

## Équations différentielles non résolues par rapport $y'$

Soit l'équation :

$$F(x, y, y') = 0 \quad (*)$$

Posons  $y' = p \Rightarrow F(x, y, p) = 0$  ( $p$  devient un paramètre)

**cas n=1 :**

$$F(x, y') = 0, F(x, p) = 0$$

$$p_1 = f_1(x), p_2 = f_2(x), \dots \Rightarrow y_1 = \int f_1(x) dx, y_2 = \int f_2(x) dx, \dots \quad (1)$$

**Exemple :**

Soit l'équation :

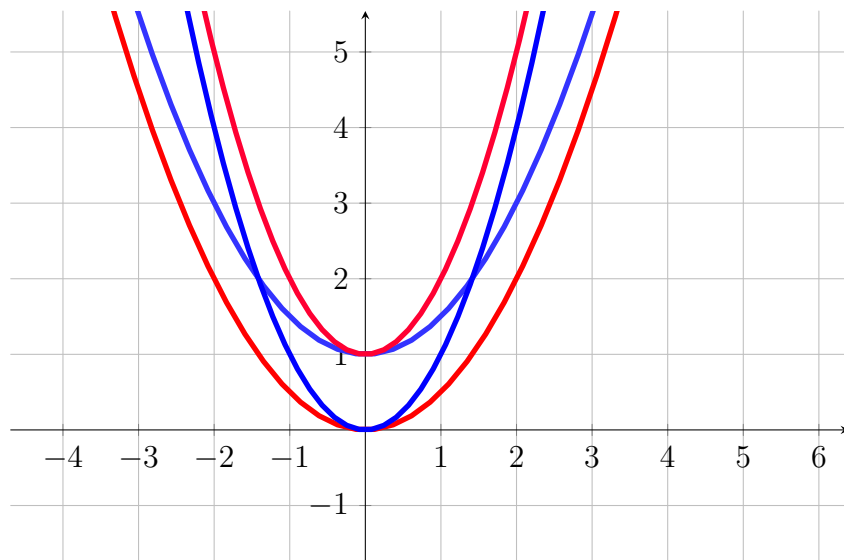
$$y'' - 3xy' + 2x^2 = 0$$

Posons  $y' = p$

$$\Rightarrow p^2 - 3xp + 2x^2 = 0 \Rightarrow (p - 2x)(p - x) = 0$$

$$\Rightarrow p_1 = 2x, p_2 = x$$

$$\text{et comme : } y' = p \Rightarrow y = \int p(x) dx \Rightarrow y_1 = x^2 + C_1 \quad y_2 = \frac{1}{2}x + C_2$$



On translate ces courbes

-Maintenant si  $F(x, p)$  est ré-solvable en  $x$  :

$$x_1 = \varphi_1(x), x_2 = \varphi_2(x), \dots \quad (2)$$

On cherche la solution  $\{x(p), y(p)\}$  sous forme paramétrique  
 $dy = y' dx = p dx = p \varphi'(p) dp \Rightarrow y = \int p \varphi'(p) dp + c$

$$\begin{cases} y = \int p \varphi'(p) dp + c \\ x = \varphi(p) \end{cases}$$

une famille des courbes.

**Exemple :**

Soit l'équation :

$$y' + e^{y'} - x = 0$$

On a :  $x = y' + e^{y'}$

On pose  $y' = p \Rightarrow x = p + e^p = \varphi(p)$

$$\Rightarrow y = \int p \varphi'(p) dp = \int p(1 + e^p) dp = \frac{p^2}{2} + pe^p - e^p + c$$

$$\text{d'où } \begin{cases} y = \frac{p^2}{2} + pe^p - e^p + c \\ x = p + e^p \end{cases}$$

**cas n=2 :**

1)  $F$  ne dépend pas de  $x$

Soit l'équation :

$$F(y, y') = 0 \Rightarrow F(y, p) = 0 \quad (y' = p)$$

$$p_k = f_k(y) \quad (\text{les racines de cette equation})$$

$$p_k = f_k(y) \Rightarrow \frac{dy_k}{dx} = f_k(y) \Rightarrow \int \frac{dy_k}{f_k(y)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy_k}{f_k(y)} = x + c$$

**Exemple 1 :**

Soit l'équation :

$$\sin(y' - y) = 0$$

$$\Rightarrow y' - y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y' = y + k\pi \Rightarrow \int \frac{dy}{y + k\pi} = \int dx \Rightarrow \log \left| \frac{y + k\pi}{c} \right| = x \Rightarrow y + k\pi = ce^x$$

$$\Rightarrow y = ce^x - k\pi$$

2)  $y = \varphi(p)$  on cherche les solutions sous forme paramétrique :

$$p = y' \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{1}{p} dy = \frac{\varphi'(p) dp}{p}$$

$$\text{d'où } x = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p} + c$$

On a la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + c \\ y = \varphi(p) \end{cases}$$

### Exemple 2 :

Soit l'équation :

$$y - y'^2 - y'^7 = 0$$

$$\text{On a : } y = y'^2 + y'^7$$

$$\text{On pose } y' = p \Rightarrow y = p^2 + p^7 = \varphi(p)$$

$$p = y' \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{1}{p} dy = \frac{\varphi'(p) dp}{p}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(p) dp}{p} + c = \int \frac{2p + 7p^6}{p} dp + c = \int (2 + 7p^5) dp + c = 2p + \frac{7}{6}p^6 + c$$

d'où :

$$\begin{cases} x = 2p + \frac{7}{6}p^6 + c \\ y = p^2 + p^7 \end{cases}$$

### cas générale :

$$F(x, y, p) = 0, p = y'$$

On considère  $\mathbb{R}^3(x, y, p)$ , l'équation  $F(x, y, p) = 0$  définit une surface qui est de dimension 2. Il existe une représentation paramétrique de cette surface :

$$\begin{cases} x = x(u, v) = \varphi(u, v) \\ y = y(u, v) = \psi(u, v) \\ p = p(u, v) = \chi(u, v) \end{cases}$$

$$\text{On a : } p = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = p dx$$

$$dy = \psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(\varphi'_u du + \varphi'_v dv)$$

$$\Rightarrow (\psi'_u - \chi\varphi'_u) du = (\chi\varphi'_v - \psi'_v) dv$$

$$\Rightarrow u = u(v, c) \quad (\text{solution})$$

On a la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \varphi(u(v, c), v) \\ y = \psi(u(v, c), v) \end{cases}$$

# Quelques cas particulières :

équation de Lagrange:

C'est une équation de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p)y + b(p)x + c(p) = 0 \\ y' = p \end{array} \right. \quad (1)$$

On pose que  $a(p) \neq 0$

Alors, on a :

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \quad \text{où } \varphi = -\frac{b}{a} \text{ et } \psi = -\frac{c}{a}$$

L'équation (1) est ré-solvable par rapport à  $y$

donc :

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(p) + \frac{dp}{dx}[\varphi'(p)x + \psi'(p)]$$

Alors,

$$p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}[\varphi'(p)x + \psi'(p)]$$

**- On a deux cas :**

1) Supposons que  $p_0$  est une racine de  $p - \varphi(p)$ , c-à-d  $p_0 - \varphi(p_0) = 0 \Rightarrow p(x) = p_0$  est une solution de (\*)  $\Rightarrow y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0)$  est une solution particulière.

2) Si  $p - \varphi(p) \neq 0$

On a :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)x}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \text{ c'est une équation linéaire non homogène par rapport à } x.$$

Soit  $x = w(p, c)$  la solution générale de cette équation, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(p) \cdot w(p, c) + \psi(p) \\ x = w(p, c) \end{array} \right.$$

C'est une solution générale de notre équation sous forme paramétrique.

**Exemple :**

Soit l'équation :

$$y = 2y'x - y'^2$$

On pose  $y' = p \Rightarrow y = px - p^2$

C'est une équation de Lagrange avec :  $\varphi(p) = 2p, \psi(p) = -p^2$

On a donc :

$$y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0) \quad \text{où } p_0 - \varphi(p_0) = 0$$

$$p_0 - 2p_0 = 0 \Rightarrow p_0 = 0$$

$\Rightarrow y = 0$  est une solution particulière

et on a :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)x}{p-\varphi(p)} + \frac{\psi'}{p-\varphi(p)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{-p}x + \frac{2p}{p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + 2$$

La solution générale est :

$$x = \frac{c}{p^2} + \frac{2}{3}p$$

d'où la solution générale sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{c}{p^2} + \frac{2}{3}p \\ y = \frac{1}{3}p^3 + \frac{2}{p^2}c \end{cases}$$

### équation de Lagrange:

On obtient à partir de l'équation de Lagrange quand  $\varphi(p) = p$

$$\begin{cases} y = px + \psi(p) \end{cases}$$

$$\text{Alors, on a : } p = y' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow p = p + \frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] \Rightarrow \frac{dp}{dx}[x + \psi'] = 0$$

#### On a deux cas :

1) Si  $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p(x) = c(\text{constante}) \Rightarrow y = cx + \psi(c)$

Cette solution générale forme une famille de droites.

2) Si  $\frac{dp}{dx} \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq c \Rightarrow x + \psi'(p) = 0 \Rightarrow x = -\psi'(p)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$$

On a la représentation paramétrique de la courbe, si  $x = -\psi'(p)$ , on tire  $p = w(x)$ , on a la solution

$y = x \cdot w(x) + \psi(w(x))$ , avec  $y$  est une fonction de  $x$

#### Exemple :

Soit l'équation :

$$xy' + y'^2 - y = 0$$

On pose  $y' = p \Rightarrow y = px + p^2$

on a :  $\psi(p) = p^2$

- on a la famille de solutions, les droites :  $y = cx + \psi(c)$

c-à-d la solution générale :  $y = cx + c^2$  où  $c$  = constante.

-On cherche une solution particulière :

$$x + \psi'(p) = 0 \Rightarrow x + 2p = 0 \Rightarrow x = -2p \Rightarrow p = -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$  (comme solution particulière).

