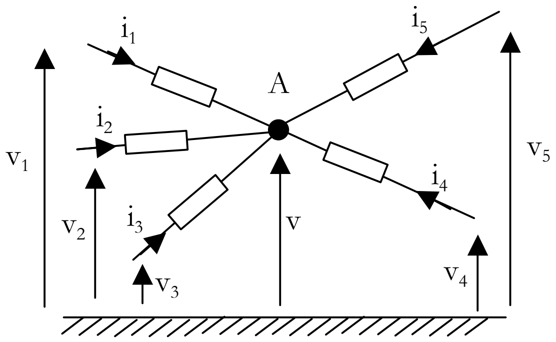


La loi des nœuds au point A donne :

$$i1 + i2 + i3 = i4 + i5$$

$$(e1 - u) / R1 + (e2 - u) / R2 + (e3 - u) / R3 = (u - s1) / R5 + (u - s2) / R4$$

4.3 – THEOREME DE MILLMAN



On utilise la formule de Millman dans les schémas de ce type.
Toutes les branches menant au nœud considéré sont orientées vers ce nœud.

Exercice : Etablir le théorème de Millman en exprimant la tension v en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

Chapitre 3 – DIPOLES ACTIFS LINEAIRES (électromoteurs)

1 – GENERATEURS DE TENSION

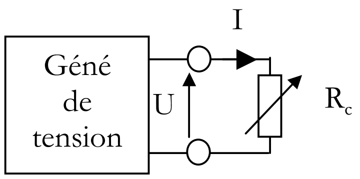
1.1 - DEFINITION

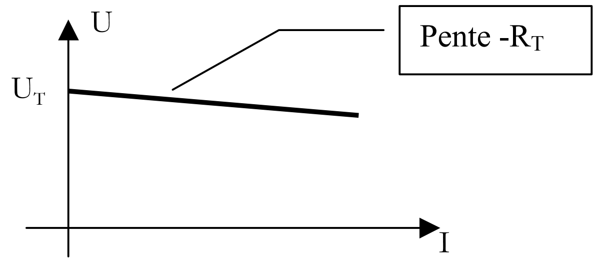
De façon idéale, c'est un dispositif capable de maintenir une tension constante entre ses deux bornes quelle que soit la charge connectée.

En réalité cette tension a tendance à diminuer quand le courant débité augmente.

> Pour preuve , les cas extrêmes :
> $Rc = +\infty$: $I = 0$, fonctionnement à vide U est maxi : $U = U_T$
> $Rc = 0$: court circuit $U = 0$ et I est maxi : $I = I_N$

1.2 - CARACTERISTIQUE

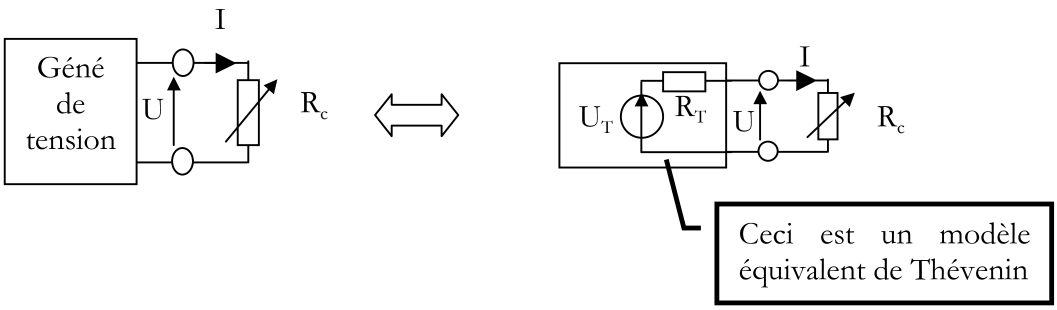




> Equation de la caractéristique U(I) :
> $U = U_T - R_T\, I$

1.3 - MODELE EQUIVALENT

Tout se passe comme si le générateur était constitué d'un générateur de tension parfait U_T avec une résistance R_T en série provoquant une chute de tension interne R_T I expliquant la diminution de U quand I augmente.



2 - GENERATEUR DE COURANT

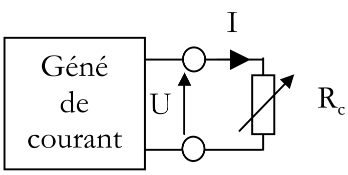
2.1 - DEFINITION

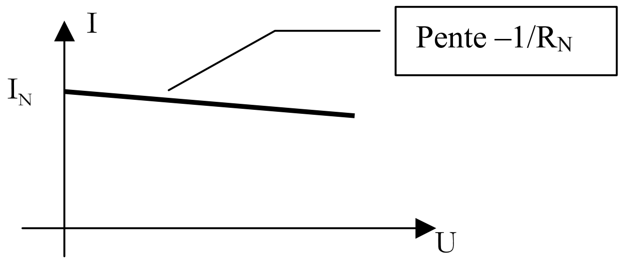
De façon idéale, c'est un dispositif capable de délivrer un courant d'intensité constante quelle que soit la charge connectée.

En réalité ce courant a tendance à diminuer quand la résistance de la charge augmente :

> Pour preuve , les cas extrêmes :
> $R_c = 0$: court circuit $U = 0$ et I maxi : $I = I_N$
> $R_c = +\infty$: fonctionnement à vide $I = 0$

2.2 - CARACTERISTIQUE



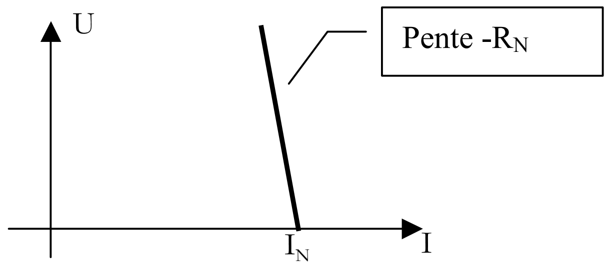


Equation de la caractéristique U(I) :

$$I = I_N - (1/R_N)U$$

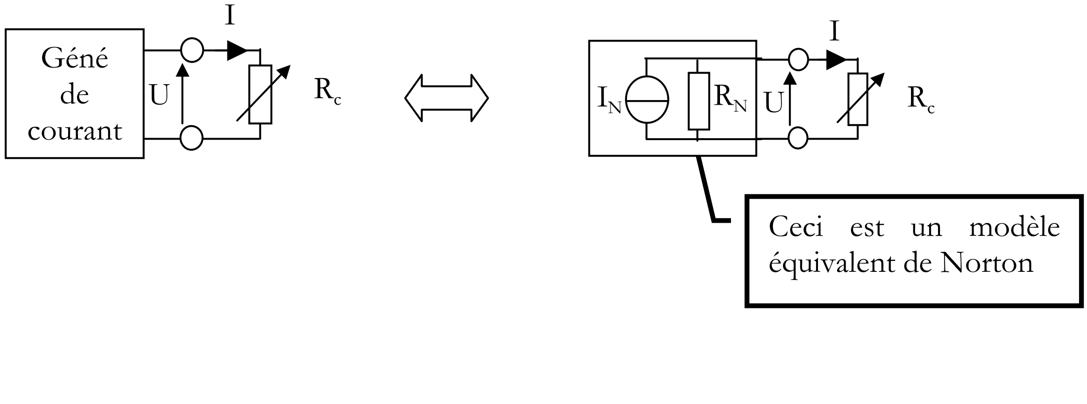
ou encore :

$$U = R_N I_N - R_N I$$



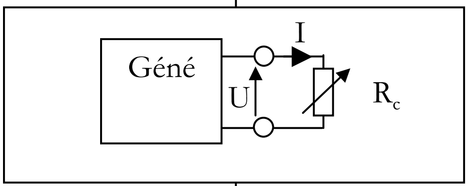
2.3 - MODELE EQUIVALENT

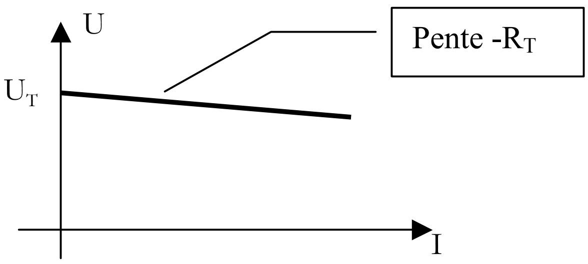
Tout se passe comme si le générateur était constitué d'un générateur de courant parfait I_N avec une résistance R_N en parallèle dérivant une fraction du courant I_N d'autant plus grande que R_c augmente.

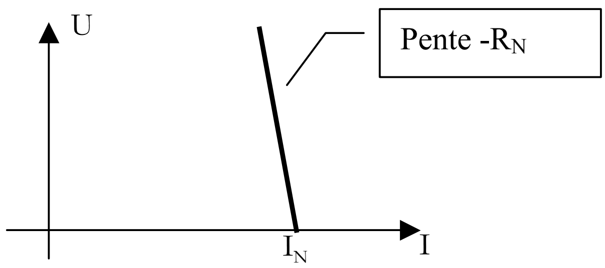


3 – COMPARAISON GENERATEUR DE TENSION ET DE COURANT

GENERATEUR DE TENSION	**GENERATEUR DE COURANT**







Equation de la caractéristique U(I) :
$U = U_T - R_T\,I$

Equation de la caractéristique U(I) :
$U = R_N\,I_N - R_N\,I$

Les caractéristiques sont du même type : droite affine. Seul l'ordre de grandeur de la pente les distingue.

$R_T \ll R_c$

$R_N \gg R_c$

Les deux modèles sont équivalents :

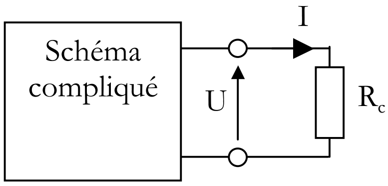
on peut représenter un générateur de courant à l'aide d'un MET
on peut représenter un générateur de tension à l'aide d'un MEN

Tout générateur peut être représenté sous l'une ou l'autre forme indépendamment de sa nature.

L'équivalence donne :
$R_T = R_N$
$U_T = R_N\,I_N$

Exemple : Un générateur de 12 V ayant une résistance interne de 1 kΩ peut être considéré comme un générateur de courant pour une charge de 10 Ω, et comme un générateur de tension pour une charge de 100 kΩ.

4 – THEOREMES DE THEVENIN ET NORTON

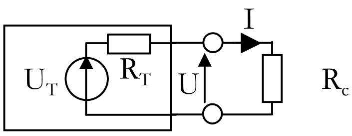


Théorème de Thevenin

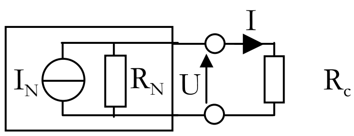
Théorème de Norton

Un schéma compliqué peut être simplifié en un modèle équivalent sous la forme :

D'un Modèle Equivalent de Thévenin (MET)



D'un Modèle Equivalent de Norton (MEN)



U_T = Tension à vide
(I = 0 charge $R_C = +\infty$)

R_T = Résistance entre les bornes de sortie en remplaçant dans le schéma compliqué, si ils sont autonomes :

- *les générateurs de tension par des court-circuits*
- *Les générateurs de courant par des circuits ouverts*

I_N = Courant de court-circuit
(U = 0 charge R_C =0)

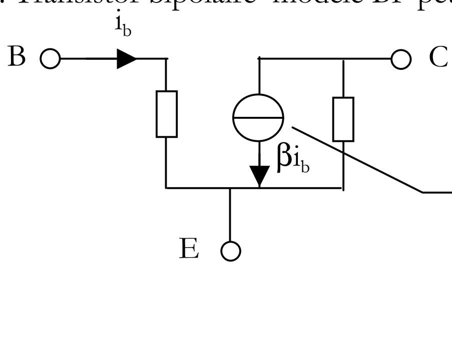
R_N = Résistance entre les bornes de sortie en remplaçant dans le schéma compliqué, si ils sont autonomes :

- *les générateurs de tension par des court-circuits*
- *Les générateurs de courant par des circuits ouverts*

L'équivalence donne :
$R_T = R_N$
$U_T = R_N I_N$

Définition d'un générateur autonome : C'est un générateur qui délivre une grandeur électrique (courant ou tension) non commandée par une autre.

Contre-exemple : Transistor bipolaire modèle BF petit signaux :



Générateur de courant non autonome car le courant débité dépend de i_b

Chapitre 4 – LES CONDENSATEURS

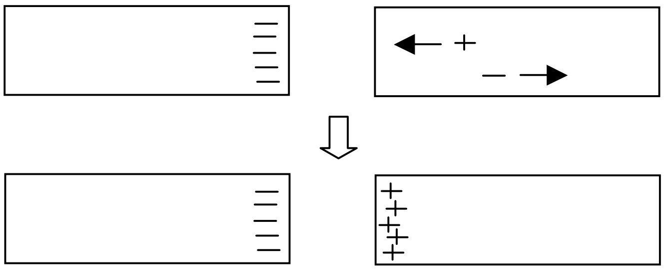
1 – RAPPELS D'ELECTROSTATIQUE

1.1 – CHAMP ET FORCE ELECTROSTATIQUE

La présence de charges dans une région de l'espace modifie les propriétés physiques aux alentours : elles créent un champ électrique E dans leur voisinage.

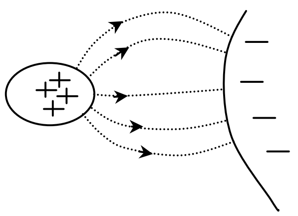
Une charge q placée dans un champ électrostatique E subit une force électrostatique : $\boxed{F = q\,E}$

Les forces électrostatiques sont responsables du phénomène d'influence électrostatique :



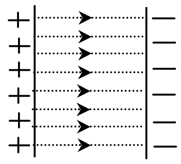
1.2 – LIGNES DE CHAMP

On appelle ligne de champ toute courbe orientée le long de laquelle le vecteur champ électrique est tangent en tout point.



1.3 – CHAMP UNIFORME

Considérons deux plaques parallèles chargées et en influence électrostatique.



Les lignes de champ sont des droites parallèles entre elles, le champ est uniforme : En tout point de l'espace entre les plaques, il a même direction, sens et intensité.

Dans ce cas, on a : $\boxed{E = U / d}$

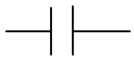
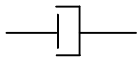
E champ électrique entre les plaques en V m^{-1}
U tension entre les plaques en Volts
d distance entre les plaques en m

2 – CONSTITUTION D'UN CONDENSATEUR

Un condensateur est un composant passif formé en associant deux conducteurs métalliques séparés par un dispositif isolant d'épaisseur suffisamment mince et constante.

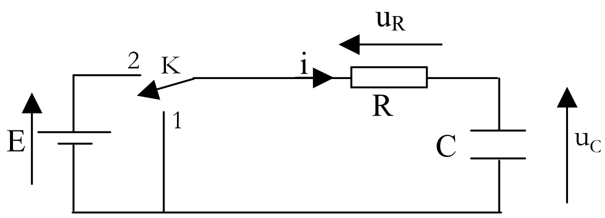
Les deux conducteurs sont les armatures du condensateur

L'isolant est le diélectrique

Symbole :   Condensateur polarisé

3 – CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

3.1 – DISPOSITIF ETUDIE

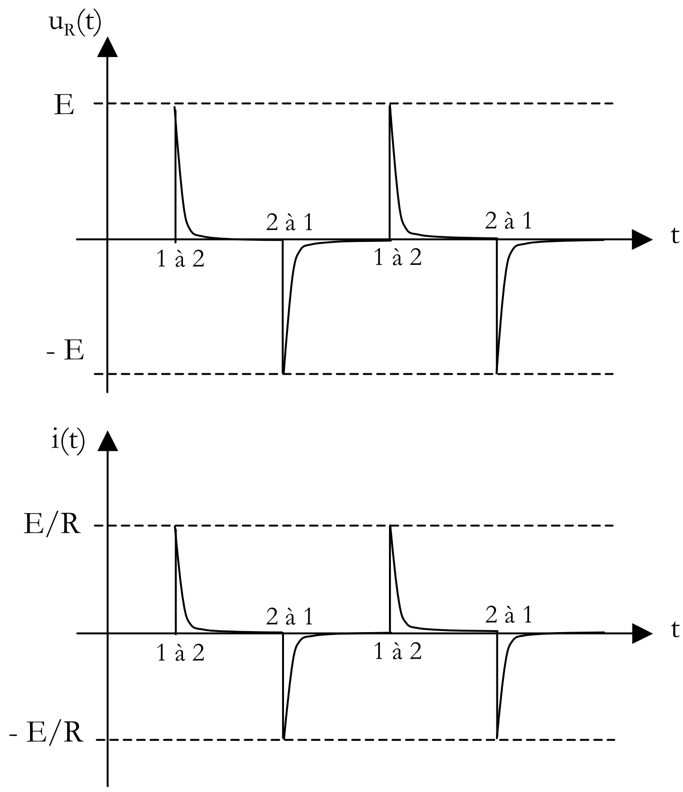


On enregistre $u_R(t)$ à l'aide d'un oscilloscope à mémoire lorsque l'interrupteur K bascule :

- de la position 1 à 2
- puis de 2 à 1.

Remarque : Puisque $u_R(t) = R\, i(t)$ alors i(t) a la même forme que $u_R(t)$.

3.2 – EVOLUTION DE i(t)



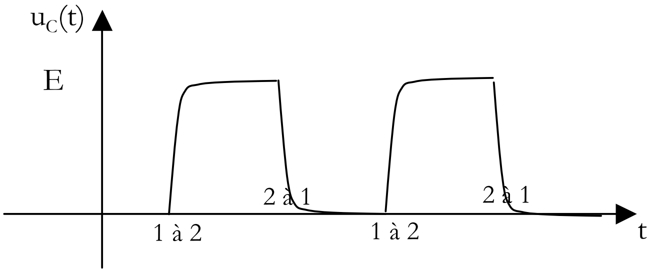
Conclusion : Bien que le circuit soit interrompu par l'isolant du condensateur, il y a transitoirement circulation d'un courant : C'est le phénomène d'influence électrostatique dans le condensateur qui provoque ce déplacement de charges.

Ce courant cesse :

- lorsque les armatures du condensateurs comptent le même nombre de charges (on dit que le condensateur est chargé)

- lorsque le condensateur est complètement déchargé

3.3 – EVOLUTION DE $u_C(t)$



K bascule de 1 à 2 :

La tension augmente. Lorsque le condensateur est chargé : $u_C(t) = E$

K bascule de 2 à 1 :

La tension diminue. Lorsque le condensateur est déchargé : $u_C(t) = 0$.

3.3 – CONCLUSIONS

C'est pendant qu'un condensateur se charge ou se décharge qu'un courant peut circuler dans le circuit.

Quand le condensateur est complètement chargé ($u_C = E$) ou déchargé ($u_C = 0$), il ne peut plus circuler de courant dans le circuit

Les courants de charge et de décharge sont en sens inverses.

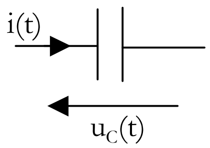
La charge ou la décharge d'un condensateur ne peut se faire instantanément : pas de variation brutales dans le chronogramme de $u_C(t)$, de la même façon qu'on ne peut pas remplir ou vider instantanément un réservoir d'eau.

Un condensateur apparaît comme un réservoir de charges.

4 – CAPACITE D'UN CONDENSATEUR

Dans le dispositif précédent, si E augmente alors l'amplitude de i(t) augmente. La charge prise par le condensateur a augmenté.

Il y a proportionnalité entre la charge prise par le condensateur et la tension à ses bornes.
Le coefficient de proportionnalité est la capacité du condensateur en Farad.



$$\boxed{q(t) = C\, u_C(t)}$$

Cas d'un condensateur plan :

On montre que $\boxed{C = \varepsilon_0 S / e}$

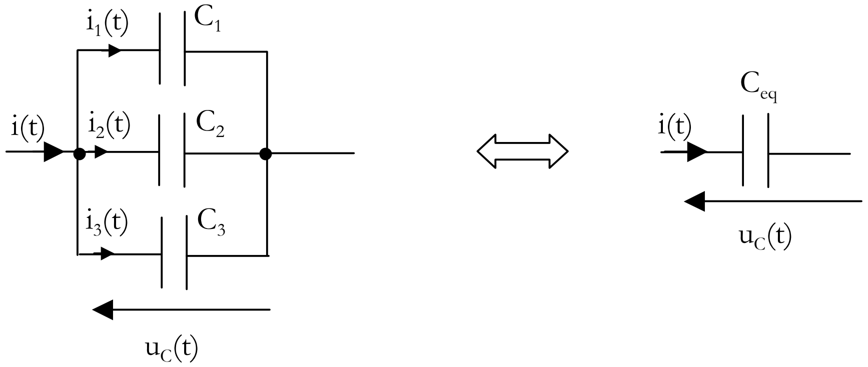
S surface des armatures en m^2
E épaisseur du diélectrique en m
ε_0 : permittivité du vide =

Avec un isolant autre que l'air : $\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon_r S / e}$

S surface des armatures en m^2
E épaisseur du diélectrique en m
ε_0 : permittivité du vide =
ε_r : permittivité relative du diélectrique

5 – ASSOCIATION DE CONDENSATEURS

5.1 – EN PARALLELE



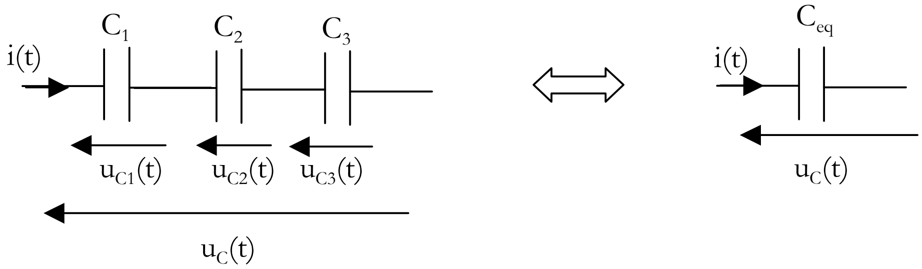
On a : $q_1 = C_1 u_c$ $\quad q_2 = C_2 u_c$ $\quad q_3 = C_3 u_c$

La charge totale est $q = q_1 + q_2 + q_3 = \underbrace{(C_1 + C_2 + C_3)}_{C_{eq}} u_c$

$$q = C_{eq} \; u_c$$

On a donc : $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$

5.2 – EN SERIE



Par influence électrostatique, on a : $q_1 = q_2 = q_3 = q$

D'autre part : $u_c = u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = q_1/C_1 + q_2/C_2 + q_3/C_3$
$= q(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3) = q / C_{eq}$

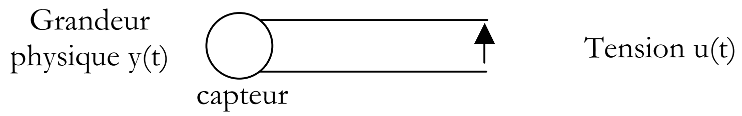
On a donc : $\boxed{1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3}$

Chapitre 5 – CARACTERISTIQUES DES SIGNAUX UTILISES EN EEA

De nombreuses fonctions de l'électronique analogique mises en œuvre dans une chaîne de mesure visent à traiter des signaux comme par exemple l'amplification, le filtrage.
Ces signaux véhiculant l'information sont variables dans le temps.
Ce chapitre a pour objet de définir certaines grandeurs caractérisant les signaux variables.

1 – SIGNAUX ALEATOIRES

Considérons une chaîne de mesure destinée à mesurer une grandeur physique y (par exemple une température). Pour cela on utilise un capteur dont le but est de transformer la grandeur physique en un signal électrique (un courant ou le plus souvent une tension).



Le signal électrique obtenu est une image de la grandeur physique mesurée.

Or, si on cherche à mesurer les grandeurs physiques, c'est bien parce qu'elles sont variables dans le temps :

y varie de façon continue (au sens mathématique) dans le temps et peut prendre une infinité de valeurs possibles dans un intervalle [Ymin ; Ymax] : y et donc u constituent ainsi des signaux analogiques.

y varie de façon plus ou moins imprévisible : y et donc u sont des signaux aléatoires.

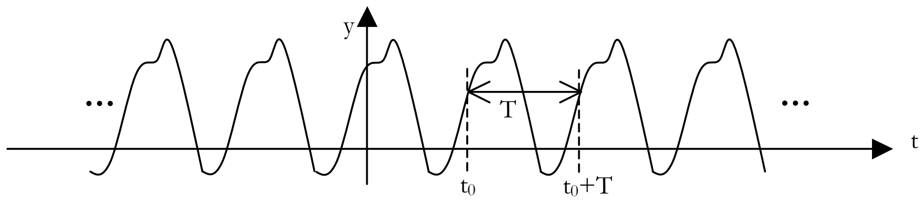
Ainsi dans le cas le plus général, un signal de mesure apparaît comme un signal aléatoire dont l'étude (basée sur des méthodes statistiques) est hors programme du DUT Mesures Physiques.

Dans un certain intervalle de temps, les signaux apparaissent souvent comme périodiques (signal sonore, vibration mécanique par exemple). Ces signaux, après avoir caractérisé certaines grandeurs mesurables sont entièrement connus. Ce sont des signaux déterministes.

2 – SIGNAUX PERIODIQUES

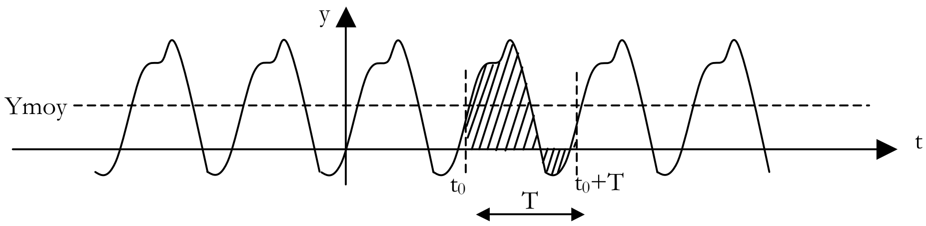
2.1 – DEFINITION

Il existe T minimum tel que, quel que soit $t_0 \in]-\infty ;+\infty[$, $x(t_0+T) = x(t_0)$



T est la période du signal exprimée en seconde.
$f = 1/T$ est la fréquence du signal en Hz (s^{-1}) et représente le nombre de motifs (de cycles) par seconde.

2.2 – VALEUR MOYENNE ou COMPOSANTE CONTINUE

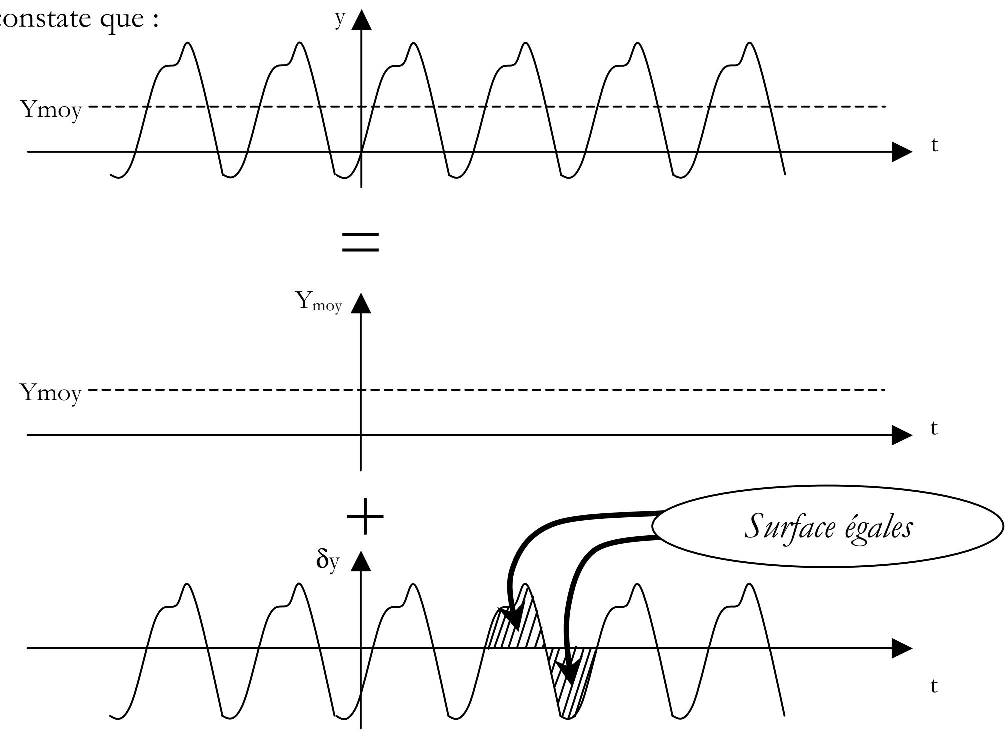


Valeur moyenne :

$$Y_{moy} = \text{Surface sous la courbe sur une période / période}$$

$$= (1/T)\int_{t_0}^{t_0 + T} y(t)\, dt$$

On constate que :



Ce qui s'écrit :

$$y(t) = Ymoy + \delta y(t)$$

Valeur moyenne ou composante continue ou tension de décalage (offset)

Variations autour de la valeur moyenne

Remarques

- La valeur moyenne d'un signal électrique (tension courant) se réalise avec un voltmètre ou ampèremètre en position DC ou sur un calibre DC (direct current).
- La position DC d'un oscilloscope permet d'observer le signal complet (Y_{moy} et δy)
- La position AC d'un oscilloscope permet de couper la valeur moyenne et de n'observer que δy. (pratique si $Y_{moy} >> \delta y$).

2.3 – VALEUR EFFICACE

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{eff}^2 &= \text{moyenne quadratique} \\ &= (1/T)\int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t)\,dt \end{aligned}}$$

Pour un dipôle résistif, la puissance instantanée dissipée est :

$$p(t) = u(t)\ i(t) = R\ i^2(t) = u^2(t) / R$$

La puissance dissipée en moyenne est :

$$P = (1/T) \int p(t)\,dt = R\ (1/T) \int i^2(t)\,dt = R\ I_{eff}^2$$

$$= (1/RT) \int u^2(t)\,dt = U_{eff}^2 / R$$

La notion de valeur efficace prend tout son sens dans la notion de puissance moyenne dissipée.

La valeur efficace d'un courant (d'une tension) périodique quelconque représente l'intensité (la tension) continue qui produirait pendant une même durée le même dégagement de chaleur dans le même résistor.

La mesure d'une valeur efficace d'une grandeur électrique périodique quelconque s'effectue avec un appareil « RMS » (Root Mean Square) c'est à dire à valeur efficace vraie.
Il convient alors de regarder sur la notice la bande passante de l'appareil. Les multimètres numériques ont généralement des bandes passantes faibles. La mesure de la valeur efficace d'une tension de fréquence 100 kHz a de fortes chances d'être fausse !

3 - SIGNAL SINUSOIDAL

3.1 - DEFINITIONS

Soit une grandeur électrique sinusoïdale : $u(t) = U_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

U_{max} est l'amplitude du signal ou encore valeur maximale ou encore valeur crête.
$\omega_0 t+\varphi_0$ est un angle (puisque les fonctions trigonométriques portent sur des angles !).
Cet angle est appelé phase instantanée du signal y.

Sa dérivée temporelle est la pulsation instantanée du signal $\omega(t) = d\varphi/dt$

φ_0 est la phase à l'origine (phase instantanée à t=0).
ω_0 est la pulsation du signal en $rad.s^{-1}$

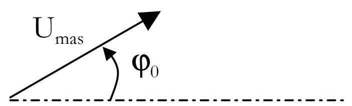
Pour un signal sinusoïdal, la pulsation instantanée est constante : $\omega(t) = \omega_0$

Valeur efficace : $U_{eff} = U_{max}/\sqrt{2}$ (résultat de calcul avec la définition ci-dessus, valable que pour le sinus !)

Pour une pulsation donnée, le signal sinusoïdal est caractérisé par :

- son amplitude U_{max} ou sa valeur efficace U_{eff}
- sa phase à l'origine φ_0

Ainsi on peut associer un vecteur à cette grandeur sinusoïdale : le vecteur de Fresnel.



On peut donc associer un nombre complexe de module U_{max} et d'argument φ_0 :

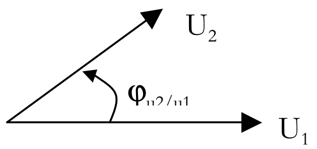
$$\underline{U} = [\, U_{max} , \varphi_0 \,]$$

$$= U_{max}\, e^{\,j\varphi_0}$$

3.2 - DEPHASAGE DE DEUX GRANDEURS SINUSOIDALES DE MEME FREQUENCE

On considère deux grandeurs électriques sinusoïdales de même pulsation.

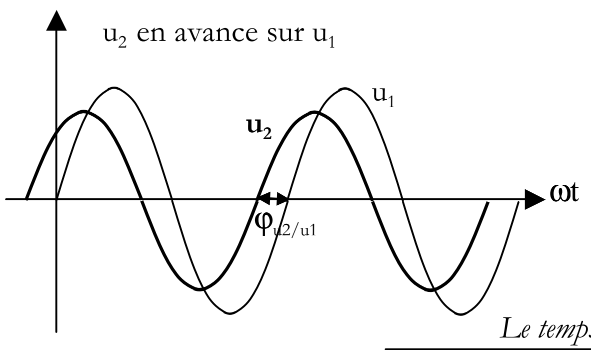
$u_1(t) = U_{1max} \sin \omega t$
$u_2(t) = U_{2max} \sin (\omega t+\varphi_{u2/u1})$

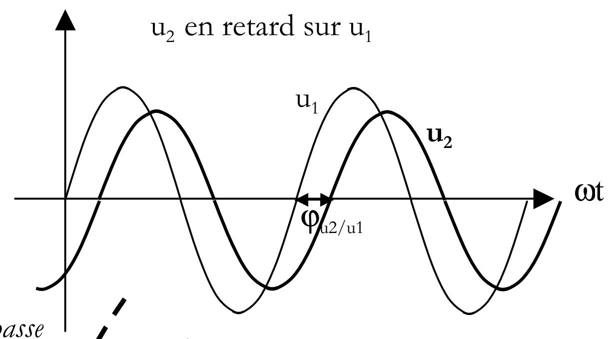


$\varphi_{u2/u1}$: déphasage de u_2 par rapport à u_1

$\varphi_{u2/u1} > 0$: u_2 en avance sur u_1

$\varphi_{u2/u1} < 0$: u_2 en retard sur u_1



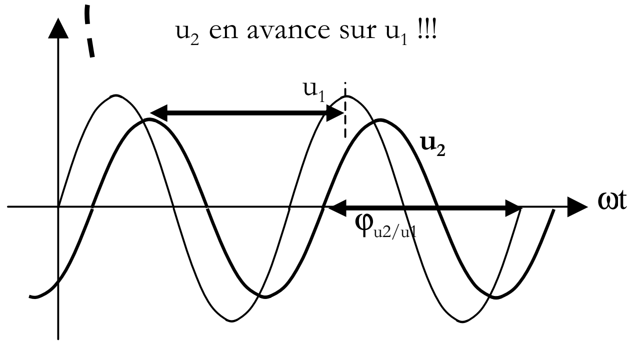


Le temps qui passe

u_2 passe par son maximum avant u_1

u_2 passe par son maximum après u_1

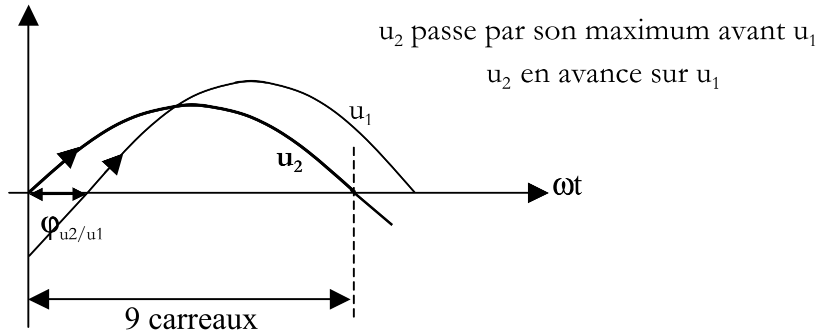
Les mêmes chronogrammes



L'étudiant arrivant à 8h15 est en retard de 15 min pour le cours de 8 h …
… mais en avance de 45 min pour le cours de 9 h !

Expérimentalement :

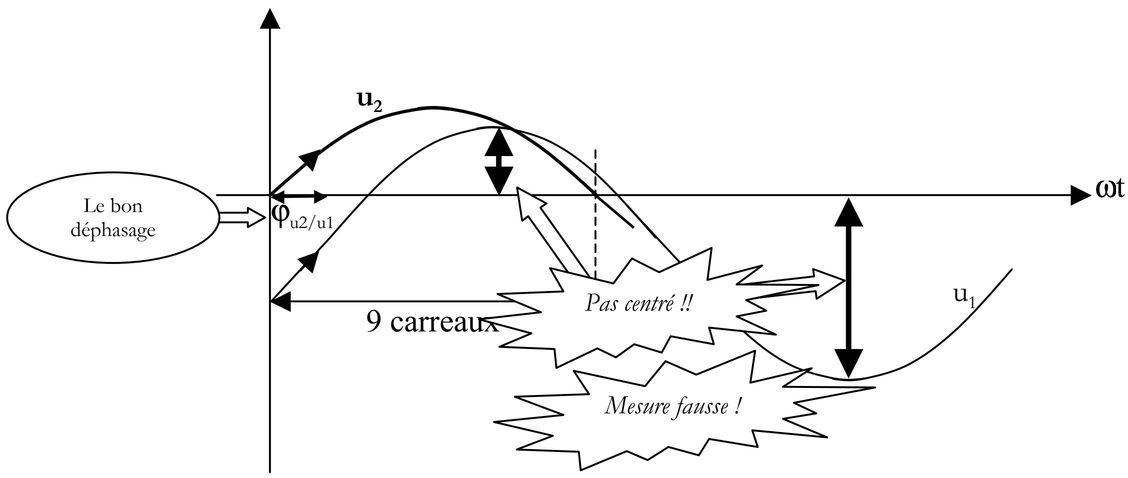
- Appliquer un signal sinusoïdal à l'entrée du quadripôle
- Régler l'amplitude de e(t) la plus grande possible tout en veillant à ce que le signal de sortie reste sinusoïdal : pas d'écrêtage, pas de distorsion
- Mesurer le déphasage en visualisant simultanément les deux signaux à l'aide de l'oscilloscope



- Mettre une ½ période d'une des deux courbes sur 9 carreaux en désétalonnant la base de temps.
- 9 carreaux correspondent à 180° donc on obtient une échelle de **20°/carreaux.**
- Mesurer $\varphi_{u2/u1}$ directement en degré.
- Réfléchir et appliquer le signe correct au déphasage ainsi mesuré

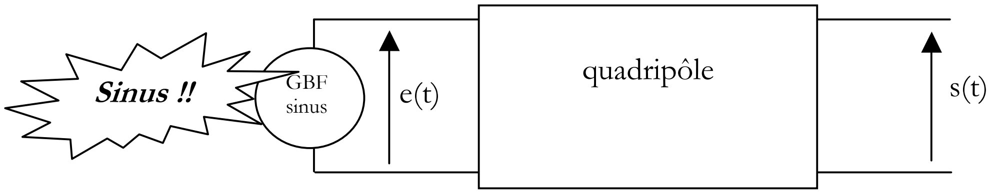
Précautions à prendre :

- Les deux courbes doivent être bien centrées sur la même ligne horizontale.



- Pour centrer les courbes on peut :
  - régler l'offset du G.B.F
  - tricher en jouant sur la position horizontale des voies de l'oscilloscope

3.3 - GAIN D'UN QUADRIPOLE



Le gain du quadripôle est définit par : $\boxed{G = 20 \log S_{max}/E_{max}}$ attention : log décimal

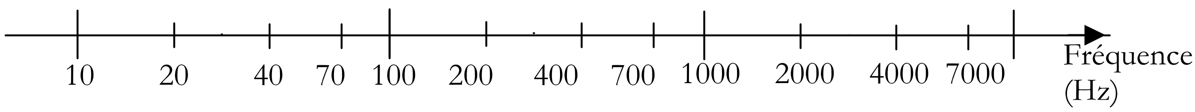
G s'exprime en décibel : dB

Expérimentalement :

- Appliquer un signal sinusoïdal à l'entrée du quadripôle
- Régler l'amplitude de e(t) la plus grande possible tout en veillant à ce que le signal de sortie reste sinusoïdal : pas d'écrétage, pas de distorsion
- Mesurer Smax et Emax à l'aide de l'oscilloscope
- Calculer G

3.4 – COURBES DE REPONSE EN FREQUENCE (courbes de Bode)

Les courbes de réponse en fréquence ou courbes de Bode sont les courbes G(f) et $\varphi_{s/e}$ (f).
On les trace sur papier semi-logarithmique (décimal en ordonné et logarithmique en abscisses).

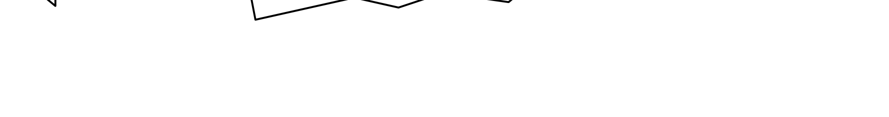


On effectue des mesures aux points « 1, 2, 4, 7 » de chaque décades. Les points sont ainsi régulièrement espacés. Si la courbe présente une variation plus rapide (résonance) on resserre bien sûr les points de mesure.

Pour une fréquence donnée, on mesure G et $\varphi_{s/e}$.
On change la fréquence et on recommence, etc …

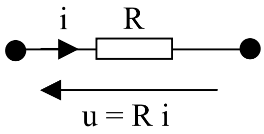
On commence par évaluer l'intervalle de variation de G et φ pour la bande de fréquence choisie. Cela permet de définir l'échelle des ordonnées : utiliser des échelles lisibles facilement et permettant à la courbe d'occuper le maximum d'espace sur le papier.

Remarque : pas de zéro sur une échelle log



Chapitre 6 – CIRCUITS ELECTRIQUES EN REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

1 - RESISTOR



1.1 – EXPRESSION INSTANTANEE

Le résistor est supposé parcouru par un courant sinusoïdal : $i(t) = I_{max} \sin \omega t$

On associe à i(t) le nombre complexe $\underline{I}$ purement réel :

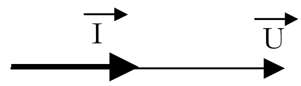
$$\boxed{i(t) \text{ sinus} \Longrightarrow \text{nombre complexe } \underline{I} = I_{eff} = (I_{eff} \,;\, 0)}$$

La loi d'Ohm donne en écriture instantanée donne : $u(t) = R\, i(t) = R\, I_{max} \sin \omega t$

1.2 – REPRESENTATION DE FRESNELL

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{U_{max} = R\, I_{max} \Leftrightarrow U_{eff} = R\, I_{eff}} \\ \boldsymbol{\varphi_{u/i} = 0} \Rightarrow \textbf{u et i en phase} \end{array}}$$



représentation de Fresnell

1.3 – COMPLEXE ASSOCIE

Le nombre complexe associé à u(t) est $\underline{U} = R\, I_{eff}$ purement réel :

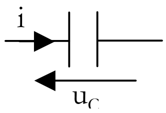
$$\boxed{u(t) \text{ sinus} \Longrightarrow \text{nombre complexe } \underline{U} = RI_{eff} = (RI_{eff} \,;\, 0)}$$

1.4 – LOI D'OHM

La relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ est la loi d'Ohm faisant intervenir la ***notation efficace complexe*** :

$$\boxed{\underline{U} = R\, \underline{I}}$$

2 - CONDENSATEUR



$i = dq / dt \qquad q = C\,u$

$i = C\ du / dt \Rightarrow u = (1/C) \int i(t)\,dt$

2.1 – EXPRESSION INSTANTANEE

Le résistor est supposé parcouru par un courant sinusoïdal : $i(t) = I_{max} \sin \omega t$

On associe à i(t) le nombre complexe $\underline{I}$ purement réel :

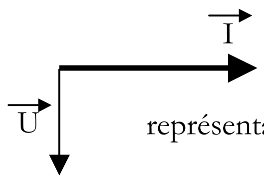
i(t) sinus $\Longrightarrow$ nombre complexe $\underline{I} = I_{eff} = (I_{eff} ; 0)$

On a $u(t) = (1/C) \int i(t)\,dt = [- I_{max}/(C\omega)]\cos(\omega t) = [I_{max}/(C\omega)] \sin(\omega t - \pi/2)$

2.2 – REPRESENTATION DE FRESNELL

$\mathbf{U_{max} = I_{max} / (C\omega) \Leftrightarrow U_{eff} = I_{eff} / (C\omega)}$

$\boldsymbol{\varphi_{u/i} = -\pi/2}$ ➔ **u en quadrature retard sur i**



représentation de Fresnell

2.3 – COMPLEXE ASSOCIE

Le nombre complexe associé à u(t) est $\underline{U} = - j\, I_{eff} / (C\omega)$ imaginaire pur :

u(t) sinus $\Longrightarrow$ nombre complexe $\underline{U} = - j\, I_{eff} / (C\omega) = (I_{eff} / (C\omega) ; -\pi/2)$

2.4 – LOI D'OHM – IMPEDANCE COMPLEXE

La relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ s'écrit :

$$\underline{U} = - j /(C\omega)\ \underline{I} = \underline{Z}_c \cdot \underline{I}$$

Cette relation fait apparaître l'impédance complexe $\underline{Z}_c$ du condensateur :

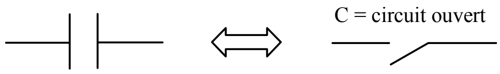
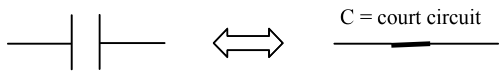
$$\boxed{\underline{Z}_c = \underline{U} / \underline{I} = - j / (C\omega) = 1 / (jC\omega)}$$

Commentaires $\begin{cases} |\ Zc\ | = |\underline{U}|\ /\ |\underline{I}| = U_{eff}\ /\ I_{eff} & \textit{rapport des val eff (ou amplitudes), s'exprime en } \Omega \\ \\ Arg\ (\underline{Z}c) = arg(\underline{U}) - arg(\underline{I}) = \varphi_{u/i} = -\pi/2 \end{cases}$

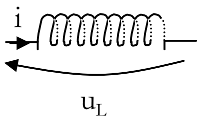
2.5 – COMPORTEMENT FREQUENTIEL DU CONDENSATEUR

Un condensateur est un composant dont l'impédance dépend de la pulsation et donc de la fréquence du courant qui le traverse :

Cas extrêmes :

En continu : ω -> 0	***En hautes fréquences : ω ->+∞***
$1/(C\omega) \rightarrow +\infty$ quand $\omega \rightarrow 0$	$1/(C\omega) \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow +\infty$
	

3 - BOBINE



$\boxed{u_L = L\ di\ /\ dt}$ *Cf cours électromagnétisme*

3.1 – EXPRESSION INSTANTANEE

Le résistor est supposé parcouru par un courant sinusoïdal : $i(t) = I_{max} \sin \omega t$

On associe à i(t) le nombre complexe $\underline{I}$ purement réel :

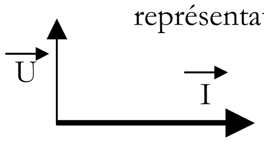
$$\boxed{i(t)\ \text{sinus} \Longrightarrow \text{nombre complexe}\ \underline{I} = I_{eff} = (\ I_{eff}\ ;\ 0\ )}$$

On a $u_L(t) = L\ di(t)/dt = [\ I_{max}L\omega\ ]\cos(\omega t) = [\ I_{max}L\omega\ ]\ \sin(\omega t + \pi/2)$

3.2 – REPRESENTATION DE FRESNELL

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{U_{max} = L\,\omega\,I_{max} \Leftrightarrow U_{eff} = L\,\omega\,I_{eff}} \\ \boldsymbol{\varphi_{u/i} = \pi/2} \ \Rightarrow \textbf{ u en quadrature avance sur i} \end{array}}$$

représentation de Fresnell



3.3 – COMPLEXE ASSOCIE

Le nombre complexe associé à u(t) est $\underline{U} = j\,L\,\omega\,I_{eff}$ imaginaire pur :

u(t) sinus $\Longrightarrow$ nombre complexe $\underline{U} = j\,L\,\omega\,I_{eff} = (\,L\,\omega\,I_{eff}\,;\,\pi/2\,)$

3.4 – LOI D'OHM – IMPEDANCE COMPLEXE

La relation entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$ s'écrit :

$$\underline{U} = j\,L\,\omega\;\underline{I} = \underline{Z}_L\,.\,\underline{I}$$

Cette relation fait apparaître l'impédance complexe $\underline{Z}_L$ de la bobine :

$$\boxed{\underline{Z}_L = \underline{U}\,/\,\underline{I} = j\,L\,\omega}$$

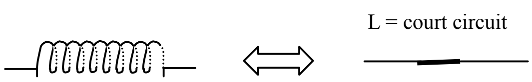
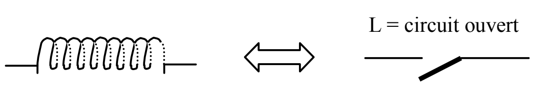
Commentaires

$$\begin{cases} |\,\underline{Z}_L\,| = |\underline{U}|\,/\,|\underline{I}| = U_{eff}\,/\,I_{eff} & \textit{rapport des val eff (ou amplitudes), s'exprime en } \Omega \\ \mathrm{Arg}\,(\underline{Z}c) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi_{u/i} = \pi/2 & \end{cases}$$

3.5 – COMPORTEMENT FREQUENTIEL DE LA BOBINE

Une bobine est un composant dont l'impédance dépend de la pulsation et donc de la fréquence du courant qui la traverse :

Cas extrêmes :

En continu : ω -> 0	***En hautes fréquences : ω ->+∞***
$L\omega \to 0$ quand $\omega \to 0$	$L\omega \to +\infty$ quand $\omega \to +\infty$
	

4 - LOI D'OHM EN REGIME SINUSOIDAL – IMPEDANCE COMPLEXE

$\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}$

$|\underline{Z}| = U_{max} / I_{max} = U_{eff} / I_{eff}$

$\arg(\underline{Z}) = \varphi_{u/i}$

Impédance : $\underline{Z}$ sous forme cartésienne : $\underline{Z} = R + jX$

R résistance en Ω et X réactance en Ω

$X < 0$ => capacitif : $-1/(C\omega)$

$X > 0$ => inductif : $L\omega$

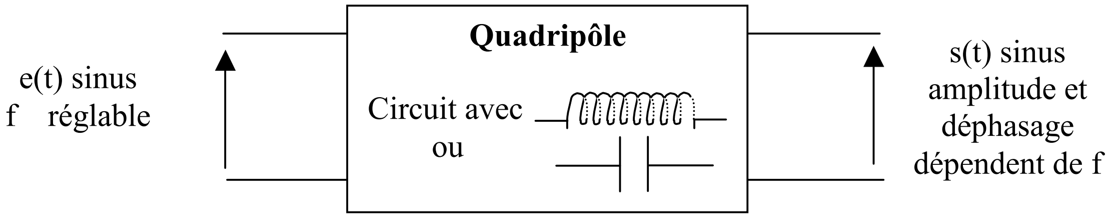
Admittance : $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

Ré(Y) : conductance en Ω^{-1} ou Siemens (S)

Im(Y) : Suceptance en Ω^{-1}

Les composants tels que bobines et condensateurs ont une impédance qui dépend de la fréquence du courant qui les traverse.

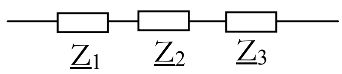
Tout circuit comportant des condensateurs et/ou des bobines aura donc un comportement différent selon la fréquence



5 - GROUPEMENT D'IMPEDANCES COMPLEXES

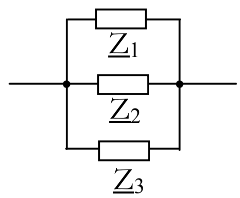
En série :

$\underline{Z}_{éq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$



En parallèle :

$1/\underline{Z}_{éq} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3$



$\underline{Y}_{éq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$

6 - LOIS APPLICABLES

Régime sinusoïdal ⇒

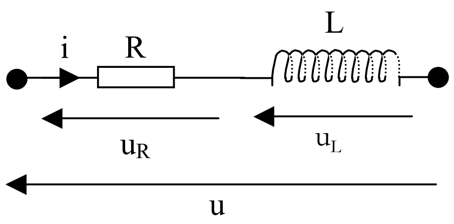
Loi des nœuds
Loi des mailles
Diviseur de tension
Théorème de Milmann
Principe de superposition

OK mais avec notation complexe ou vecteurs de Fresnel
car prise en compte du module et du déphasage

Attention : Ne jamais écrire ces lois en faisant intervenir les valeurs maxi ou les valeurs efficaces car alors on oublie les déphasages introduits par les dipôles L ou C.

EXERCICES – Chapitre 6

Exercice 1



1°/ Exprimer la relation liant u(t) et i(t)

2°/ i(t) étant un courant sinusoïdal, en déduire l'expression de u(t) sous forme sinusoïdale.

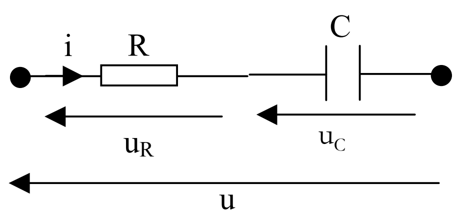
3°/ Passer à la représentation complexe et en déduire l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle RL série

4°/ Montrer que l'on obtient le résultat directement en appliquant les résultats des § III-1 et III-3 ainsi que V.

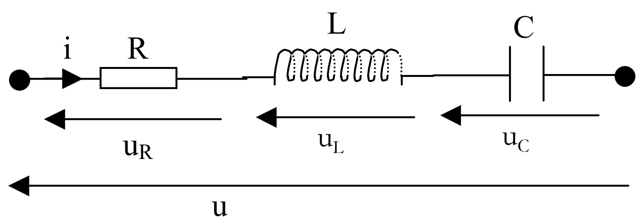
5°/ Exprimer $|\underline{Z}|$ et $\arg(\underline{Z})$ et étudier le comportement du dipôle en fonction de la pulsation du signal d'entrée.

Exercice 2

Même exercice avec un dipôle RC série.



Exercice 3



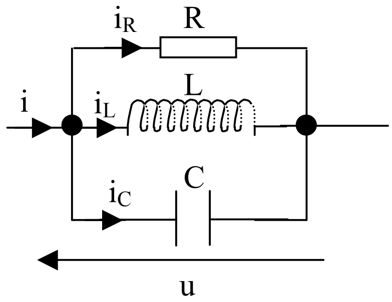
1°/ Exprimer directement l'impédance complexe du dipôle RLC série

2°/ Exprimer $|\underline{Z}|$. Etudier la fonction $|\underline{Z}|(\omega)$ et tracer l'allure de la courbe $|\underline{Z}|$ en fonction de ω.

3°/ Exprimer $\arg(\underline{Z})$. Etudier la fonction $\arg(\underline{Z})$ et tracer l'allure de la courbe $\arg(\underline{Z})$ en fonction de ω.

4°/ Pour une amplitude de u(t) constante et imposée par un générateur, que peut-on dire de I_{eff} quand $|\underline{Z}|$ est minimum ?

Exercice 4



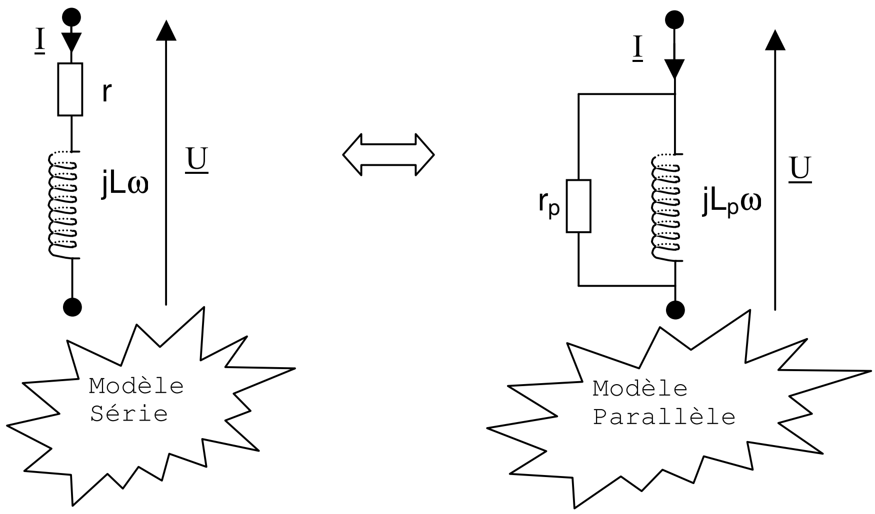
1°/ Exprimer directement l'admittance complexe du dipôle RLC parallèle

2°/ Exprimer $|\underline{Y}|$. Etudier la fonction $|\underline{Y}|(\omega)$ et tracer l'allure de la courbe $|\underline{Y}|$ en fonction de ω.

3°/ Exprimer $\arg(\underline{Y})$. Etudier la fonction $\arg(\underline{Y})$ et tracer l'allure de la courbe $\arg(\underline{Y})$ en fonction de ω.

4°/ Pour une amplitude de u(t) constante et imposée par un générateur, que peut-on dire de I_{eff} quand $|\underline{Y}|$ est minimum ?

Exercice 5



1°/ Exprimer l'impédance complexe du modèle série et l'admittance complexe du modèle parallèle.

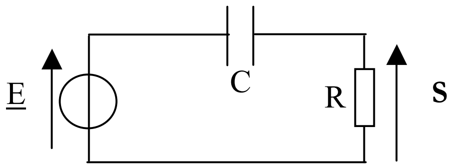
2°/ S'agissant de la même bobine, écrire l'égalité des impédance complexes des deux modèles.

3°/ En égalant les parties imaginaires et les parties réelles des deux impédances, montrer que l'on obtient les relations suivantes :

$r_p = r\,(1 + Q^2)$ $L_p = L\,(1 + (1/Q^2))$	Où $Q = r_p / L_p\,\omega = L\omega / r$ est le facteur de qualité (modèle //)

4°/ Que deviennent ces relations si $r << L\omega$?

Exercice 6



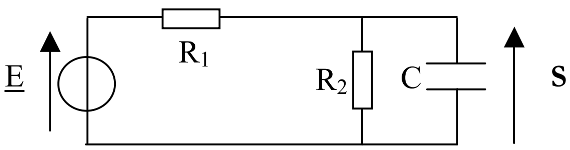
1°/ Exprimer la fonction de transfert $\underline{T} = \underline{S}/\underline{E}$ du circuit en fonction de R, C et ω. Mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$A/[\ 1 - j\ (\omega_0/\omega)\ ]$$

2°/ Exprimer $|\underline{T}|$ et étudier cette fonction de ω. Tracer $20\log|\underline{T}|$ en fonction de $\log\omega$.

3°/ Exprimer $\arg(\underline{T})$ et étudier ses variations en fonction de ω. Tracer $\arg(\underline{T})$ en fonction de $\log\omega$.

Exercice 7



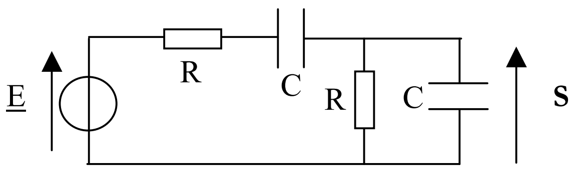
1°/ Exprimer la fonction de transfert $\underline{T} = \underline{S}/\underline{E}$ du circuit en fonction de R_1, R_2, C et ω. Mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$A/[\ 1 + j\ (\omega/\omega_0)\ ]$$

2°/ Exprimer $|\underline{T}|$ et étudier cette fonction de ω. Tracer $20\log|\underline{T}|$ en fonction de $\log\omega$.

3°/ Exprimer $\arg(\underline{T})$ et étudier ses variations en fonction de ω. Tracer $\arg(\underline{T})$ en fonction de $\log\omega$.

Exercice 8



1°/ Exprimer l'admittance Y_{eq} équivalente du dipôle R et C en parallèle.

2°/ Exprimer S en fonction de E de R, C et de Y_{eq}.

3°/ En déduire la fonction de transfert $\underline{T} = \underline{S}/\underline{E}$ du circuit en fonction de R, C et ω. Mettre cette fonction de transfert sous la forme $A/[\ 3 + j\ (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)\ ]$

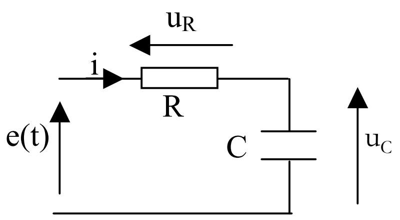
4°/ Exprimer $|\underline{T}|$ et étudier cette fonction de ω.

5°/ Exprimer $\arg(\underline{T})$ et étudier ses variations en fonction de ω.

Chapitre 7 - REGIMES TRANSITOIRES : CIRCUITS RC

I – CIRCUIT RC

1°/ EQUATION DIFFERENTIELLE



$e(t) = u_R + u_C$

$u_R = R\,i$
$i = dq/dt$ et $q = C\,u_C$ donc $i = C\,du_C/dt$

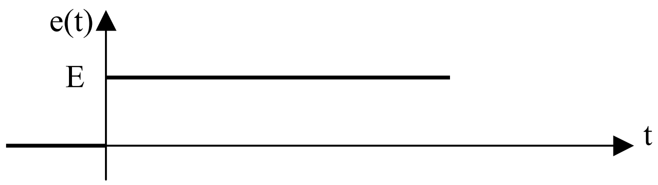
En remplaçant :
$RC\,du_C/dt + u_C = e$

La relation entre u_C et e est une équation différentielle : $\boxed{du_C/dt + u_C / (RC) = e / (RC)}$

Elle permet de trouver l'expression temporelle de u_C quel que soit le signal d'entrée appliqué.

2°/ SIGNAL ECHELON, CONDITION INITIALE

On étudie dans la suite, la réponse du circuit à une tension e(t) en échelon :



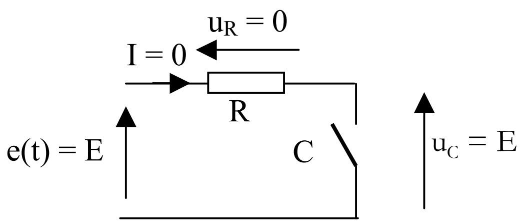
On suppose qu'initialement le condensateur est déchargé, et donc $u_C(0) = 0$

3°/ REGIME PERMANENT

a) Comportement du condensateur

Quand le régime permanent est atteint, on peut considérer que e(t) est une tension continue.

Alors le condensateur peut-être considéré comme un circuit ouvert.



On peut déjà affirmer que u_c tend vers E

$$\lim_{t \to +\infty} u_c(t) = E$$

b) Solution particulière de l'équation différentielle (SPEC)

On peut trouver ce même résultat à partir de l'équation différentielle : Au bout d'un temps suffisamment long, quand le régime permanent est atteint, $u_c(t)$ ne varie plus. Sa dérivée est donc nulle. L'équation différentielle devient donc : $u_C / (RC) = E / (RC) \Leftrightarrow u_c = E$

Cette solution donnée par l'équation différentielle est la solution particulière de l'équation différentielle, de même nature que le second membre de cette équation différentielle (ici une constante).

La solution particulière de l'équation différentielle donne le régime permanent.

4°/ REGIME TRANSITOIRE

a) Comportement du condensateur

Le condensateur est un réservoir de charges. Comme tout réservoir, à moins d'un débit infini, il ne peut se remplir ou se vider instantanément.

Ainsi, la charge q(t) accumulée dans le condensateur ne peut pas varier brutalement si le courant ne peut devenir infini. Il en sera de même pour la tension $u_c(t)$ puisque uc est proportionnelle à q(t) ($u_c = q/C$)

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier instantanément : uc(t) est une fonction continue (au sens mathématique) dans le temps.

On peut donc dire que : $u_c(t = 0+) = 0$ et que $u_c(t)$ croit progressivement.

b) Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM)

La forme de l'évolution temporelle de la partie transitoire de uc est donnée par la résolution de l'équation sans le second membre qui lui fixe le régime permanent.

La solution générale de l'équation sans second membre donne le régime transitoire

Il faut résoudre : $\boxed{du_C/dt + u_C / (RC) = 0}$

$du_C/dt = - u_C / (RC)$

$du_C/u_c = - dt / (RC)$

$\int du_C/uc = - \int dt / (RC)$

$\ln u_c = -t /(RC) + cste$

$\exp(\ln u_c) = \exp[-t /(RC) t + cste]$

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme : $\boxed{\mathbf{u_c = A \exp(-t/RC)}}$

On peut vérifier que : $\lim_{t \to +\infty} uc(t) = 0$ ce qui la moindre des choses pour du transitoire !

5°/ SOLUTION COMPLETE

La solution complète est constituée du régime transitoire et du régime permanent :

$$\mathbf{uc(t) = SGEESM + SPEC}$$

transitoire + permanent

$$uc(t) = A \exp(-t/RC) + E$$

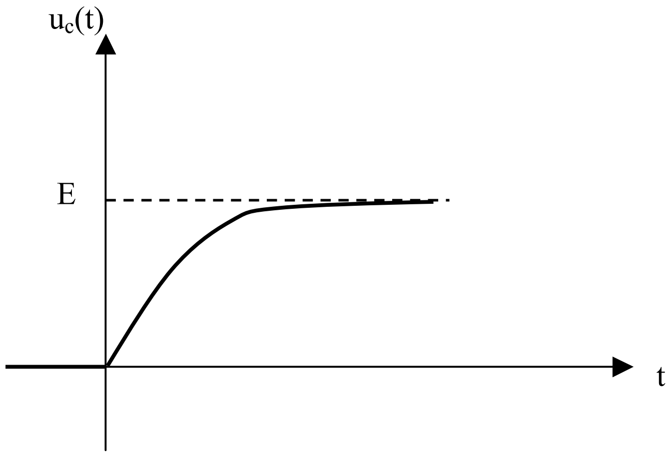
6°/ UTILISATION DE LA CONDITION INITIALE : détermination de la constante

Dans cet exemple : $u_C(0) = 0 \Leftrightarrow uc(0) = A \exp(-0/RC) + E = 0 \Leftrightarrow A = - E$

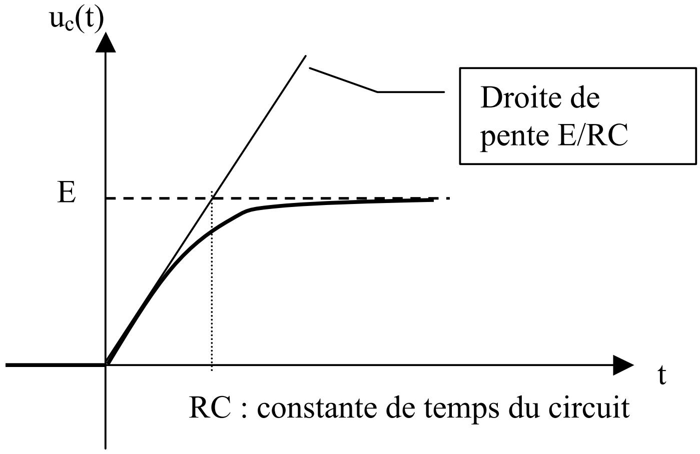
On a donc enfin la solution :

$$uc(t) = - E \exp(-t/RC) + E$$

$$\boxed{uc(t) = E [1 - \exp(-t/RC)]}$$



7°/ EXPLOITATION DE LA REPONSE TEMPORELLE



$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{E \ \exp(-t/RC)}{RC}$$

=> **pente de la tangente à l'origine :**

$$\mathbf{du_c(0)/dt = E/RC}$$

On constate que le produit RC règle la « vitesse » d'établissement du régime permanent :
Plus RC est grand plus la croissance de uc est lente.
RC a bien les dimensions d'un temps et s'exprime en secondes.

RC est appelée constante de temps du circuit, notée souvent τ.

Valeur de u_c à l'instant τ : $u_c(\tau) = E [1 - \exp(-RC/RC)] = E [1 - \exp(-1)] = 0,63 E$

$$\boxed{u_c(\tau) = 0,63 E}$$

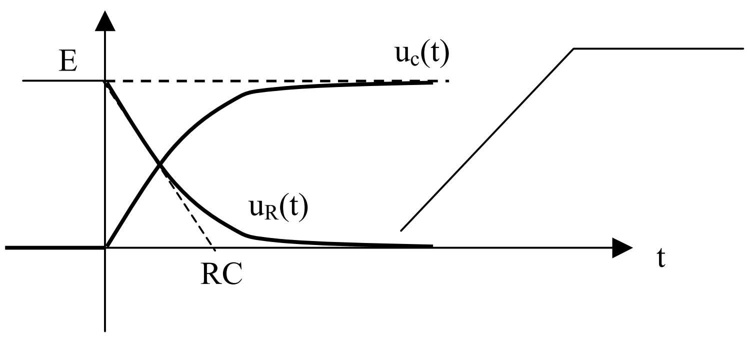
On remarque enfin que, conformément à l'annonce faite au 4°/ a), $u_c(t)$ varie progressivement. La variation de u_c est d'autant plus progressive que C est grand (gros réservoir) ou que R est grande (débit plus faible). C'est en quelque sorte comme remplir sa baignoire… à ceci près que au fur et à mesure que le condensateur se rempli, le courant diminue (condensateur circuit ouvert en régime permanent …), ce qui n'est pas le cas du débit d'eau dans la baignoire, mais peut-être bien celui du réservoir de la chasse d'eau !

II – CIRCUIT CR

On s'intéresse maintenant à la tension u_R aux bornes de la résistance.

Inutile de tout refaire : $u_R(t) = e(t) - uc(t)$ => $\boxed{u_R(t) = E \exp(-t/RC)}$

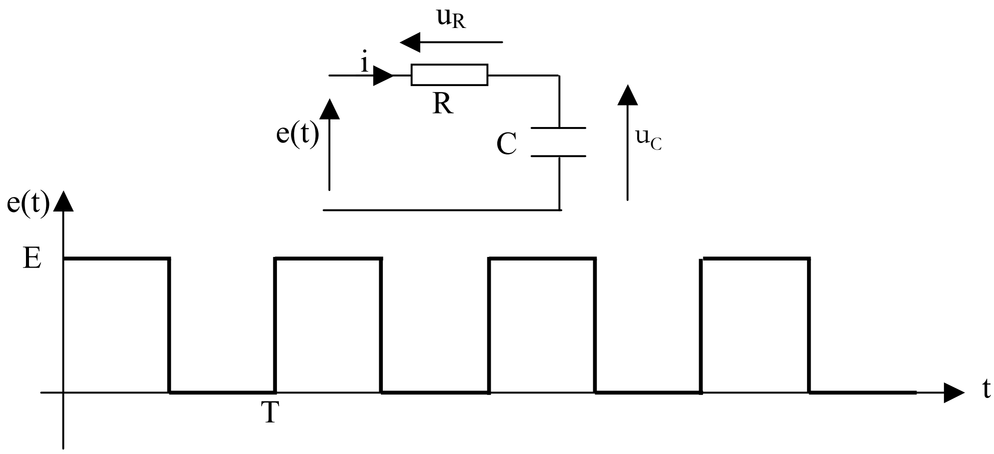
A chaque instant $u_R + u_c = E$: les deux tensions se compensent.



Régime permanent : i -> 0 => u_R -> 0

$$\lim_{t \to +\infty} u_R(t) = 0$$

III – REPONSE DU CIRCUIT RC A UN SIGNAL RECTANGULAIRE PERIODIQUE



1°/ MISE SOUS TENSION

A la mise sous tension, on peut estimer que le condensateur est déchargé : $u_c(0) = 0$

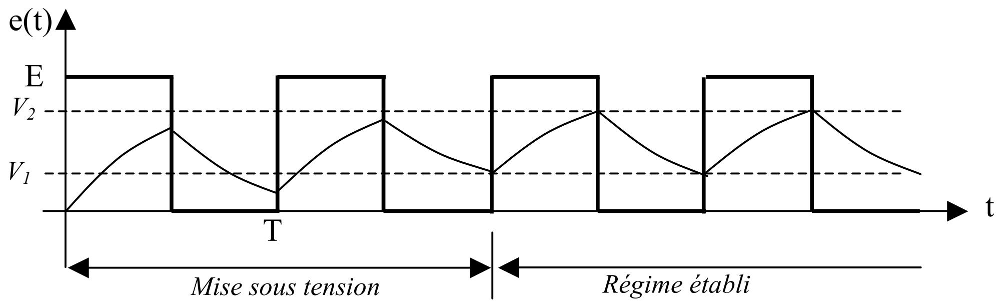
Pendant la 1ère alternance $t \in [\,0\ ,\ T/2\,]$, le condensateur se charge.

A l'instant $t = T/2$, la valeur atteinte par $u_c(t)$ dépend de l'ordre de grandeur de la constante de temps $\tau = RC$ par rapport à la période T du signal appliqué à l'entrée du circuit.

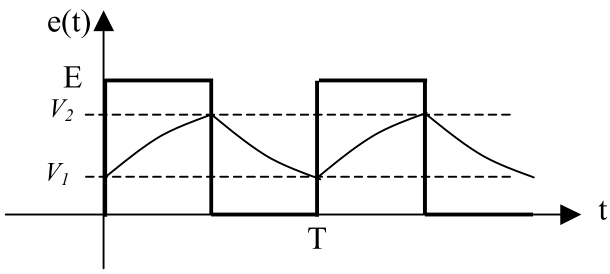
Pendant la 2ème alternance $t \in [\,T/2\ ;\ T\,]$, le condensateur se décharge.

A l'instant $t = T$ la valeur atteinte par $u_c(t)$ n'est pas nulle. Pour la troisième alternance, la condition initiale n'est plus zéro contrairement à la première alternance.

Au bout d'un certain temps l'évolution de u_c se stabilise entre deux valeurs : V1 et V2



2°/ EXPRESSION DE Uc(t) PENDANT UNE PHASE DE CHARGE



Régime établi

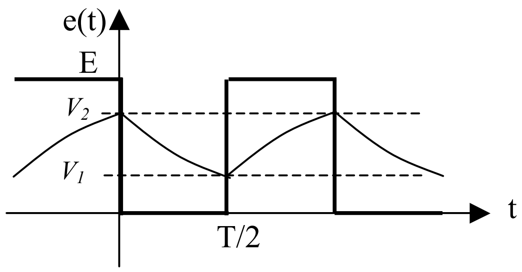
L'expression de $u_c(t)$ a été établie au I 5°/ : uc(t) = A exp(-t/RC) + E

La condition initiale est $u_c(0) = V_1 = A + E \Rightarrow A = V_1 - E$

Donc $u_c(t) = (V_1 - E)\ \exp(-t/RC) + E$

Valeur atteinte à T/2 : $u_c(T/2) = V2 = (V_1 - E)\ \exp(-T/2RC) + E$

3°/ EXPRESSION DE Uc(t) PENDANT UNE PHASE DE DECHARGE



Régime établi

Le plus simple est de décaler l'origine des temps sur un front descendant de e(t).

L'expression de uc(t) est du même type que celle établie au I-5°/ : $u_c(t) = B \exp(-t/RC) + 0$

La condition initiale est $u_c(0) = V_2 = B$

Donc $u_c(t) = V_2\ \exp(-t/RC)$

Valeur atteinte à T/2 : $u_c(T/2) = V_1 = V_2\ \exp(-T/2RC)$

4°/ EXPRESSIONS DE V1 ET V2

On a démontré :

$$\boxed{\begin{array}{l} V_2 = (V_1 - E)\ \exp(-T/2RC) + E \\ V_1 = V_2\ \exp(-T/2RC) \end{array}}$$

Ces deux relations donnent : $V_2 = [\, V_2\ \exp(-T/2RC) - E\,]\ \exp(-T/2RC) + E$

D'où

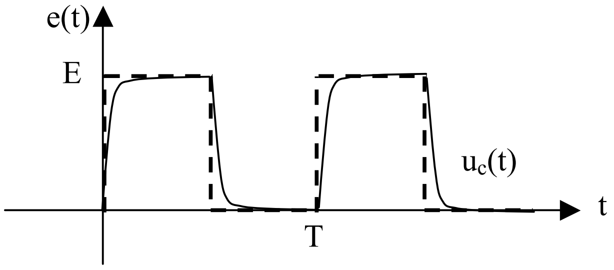
$$\boxed{V_2 = E\ \frac{1 - \exp(-T/(2RC))}{1 - \exp(-T/(RC))}} \qquad \boxed{V_1 = E\ \frac{1 - \exp(-T/(2RC))}{1 - \exp(-T/(RC))}\ \exp(-T/(2RC))}$$

Ces expressions ne sont pas retenir !

Elle permettent de déterminer les valeurs min et max du signal au bornes du condensateur.

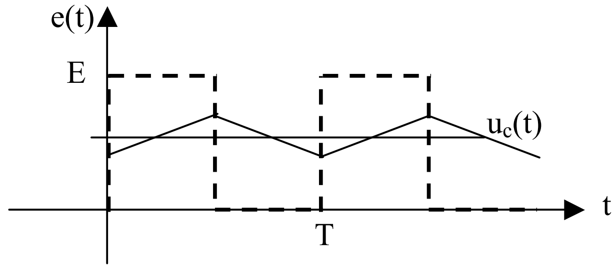
5°/ LES DIFFERENTS MODES DE FONCTIONNEMENT

1er cas : τ << T



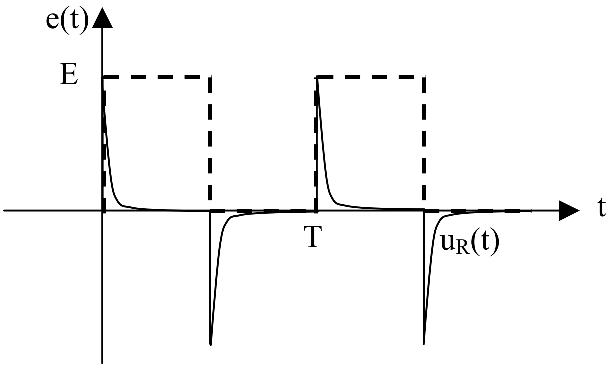
Le circuit ***transmet*** *quasiment sans déformation le signal rectangulaire périodique*

2ème cas : τ >> T



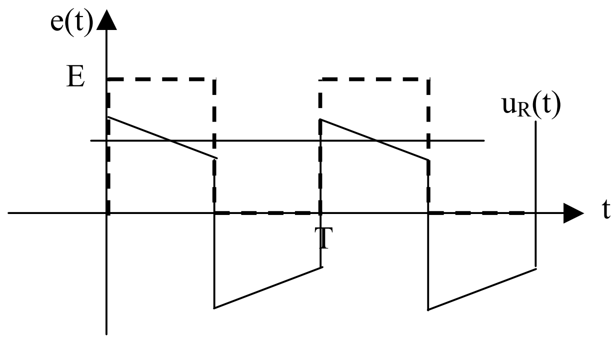
La courbure n'est plus visible : le circuit ***intègre*** *le signal rectangulaire périodique*

1er cas : τ << T



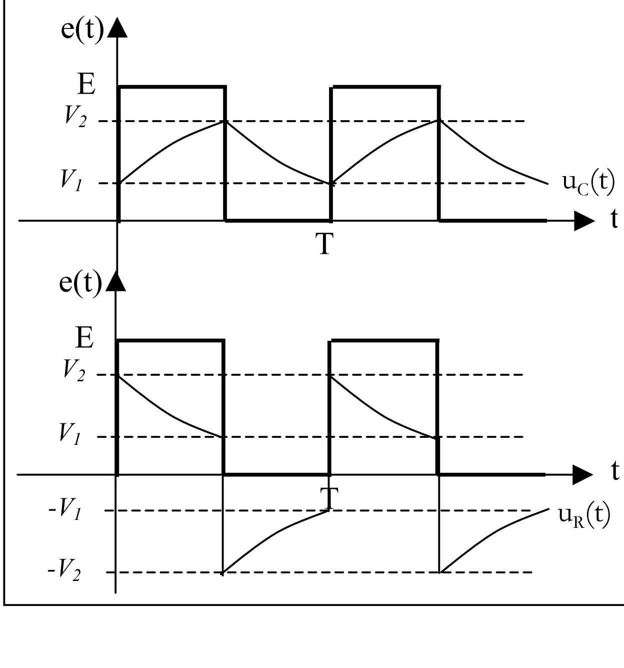
Le circuit ***dérive*** *le signal rectangulaire périodique*

2ème cas : τ >> T

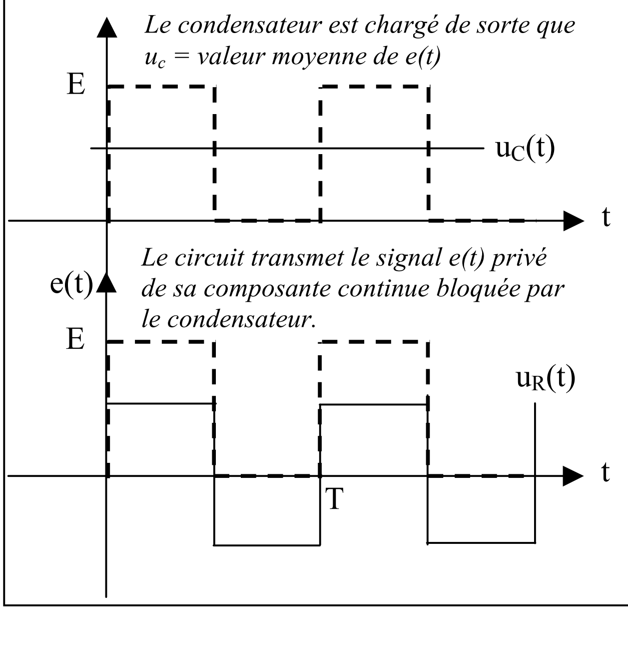


Pour τ et T du même ordre, on retrouve pour $u_c(t)$ les courbes données précédemment Cf § III – 2°/. L'allure de $u_R(t)$ est obtenue en se rappelant que $u_R(t) = E - u_c(t)$.

Cas intermédiaire : τ ≈ T



cas extrême : τ >>>>> T



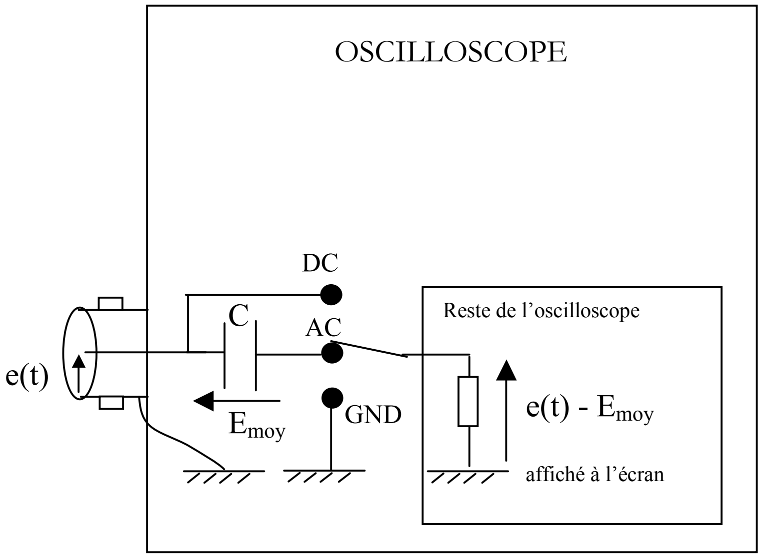
Remarques sur les courbes tracées :

Dans tous les cas :

- $u_c(t)$ ne présente pas de variations brutales : les fronts de e(t) ne sont pas transmis.
- $u_c(t)$ a même valeur moyenne que e(t)

- $u_R(t)$ présente des variations brutales : les fronts de e(t) sont transmis
- $u_R(t)$ a une valeur moyenne nulle.

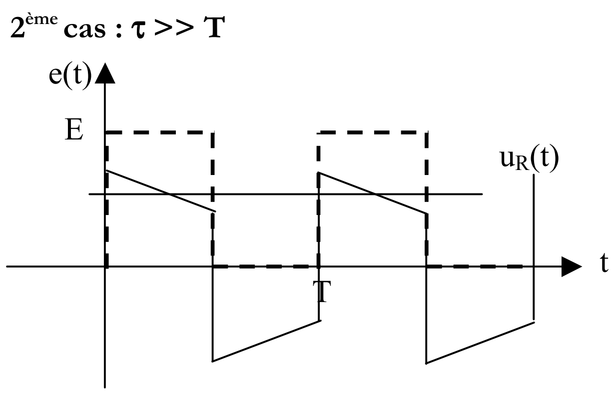
Le cas extrême τ >>>>>T correspond au couplage « AC » de l'oscilloscope :



Avec le couplage AC, un condensateur de forte capacité (ainsi τ >>>>T) bloque la composante continue du signal appliqué sur l'entrée.

On observe alors sur l'écran l'évolution temporelle de e(t) privé de sa composante continue.

Remarque , si on observe un signal rectangulaire périodique de fréquence faible (10 Hz par exemple) avec un couplage AC, on peut observer alors que le signal rectangulaire est bien privé de sa composante continue, mais il est également déformé comme dans le 2ème cas dessiné car alors la période de e(t) est moins grande par rapport à τ.



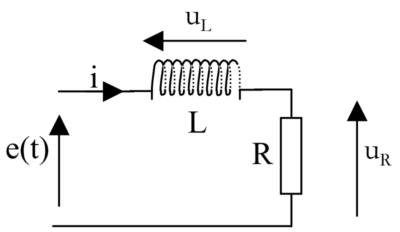
Observation d'un signal rectangulaire périodique de fréquence faible (10 Hz) avec un couplage AC

On évite donc le couplage AC lors de l'observation de signaux basse fréquence.

Chapitre 8 - REGIMES TRANSITOIRES : CIRCUITS RL

I – CIRCUIT RL

On considère un circuit LR.



$u_R + u_L = e$

$u_L = L\ di/dt$

$u_R = Ri \Rightarrow i = u_R/R$

On a donc : $u_R + L\ di/dt = e$
En dérivant membre à membre : $u_R + (L/R)\ du_R/dt = e \Leftrightarrow (L/R)\ du_R/dt + u_R = e$

La relation entre u_L et e est une équation différentielle : $\boxed{du_R/dt + (R/L)\ u_R = (R/L)\ e}$

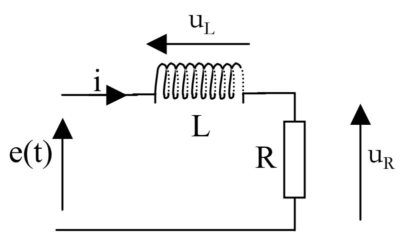
Elle permet de trouver l'expression temporelle de u_L quel que soit le signal d'entrée appliqué.

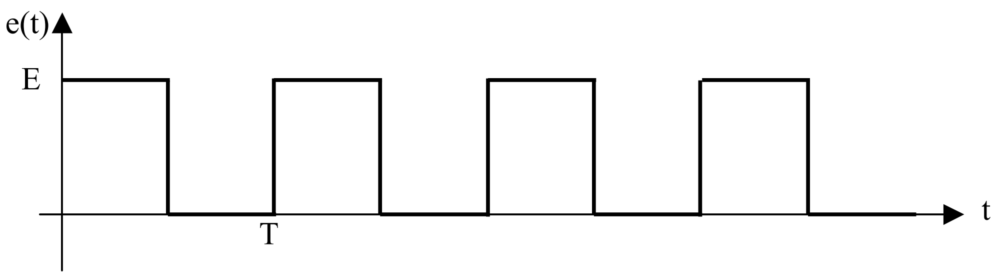
On remarque que cette équation est analogue à celle du circuit RC :

u_R joue le rôle de u_c
u_L joue le rôle de u_R
$\tau = L/R$ joue le rôle de $\tau = RC$

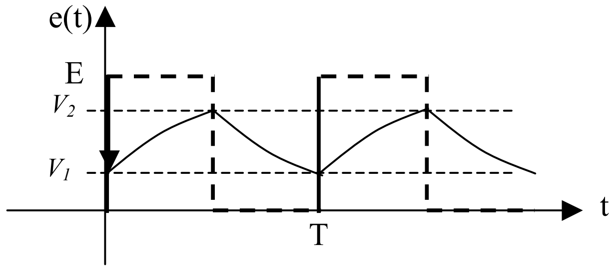
Les résultats sont donc identiques, il suffit d'adapter.

II – REPONSE DU CIRCUIT LR A UN SIGNAL RECTANGULAIRE PERIODIQUE





1°/ EXPRESSION DE $U_R(t)$ PENDANT UNE PHASE DE CROISSANCE



Régime établi

L'expression de $u_R(t)$ a été établie au I 5°/ :
$u_R(t) = A \exp(-Rt/L) + E$

La condition initiale est $u_R(0) = V_1 = A + E$
$\Rightarrow A = V_1 - E$

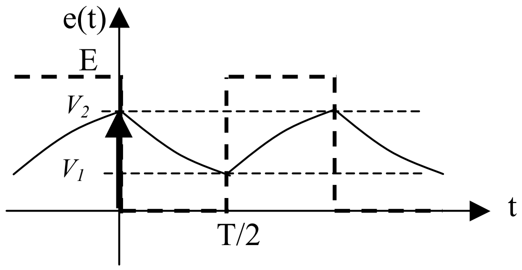
On remarque que la constante A est représentée par la flèche sur le chronogramme. Elle aura finalement toujours :

A = condition intiale – valeur finale.

Donc $u_R(t) = (V_1 - E) \exp(-Rt/L) + E$

Valeur atteinte à T/2 : $u_R(T/2) = V2 = (V_1 - E) \exp(-RT/2L) + E$

3°/ EXPRESSION DE Uc(t) PENDANT UNE PHASE DE DECROISSANCE



Régime établi

Le plus simple est de décaler l'origine des temps sur un front descendant de e(t).

L'expression de $u_R(t)$ est du même type que celle établie au I-5°/ :
$u_R(t) = B \exp(-Rt/L) + 0$

B = cond init – val finale = $V_2 - 0 = V_2$ (représentée par la flèche sur le chronogramme)

Donc $u_c(t) = V_2 \exp(-Rt/L)$

Valeur atteinte à T/2 : $u_c(T/2) = V_1 = V_2 \exp(-RT/2L)$

4°/ EXPRESSIONS DE V1 ET V2

On a démontré :

$$\boxed{\begin{array}{l} V_2 = (V_1 - E) \exp(-RT/2L) + E \\ V_1 = V_2 \exp(-RT/2L) \end{array}}$$

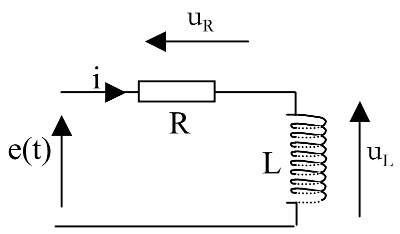
D'où

$$\boxed{V2 = E \frac{1 - \exp(-RT/(2L))}{1 - \exp(-RT/L)}} \qquad \boxed{V1 = E \frac{1 - \exp(-RT/(2L))}{1 - \exp(-RT/L)} \exp(-RT/(2L))}$$

Ces expressions ne sont pas retenir !

Elle permettent de déterminer les valeurs min et max du signal au bornes de la résistance.

II – REPONSE DU CIRCUIT RL A UN SIGNAL RECTANGULAIRE PERIODIQUE

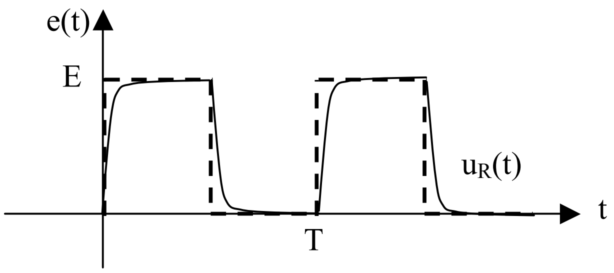


Cette fois u_L joue le même rôle que u_R pour le circuit CR.
Quelle que soit la façon de le dessiner il s'agit bien du même schéma. L'intérêt de la permutation des places de R et L est de permettre l'observation simultanée à l'oscilloscope de e(t) et $u_L(t)$ référencée à la même masse.

u_L est obtenue à partir de $u_R(t)$ puisque à tout instant t, on a $u_L(t) = e(t) – u_R(t)$.

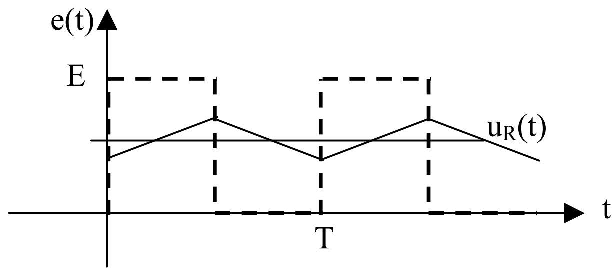
III - LES DIFFERENTS MODES DE FONCTIONNEMENT

1^er^ cas : $\tau \ll T$



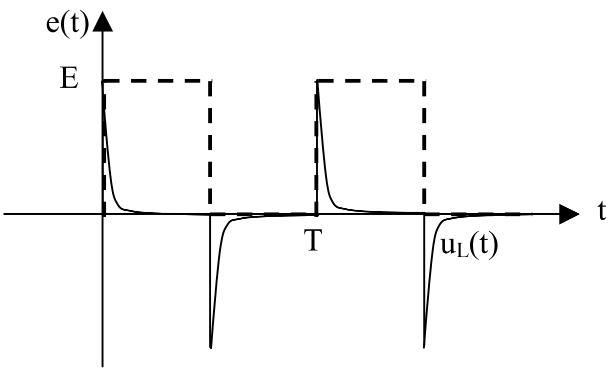
*Le circuit **transmet** quasiment sans déformation le signal rectangulaire périodique*

2^ème^ cas : $\tau \gg T$



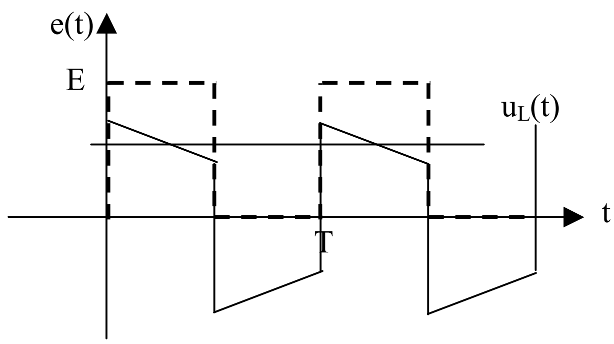
*La courbure n'est plus visible : le circuit **intègre** le signal rectangulaire périodique*

1^er^ cas : $\tau \ll T$



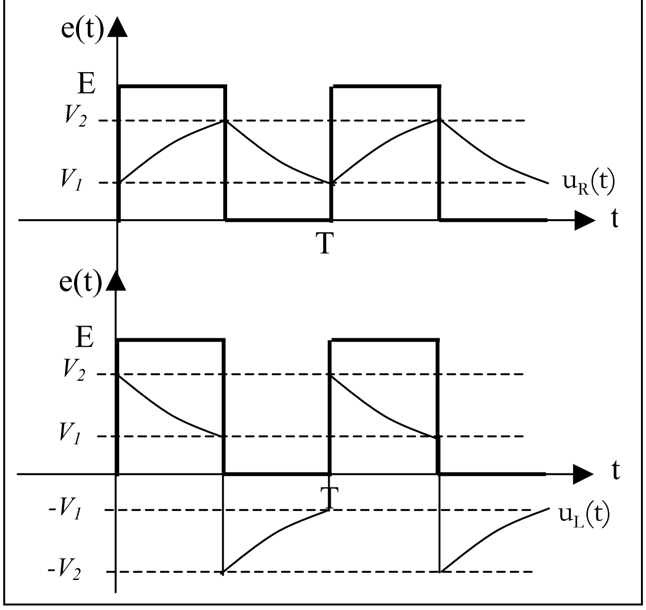
*Le circuit **dérive** le signal rectangulaire périodique*

2^ème^ cas : $\tau \gg T$

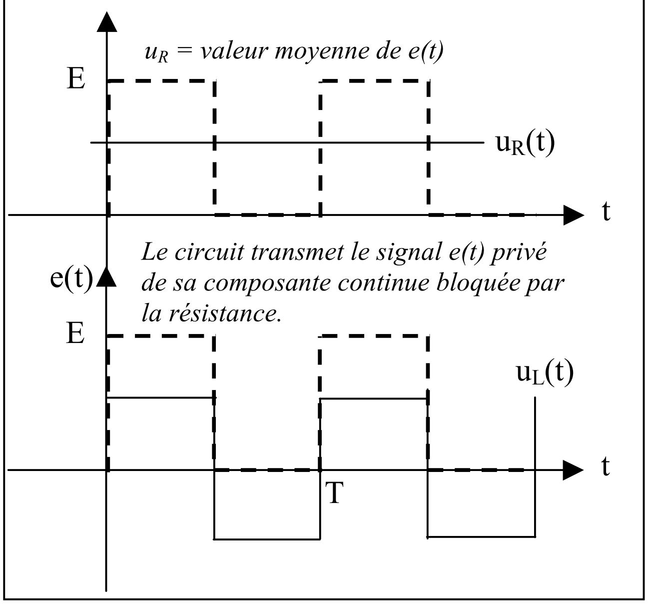


Pour τ et T du même ordre, on retrouve pour $u_c(t)$ les courbes données précédemment Cf § II – 1°/2°/. L'allure de $u_L(t)$ est obtenue en se rappelant que $u_L(t) = E - u_R(t)$.

Cas intermédiaire : $\tau \approx T$



cas extrême : τ >>>>> T



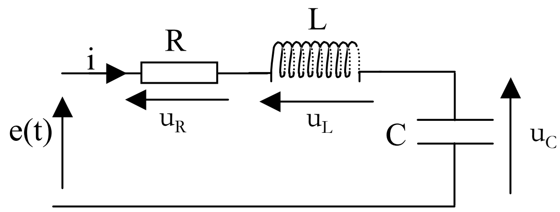
IV – CONCLUSIONS SUR LES CIRCUITS RL et RC

RC	RL
u_C ne varie pas brutalement Le condensateur lisse la tension $u_{C\ moy} = e_{moy}$	u_R ne varie pas brutalement Le courant ne peut pas varier brutalement La bobine lisse le courant $u_{R\ moy} = e_{moy}$
u_R présente des variations brutales Le courant peut varier brutalement $u_{R\ moy} = 0$	u_L présente des variations brutales $u_{L\ moy} = 0$

Chapitre 9 - REGIMES TRANSITOIRES : CIRCUITS RLC

I – CIRCUIT RLC

On considère un circuit RLC.



On s'intéresse dans la suite à la relation entre u_c et e

Pour la résolution de l'équation différentielle (§III et IV), le signal e(t) sera un échelon.
Le condensateur sera supposé initialement déchargé ($u_c(0) = 0$)

II – EQUATION DIFFERENTIELLE

Etablir l'équation différentielle du circuit RLC

Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{d^2 uc/dt^2 + (2\, m\, \omega_0)\, duc/dt + \omega_0^2\, uc = \omega_0^2\, e}$$

La pulsation propre ω_0 :

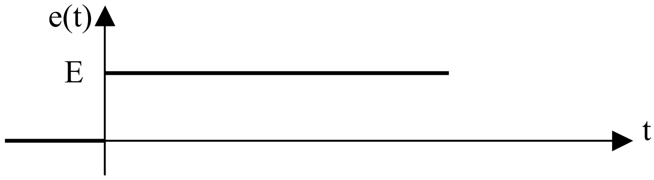
$\boxed{\omega_0 = \quad}$ ⇨ Rad/s

Le coefficient d'amortissement m :

$\boxed{m = \quad}$ ⇨ Sans dimension

III – REGIME PERMANENT (SPEC)

Le signal e(t) appliqué est un échelon :



1°/ Déterminer la solution particulière de l'équation complète (elle est du même type que le second membre)

2°/ Retrouver cette solution en observant le comportement du circuit en continu.

IV – REGIME TRANSITOIRE

1°/ SGESSM => Equation caractéristique

On écrit l'équation caractéristique en remplaçant les dérivées de uc par x^n où n représente le degré de dérivation. Les coefficients multiplicateurs sont conservés.

Equation différentielle sans second membre :

$$\boxed{d^2 uc/dt^2 + (2\, m\, \omega_0)\, duc/dt + \omega_0^2\, uc = 0}$$

Equation caractéristique :

$$\boxed{x^2 + (2\, m\, \omega_0)\, x + \omega_0^2 = 0}$$

2°/ Résolution de l'équation caractéristique

a) discriminent

$$\Delta = (2m\omega_0)^2 - 4\,\omega_0^2 = 4\,\omega_0^2\,(m^2 - 1) = 4\,\omega_0^2\,(m - 1)\,(m + 1)$$

b) Signe du discriminent

m	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
m-1		-		-	0	+	
m+1		-	0	+		+	
Δ		+	0	-	0	+	

Attention on a forcément :
m>0

Conclusion :

Si m < 1 : l'équation caractéristique a deux solutions x_1 et x_2 complexes conjuguées

Si m > 1 : l'équation caractéristique a deux solutions x_1 et x_2 réelles.

3°/ Solutions de l'équation sans second membre

Dans tous les cas la solution s'écrit :

$\mathbf{u_c(t) = A \exp(x_1 t) + B \exp(x_2 t)}$
x1 et x2 étant les solutions de l'équation caractéristique

Ecrire les solutions de l'équation caractéristique :

Δ > 0	**Δ < 0**

Ecrire la solution de l'équation sans second membre :

Δ > 0	**Δ < 0**

V – SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

1°/ SOLUTION

2°/ DETERMINATION DES CONSTANTES

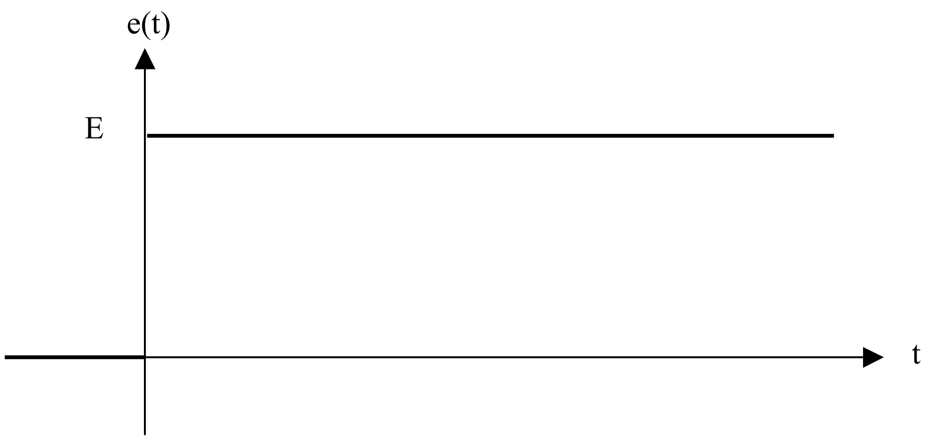
Les conditions initiales sont : $u_c(0) = 0$ et $du_c(0)/dt = 0$

En déduire A et B en fonction de x_1 et x_2

3°/ SOLUTION POUR m > 1

a) Solution

b) Chronogramme



Commentaires :

4°/ SOLUTION POUR m < 1

a) Solution

Ecrire la solution sachant que $x_1 = a + jb$ et $x_2 = a – jb$

b) Détermination des constantes

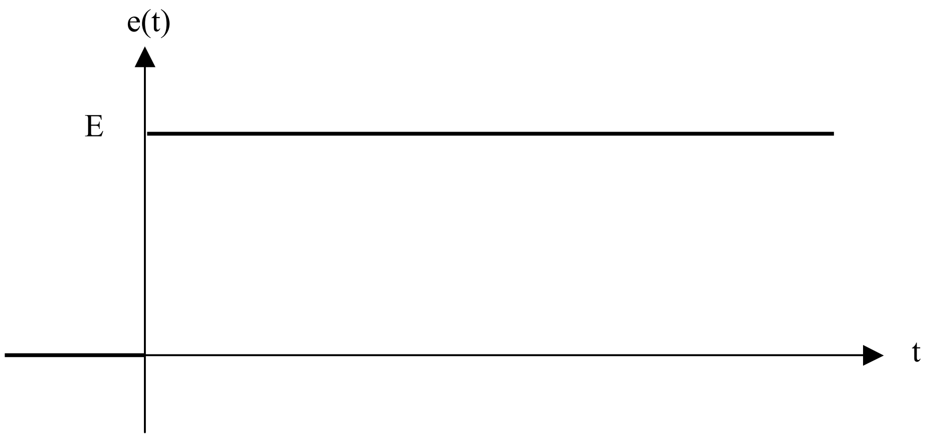
Reprendre les expressions de A et B du V-2°/ et montrer que A et B sont complexe conjuguées.

c) Mise en évidence d'une réponse oscillatoire amortie

Réécrire la solution de l'équation différentielle en faisant apparaître les formules d'Euler :

$$(e^{jx} + e^{-jx}) / 2 = \cos x \quad \text{et} \quad (e^{jx} - e^{-jx}) / (2j) = \sin x$$

d) Chronogramme



Commentaires :

e) Pseudopériode

f) Décrément logarithmique