Corrigé de la série n°4

Exercice n°1 :

la fonction $f\ (x,y) = \left(x^2+y^2, xy\right)$

la matrice jacobienne M de f est : $M = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$

$\det M = 2\left(x^2+y^2\right) \neq (0,0)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

donc $d\ f$ est inversible

D'après le théorème d'inversion local

f est un C^1- difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Exercice n°2 :

la fonction $f\ (r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

1- La fonction f est de classe C^r

det $J\ f\ (r,\theta) = r\ \neq 0$ si $r \neq 0$ $\left(r \in \mathbb{R}_+^*\right)$

$d\ f\ (r,\theta)$ est inversible alors

$d\ f$ est un isomorphisme T.I.L $\Longrightarrow$

l'application f restreinte à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un C^r-difféomorphisme local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

2- La fonction f n'est pas un difféomorphisme globale

puisque f est périodique de période de $2\ \pi$

donc n'est pas injective sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

3- La fonction f est injective sur $\mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[$

T.I.L $\Longrightarrow f$ restreinte à $\mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[$ est C^∞

donc f est un difféomorphisme globale de $\mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[$

sur son image $f\ \left(\mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\ \right)$.

Exercice n°3 :

la fonction $f\ (\theta,\rho) = (\cos\rho\cos\theta, \cos\rho\sin\theta, \sin\rho)$

1- f est une immersion

f est continument différentiable

sa matrice jacobienne en (θ,ρ) est :

$$\begin{pmatrix} \cos\rho\sin\theta & -\sin\rho\cos\theta \\ \cos\rho\cos\theta & -\sin\rho\sin\theta \\ 0 & \cos\rho \end{pmatrix}$$

les matrices d'ordre 2 sont :

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\rho\sin\theta & -\sin\rho\cos\theta \\ 0 & \cos\rho \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\rho\cos\theta & -\sin\rho\ \sin\theta \\ 0 & \cos\rho \end{pmatrix}$$

$\det A = \cos\rho^2\sin\theta$ et $\det B = \cos\rho^2\cos\theta$

$\cos\rho \neq 0$ $\left(\frac{\pi}{2} < \rho < \frac{\pi}{2}\right)$

ces deux déterminats ne sont jamais nuls en même temps.

donc f est une immersion .

2- f est injective

$\forall(\theta,\rho) \quad \forall(\theta',\rho') \in U$ dire que $f\ (\theta,\rho) = f\left(\theta^{'},\rho^{'}\right) \Longrightarrow$

1- $\sin\rho = \sin\rho^{'} \Longrightarrow \rho = \rho^{''}$

2- les égalites : $\cos\rho\cos\theta = \cos\rho^{'}\cos\theta^{'}$

$\cos\rho\sin\theta = \cos\rho^{'}\sin\theta^{'}$

donnent $\cos\theta = \cos\theta^{'}$ et $\sin\theta = \sin\theta^{'} \Longrightarrow$

$\theta = \theta$ f est injective

Exercice n$^\circ 4$:

la fonction $f\ (x,y) = \left(x^2,\ y^2, 2xy\ , -y\right)$

sa matrice jacobienne en (x,y) est :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \\ 2y & 2x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0$$

La matrice extraite d'ordre 2 est :

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \qquad \det A = 4xy \neq 0$$

alors le rang de $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = 2 = \dim\mathbb{R}^2 = 2$

est une immersion sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.