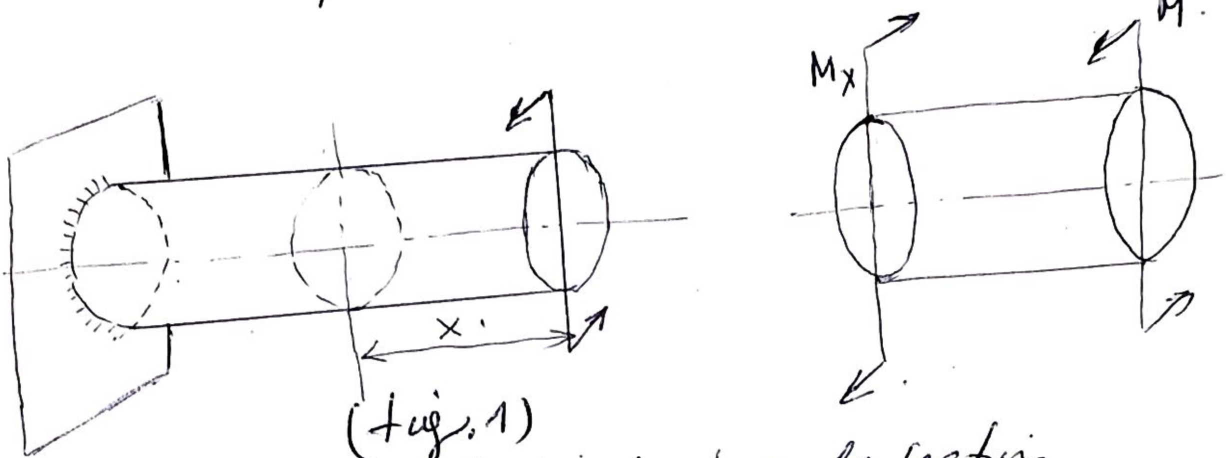
Chap V : TORSION.

La torsion est une charge telle que dans les sections droites de la barre seul apparaît un moment de torsion les autres facteurs sont nuls.



(fig. 1)

La valeur du moment de torsion dans la section transversale arbitraire de la barre est égale à la somme algébrique des moments extérieurs appliqués à la partie sectionnée.

$$M_t = \sum M.$$

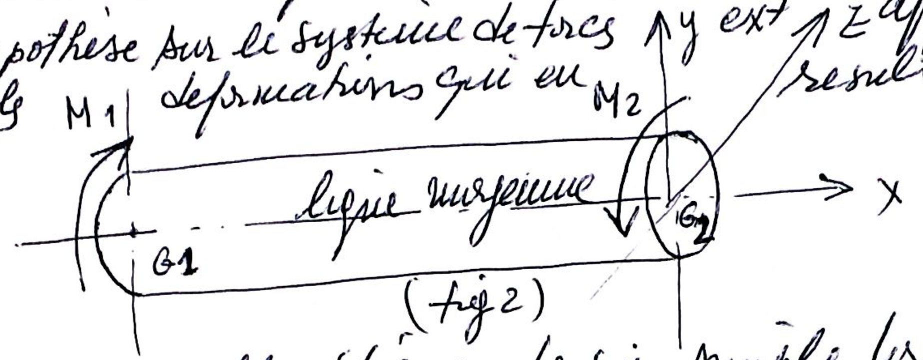
Pour le moment de torsion quelle soit la forme de la section on a adopté la règle des signes qui suit.

- Si un observateur regardant la section droite du côté de la normale extérieure voit le moment de torsion M_t dirigé dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on considère que le moment est positif. il est affecté d'un signe moins s'il est dirigé dans l'autre sens.

V-1. hypothèse particuliers.

- le solide étudier est une poutre cylindrique droite de section circulaire.
- le diamètre de la section st constant.
- le poids de la poutre st négligeable.

V-2. hypothèse sur le système de forces ext appliquées, et sur les déformations qui en résultent.



(fig 2)

la poutre st sollicitée en torsion simple lorsque st soumise à ses deux extrémités à deux couples M_1 et M_2 ayant pour support la ligne moyenne et tel que $M_1 + M_2 = 0$.

- les déformations seront toujours limitées au domaine élastique et la variation de fibres est considérée comme négligeable.

Considérons la barre à section circulaire chargée en ses bouts par deux moments (fig 2). Il apparait dans les sections droits de cette barre un moment de torsion constant :

$$M_t = M.$$

Découpons par deux plans normaux, un élément d'épaisseur dz et découpons dans cet élément par deux surfaces cylindriques de rayon ρ et $\rho + d\rho$. une bague élémentaire montrée (fig 3)

la base droite de cette bague tourne pendant la torsion de l'angle $d\varphi$.

la génératrice AB du cylindre tourne alors d'un angle γ et vient en AB'.
le segment BB' est égal, d'une part, à $\rho d\varphi$ et d'autre part, γdz. par conséquent, $\rho d\varphi = \gamma dz$

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

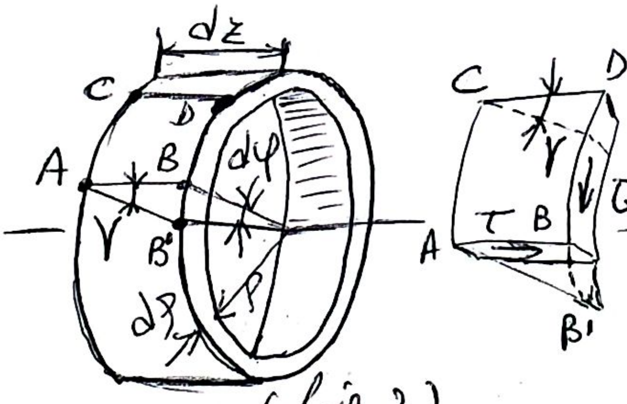
l'angle γ n'est autre que l'angle de glissement de la surface cylindrique. La quantité $\frac{d\varphi}{dz}$ est habituellement désignée par θ, $\frac{d\varphi}{dz} = \theta$ et on l'appelle angle relatif de torsion. C'est l'angle de la torsion réciproque de deux sections divisées par leur distance. la quantité θ est analogue à l'allongement relatif de la traction $\frac{\Delta l}{l}$.
introduisant la notation θ, on obtient:

$$\gamma = \rho\theta.$$

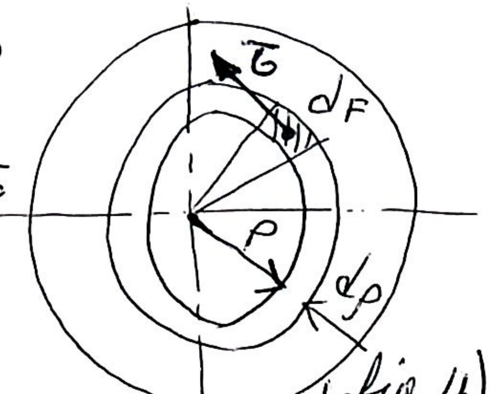
en vertu de la loi de Hooke pour le cisaillement

$$\tau = G\theta\rho.$$

τ représentant les contraintes tangentielles engendrées dans la section droite de la barre.



(fig 3)



(fig 4)

les forces élémentaires τdF (fig 4) créent un moment de torsion
$$M_t = \int_{(F)} \tau \rho \, dF$$

$$M_t = \int_F G\theta\rho \cdot \rho \, dF = G\theta \int_F \rho^2 dF$$

L'intégrale $\int_F \rho^2 dF$ représente une caractéristique purement géométrique et est appelée moment d'Inertie polaire de la section.

$$\int_F \rho^2 dF = I_0 \ (cm^4)$$

On obtient donc. $M_t = G\theta I_0$.

ou $\theta = \dfrac{M_t}{G I_0}$.

Détermination des contraintes et des déformations à la torsion d'une tige Ronde.

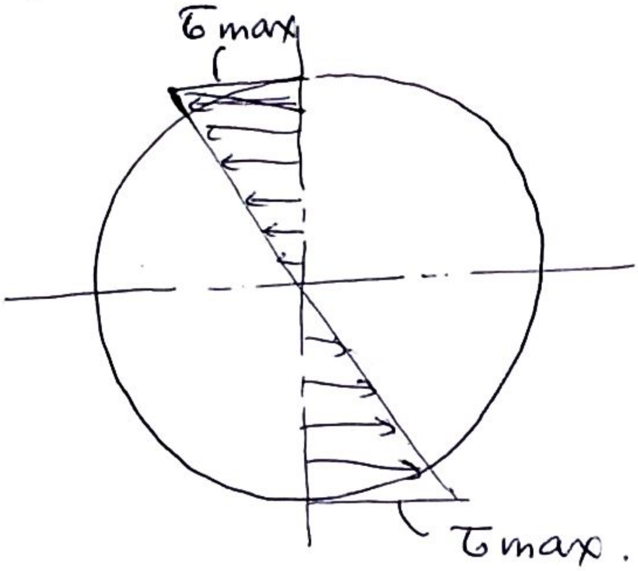
Le moment de torsion provoque dans la section transversale des contraintes tangentielles.

Pour une barre cylindrique de section circulaire la contrainte tangentielle en un point arbitraire de la section transversale à une distance du centre est déterminée par la formule

$$\tau = \frac{M_t \, \rho}{I_0}.$$

où $I_0 = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1\, d^4$ est le moment d'Inertie polaire de la section circulaire en torsion.

Les contraintes tangentielles sont maximales aux points les plus éloignés du centre de la barre (fig 5



Alors $\tau_{max} = \frac{M_t\, \rho_{max}}{I_0}$.

la quantité $\frac{I_0}{\rho_{max}} = W_p$ (cm^3) est appelée module de resistance polaire. Definitivement

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p} \quad (daN/cm^2).$$

L'angle de torsion dans une partie de longueur l où le diamètre de la barre et le moment de torsion sont constants est determiné d'après la formule :

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G\, I_0} \quad (\text{radian}).$$

$$\varphi = \frac{M_t\, l}{G\, I_0} \cdot \frac{180}{\pi} \quad (\text{en degré}).$$

le produit GI_0 est appelé rigidité de la section de la barre à la torsion.
G : le module d'elasticité transversale.
(pour Acier $G = 8.10^{10}\ N/m^2$)

Conditions de Resistance et de Rigidite à La torsion

le calcul de la resistance à la torsion des barres ronds et des arbres est effectué d'après les contraintes tangentielles maximales agissent dans la section la plus dangereuse d'après la formule.

$$\tau_{max} = \frac{Mt_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

$[\tau]$: contrainte admissible.

d'où le diamètre de l'arbre $D = \sqrt[3]{\frac{16\,Mt}{\pi\,[\tau]}}$

pour la section tubulaire. $D = \sqrt[3]{\frac{16\,Mt}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}}$.

où $\alpha = \frac{d}{D}$.

On l'exigence de la resistance on considère habituellement la condition de rigidité de telle façon, que l'angle de torsion de l'arbre à l'unité de la longueur ne dépasse pas la grandeur determinée.

$$\varphi = \frac{M_t \, l}{G I_0} \leq [\varphi] \quad \text{ou} \quad \frac{180}{\pi} \frac{M_t \cdot l}{G I_0} \leq [\varphi°]$$

on admet l'angle de torsion admissible ($\varphi°$) à la longueur de l'arbre de 0,3° jusqu'à 2°

Sur la pratique on utilise le moment de torsion comme :

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{30 \cdot P}{\pi n} \ (N.m) \qquad \omega = \frac{\pi n}{30}.$$

où : P = la puissance (en Watt).

ω (n) : est la vitesse angulaire ($\frac{rd}{s}$; tour/mn).