Module : Analyse fonctionnelle appliquée 14 Mai 2020
Master 1 de Mathématiques Appliquées

Série 4
(Rédiger sur feuille les exercices 2 et 3, à rendre avant le 31 mai)

Excercice 1.
Résoudre par la méthode variationnelle les problèmes suivants. $I =]0,1[$, $f \in L^2(I)$.

$$(P_1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(I) \text{ tel que :} \\ -u'' + \lambda u = f, \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(I) \text{ tel que :} \\ -u'' + \lambda u = f, \\ -u'(0) + \alpha u(0) = 0, \quad u'(1) + \beta u(1) = 0. \end{cases}$$

$$(P_3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(I) \text{ tel que :} \\ -u'' + \lambda u = f, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases}$$

Excercice 2.
Soit $I =]0,1[$. Soit $p(x)$ une fonction positive, de classe C^1 sur $\bar{I} = [0,1]$ et $f \in L^2(I)$. On se donne également un nombre réel $\lambda \geq 0$. On se propose d'étudier le problème variationnel suivant : trouver $u \in V = H_0^1(I)$ solution de

$$(PV) \qquad \int_0^1 [p(x)u'v' + \lambda uv]dx = \int_0^1 fvdx, \quad \forall v \in V.$$

1) Montrer que le problème (PV) admet une solution et une seule dans V.
2) Montrer que la solution de (PV) appartient à $H^2(I)$.
3) Quel problème aux limites a-t-on résolu ?

Excercice 3. (Problème mêlé)
Résoudre par la méthode variationnelle le problème aux limites suivant.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert borné régulier, $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $f \in L^2(\Omega)$.

$$(P_4) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u + \lambda u = f, \\ \gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0, \quad \gamma_1(u)|_{\Gamma_1} = 0. \end{cases}$$

Excercice 4. (Problème de Robin)
Résoudre le problème variationnel suivant. $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$.

$$(P_5) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) \text{ on a :} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \alpha \int_\Gamma \gamma_0(u)\gamma_0(v)d\sigma = \int_\Omega f dx. \end{cases}$$

Quel problème aux limites doit résoudre u.