Université Badji Mokhtar-Annaba
Département de Mathématiques
Master I : système dynamique

Annéé 2019-2020
Semestre II

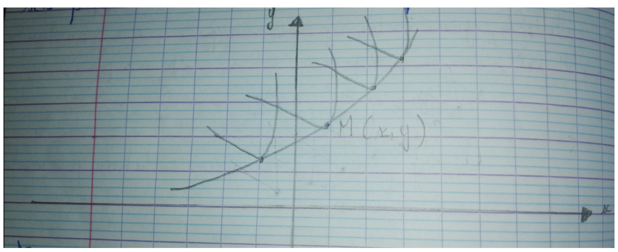
Enveloppe d'une famille de courbes

Soit l'équation de la forme :

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

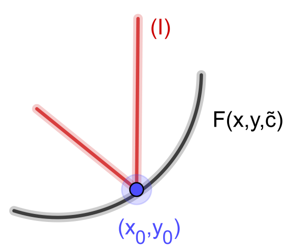
Où "c" est une paramètre, et l'équation (1) donne une famille de courbes.

Définition 1 *:*
On appelle enveloppe "L" d'une famille de courbes à un paramètre, une courbe tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille.



Équation de l'enveloppe :
Soit la famille de courbe $F(x, y, c) = 0$ paramétrais par "c". On suppose que cette famille possède une enveloppe. Comment trouver l'équation de l'enveloppe ?

-Soit (x_0, y_0) un point de l'enveloppe



Selon la définition de l'enveloppe, il existe 2 solutions de $F(x, y, c) = 0$ qui sont continues et qui passent par (x_0, y_0).
L'enveloppe nous donne $F(x, y, \tilde{c}) = 0 \Rightarrow \tilde{c}(x_0, y_0) = c_0$ mais $\tilde{c}(x, y) \neq$ constante, car c'est une courbe différentielle.
Donc l'équation $F(x, y, c) = 0$, n'a pas une solution unique,
car on a : $c = c_0$ et $c = c(x, y) \neq$ constante.
Donc d'après le théorème de la fonction implicite on a : $\frac{\partial}{\partial c} F(x_0, y_0, c_0) = 0$

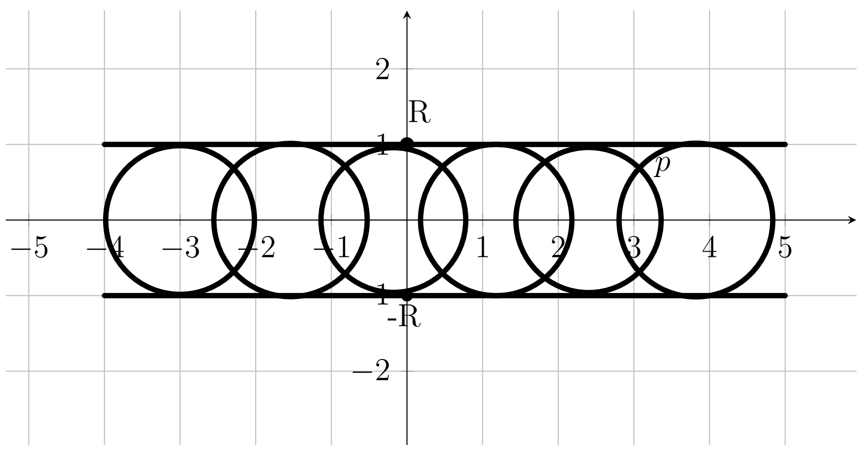
Car le théorème de la fonction implicite dit :
Si $F(x,y,c)=0$ $F(x_0,y_0,c_0)=0$,$\frac{\partial}{\partial c}F(x_0,y_0,c_0)\neq 0$
Alors, $\exists V(x_0,y_0),\exists! c(x,y) : V(x_0,y_0)\longmapsto U$ telle que $c(x_0,y_0)=c_0$

Conclusion :
Si l'enveloppe d'une famille de courbes $F(x,y,c)=0$ paramétrais par "c" existe, elle doit vérifie :

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c)=0 \end{cases}$$
$$c=w(x,y)\Rightarrow F(x,y,w(x,y))=0$$

exemple :
Soit l'équation :
$$y^2+(x-c)^2-R^2=0$$
On a : $F(x,y,c)=0$
Alors
$\frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c)=-2(x-c)=0\Rightarrow c=x$

Donc l'équation devient : $y^2-R^2=0\Rightarrow y=\pm R$



Trajectoires orthogonales

Soit l'équation de la famille de courbes :

$$\Phi(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

On dérive par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

On éliminant "c" de l'équation (1), on obtient une équation de la forme :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

avec $\frac{dy}{dx}$ est la ponte de la tangente au point (x, y) de courbe correspondante.

Comme la courbe orthogonale qui passe par le point (x, y) est orthogonale à la courbe.
sa pente vérifie : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(\frac{dy_t}{dx})}$

On met, cette expression dans (2), on obtient l'équation différentielle des courbes orthogonales :

$$F(x, y, \frac{-1}{(\frac{dy_t}{dx})}) = 0$$

exemple :
Chercher les trajectoires orthogonales à la famille des courbes : $y = cx$ ou bien $(y - cx = 0)$

On a : $\Phi(x, y, c) = y - cx = 0$

Alors, $\frac{dy}{dx} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{dy}{dx}$

donc l'équation devient :
$y - \frac{dy}{dx}x = 0$
$\Rightarrow y - (\frac{-1}{\frac{dy}{dx}})x = 0 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \int ydy = -\int xdx$
$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$
$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = K \quad K \geq 0$ (c'est une famille de cercles)