

Dynamique des structures

Support de cours 2 : Proposé par

Enseignant: Sassi Gouasmi

Département Génie Mécanique

Université Badji Mokhtar-Annaba

**Systèmes soumis à une force
harmonique**

Partie 1-Systèmes non-amortis soumis à une force d'excitation sinusoïdale

- Equation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

- Solution de l'équation homogène :

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

- La solution particulière est de la forme :

$$x_p = X \cos \omega t$$

- En substituant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

- La solution complète de notre équation est donc :

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

- Avec les conditions initiales habituelles, nous avons :

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \quad , \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

- La solution complète peut se réécrire :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t$$

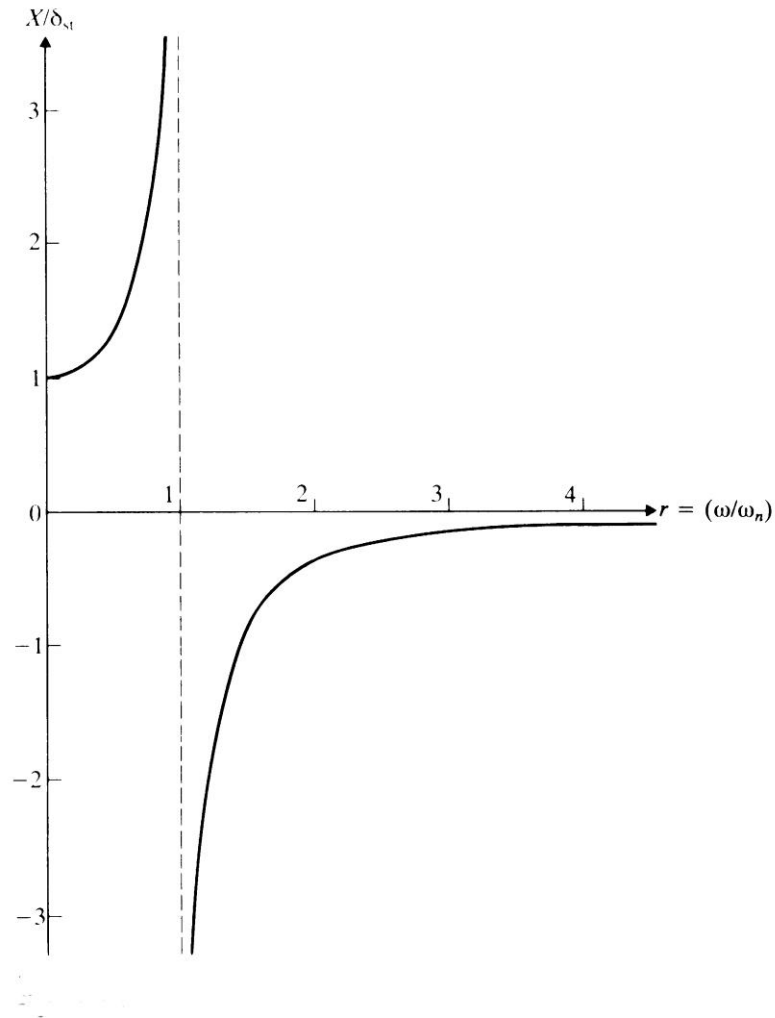
- L'amplitude X de la solution particulière peut s'exprimer de la manière suivante :

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \Rightarrow \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - r^2}$$

où $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, et $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$ est la déflexion statique de la masse m sous la force F_0 .

X/δ_{st} s'appelle le facteur d'amplification car il est le rapport des amplitudes dynamiques et statiques du mouvement.

- Le rapport des amplitudes montre qu'il y'a trois type de réponses.

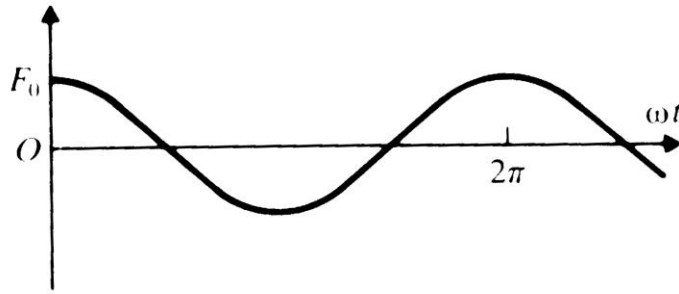


$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - r^2}$$

Le facteur d'amplification dans un système non-amorti soumis à une force sinusoïdale qui montre trois types de réponses.

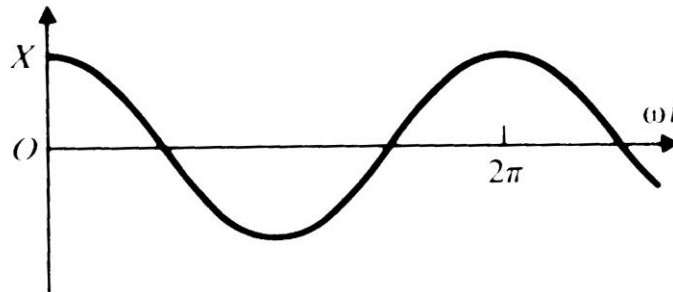
Cas n°1 : $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$, le dénominateur du rapport est positif et la réponse $x_p(t)$ du système est en phase avec la force extérieure appliquée.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$



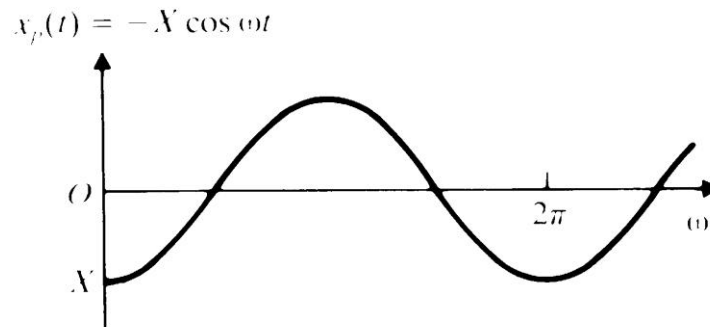
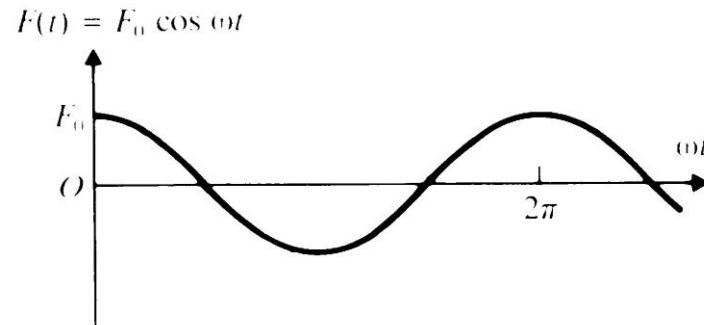
$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - r^2}$$

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$



$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$$

Cas n°2 : $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$, le dénominateur du facteur d'amplification est négatif $x_p(t)$ et $F(t)$ ont des signes opposés, la réponse du système a un déphasage de 180° avec la force extérieure, de plus lorsque $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow \infty$, $X \rightarrow 0$. La réponse d'un système soumis à une force de très haute fréquence est donc nulle.



Cas n°3 : $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, l'amplitude est infinie, cette condition est appelée résonance.

En supposant $\omega_n - \omega = 2\varepsilon$ et $\omega_n + \omega = 2\omega$

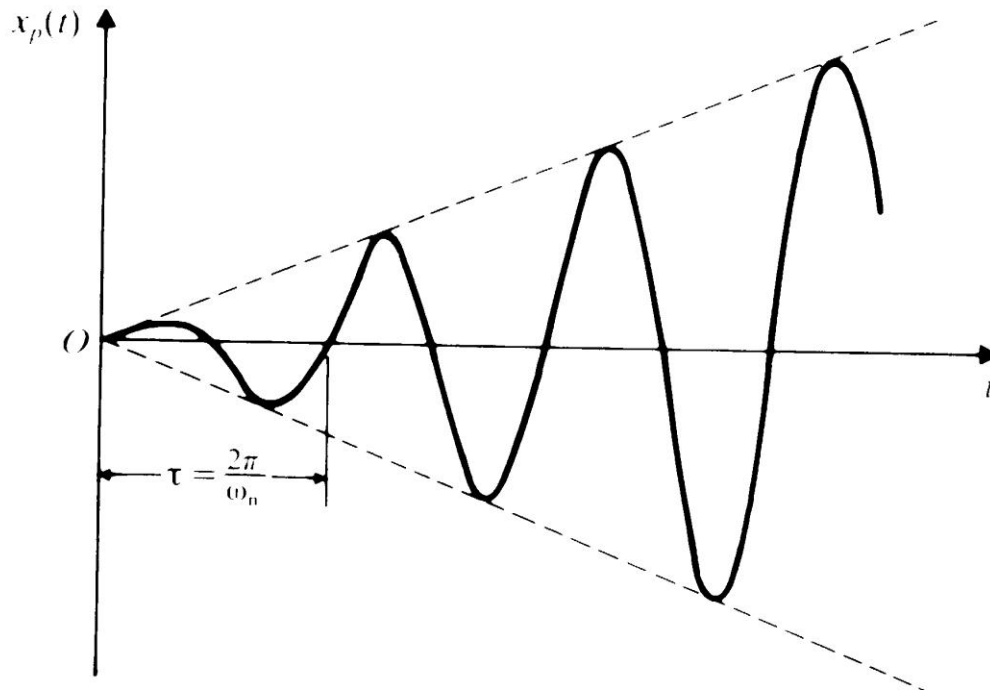
$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \\
 &= x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_n^2 - \omega^2} \left[2 \sin \frac{\omega_n + \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t \right] \\
 &= x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(\frac{\frac{F_0}{m}}{2\varepsilon\omega} \sin \varepsilon t \right) \sin \omega t
 \end{aligned}$$

en utilisant $\omega \approx \omega_n$ et $\sin \varepsilon t \approx \varepsilon t$, on trouve

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

Cas n°3 (suite) :
$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st} \omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

Le 3^{ème} terme de la réponse $x(t)$ croît indéfiniment et linéairement avec le temps



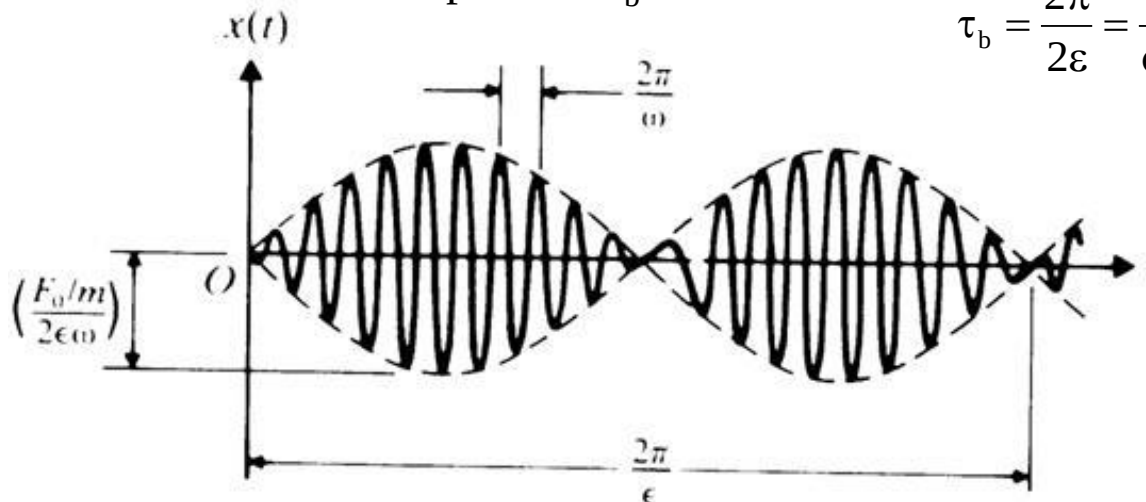
Réponse d'un système non-amorti soumis à une force sinusoïdale à la résonance

- Supposons pour simplifier notre discussion que $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, la réponse se réduit à

$$x(t) = \left(\frac{F_0}{m} \frac{\sin \varepsilon t}{2\varepsilon\omega} \right) \sin \omega t$$

- Puisque ε est petit, $\sin \varepsilon t$ varie lentement avec le temps, sa période $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ est grande.
- La courbe $\sin \omega t$ effectuera plusieurs cycles pendant que celle correspondant à $\sin(\varepsilon t)$ en effectue un seul ; l'amplitude augmentera et s'étendra de manière continue, des battements ont donc lieu avec une période τ_b .

$$\tau_b = \frac{2\pi}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} = \frac{2\pi}{\omega_b}$$



Récapitulatif

En général, l'équation du mouvement peut aussi s'écrire :

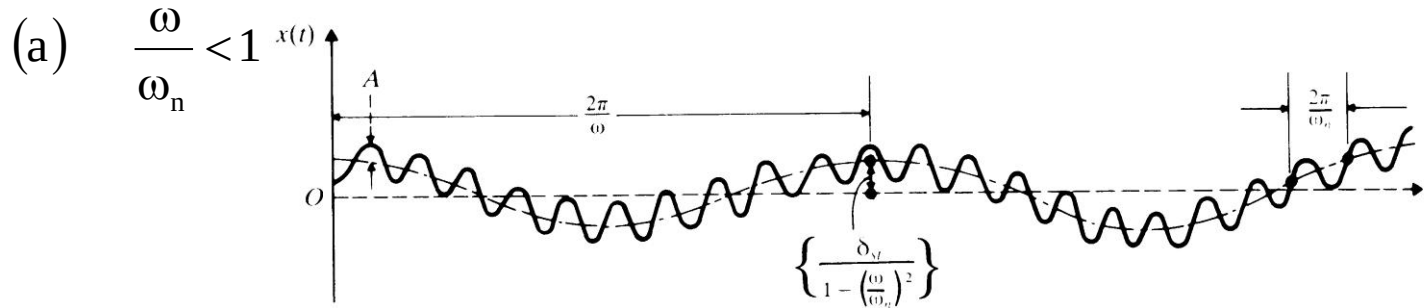
$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t, \quad \text{pour } \frac{\omega}{\omega_n} < 1$$

et

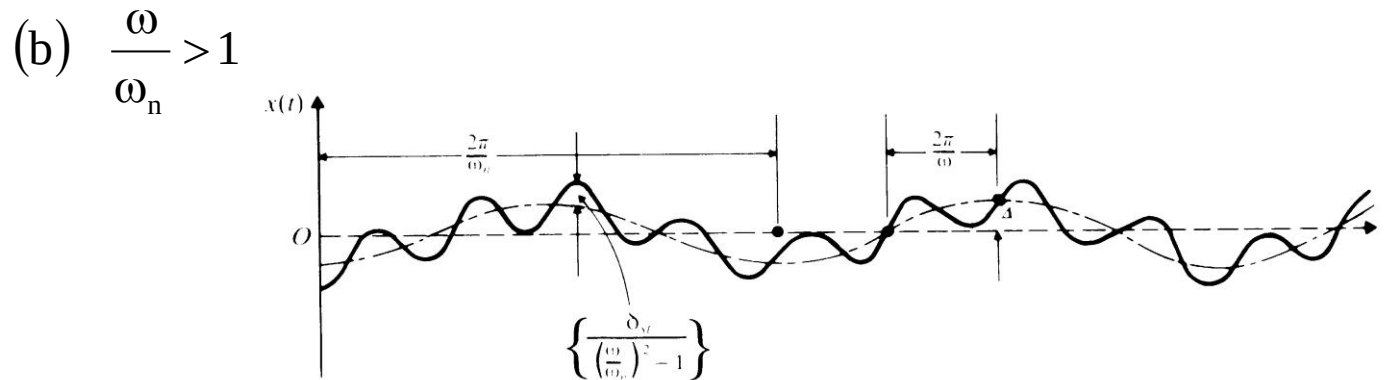
$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \cos \omega t, \quad \text{pour } \frac{\omega}{\omega_n} > 1$$

Ainsi le mouvement peut être présenté comme la somme de deux courbes en cosinus.

Mouvement d'un système non-amorti soumis à une force sinusoïdale lorsque :



(a) $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$



(b) $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$

Application:

Soit un système masse-ressort avec $k=4000\text{N/m}$ et $m=10\text{ kg}$, la masse subit une force $F(t)=400 \cos(30t)\text{N}$. Trouver la réponse totale du système avec les conditions initiales suivantes :

a- $x_0 = 0,1\text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0$ **b-** $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 10\text{ m/s}$

Solution : $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\text{ rad/s} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1,5 > 1$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{x_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2} \right) \cos \omega t$$

a- $x_0 = 0,1\text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0,18 \cos 20t - 0,08 \cos 30t$

b- $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 10\text{ m/s} \Rightarrow x(t) = 0,08 \cos 20t + 0,5 \sin 20t - 0,08 \cos 30t$