

Équations différentielles linéaires non homogènes

Elle est de la forme :

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \quad (*)$$

L'équation homogène associée est :

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (**)$$

Proposition 1 :

L'ensemble des solutions de () est donné par :*

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n C_i y_i$$

Où $C_1, \dots, C_n$ sont des constantes, y_0 est une solution particulière de () et $\{y_1, \dots, y_n\}$ est un système fondamental de (**).*

preuve 1 :

on sait que y vérifie () et y_0 vérifie (*), d'où $y - y_0$ vérifie (**)*

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y - y_0^n - p_1(x)y_0^{n-1} - \dots - p_{n-1}(x)y_0' - p_n(x)y_0 = 0$$

$$\Rightarrow (y - y_0)^n + p_1(x)(y - y_0)^{n-1} + \dots + p_n(x)(y - y_0) = 0$$

*Alors $y - y_0$ est une solution de (**) donc elle s'écrit :*

$$y - y_0 = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \Rightarrow y = y_0 + \sum_{i=1}^n C_i y_i.$$

- Si nous avons un système fondamental de solutions de (**) nous pouvons obtenir une solution particulière de (**) par la méthode de la variation des constantes (Lagrange).

Méthodes de la variations des constantes :

Soit $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ un système fondamental de solution de (**), la solution générale de (**) s'écrit sous la forme :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad ; C_i \text{ Constantes}$$

Considérons ces constantes comme fonctions de x et déterminant celles-ci pour que :

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x) \text{ soit solution de } (*).$$

Proposition 2 :

Si $C_1(x), \dots, C_n(x)$ satisfont le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) + \dots + y_n(x)C_n'(x) = 0 \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) + \dots + y_n'(x)C_n'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{n-2}(x)C_1'(x) + y_2^{n-2}(x)C_2'(x) + \dots + y_n^{n-2}(x)C_n'(x) = 0 \\ y_1^{n-1}(x)C_1'(x) + y_2^{n-1}(x)C_2'(x) + \dots + y_n^{n-1}(x)C_n'(x) = q(x) \end{array} \right.$$

Alors : $C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ satisfait à (*)

preuve 2 :

S'il existe $C_1(x), \dots, C_n(x)$ qui satisfont (*), on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x) \\ y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y^{n-1}(x) = C_1(x)y_1^{n-1}(x) + \dots + C_n(x)y_n^{n-1}(x) \\ y^n(x) = C_1(x)y_1^n(x) + \dots + C_n(x)y_n^n(x) + q(x) \end{array} \right.$$

On fait la somme de ces equations on trouve : $y(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$ qui est la solution de (*)

cas n=1 :

$$y' + P_1(x)y = q(x) \quad (*)$$

$$y' + P_1(x)y = 0 \quad (**)$$

La solution générale de (**) est :

$$y(x) = C_1 y_1(x)$$

Considérant C_1 comme fonction de x , Où le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)y_1(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) = q(x) \end{array} \right.$$

cas n=2 :

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = q(x) \quad (*)$$

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (**)$$

Soit $\{y_1(x), y_2(x)\}$ un système fondamental de solution de (**).

On cherche la solution de (*) sous la forme :

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

On suppose que $C'_1(x)$ et $C'_2(x)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0 \\ C'_1(x)y_1'(x) + C'_2(x)y_2'(x) = q(x) \end{cases}$$

On résout ce système par Règle de Cramer :

$$C'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ q(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$$

$$C'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_2'(x) & q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}$$

$$C'_1(x) = \frac{-q(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2' - y_2(x)y_1'}$$

$$C'_2(x) = \frac{q(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2' - y_2(x)y_1'}$$

Exemple (équation d'euler) :

Résoudre :

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) = \frac{1}{x} \quad ; x \in \mathbb{R}^* \quad (*)$$

L'équation homogène associée de (*) est :

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) = 0 \quad (**)$$

$$\text{On pose : } y(x) = x^k \Rightarrow y'(x) = kx^{k-1}, y''(x) = k(k-1)x^{k-2}$$

substitué dans (**) on trouve :

$$k(k-1)x^{k-2} + \frac{1}{x}kx^{k-1} - \frac{1}{x^2}x^k = 0 \Rightarrow x^{k-2}(k(k-1) + k - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ donc } k(k-1) + k - 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = -1$$

Alors, le système fondamental de (**) est : $\{y_1(x), y_2(x)\} = \{x, \frac{1}{x}\}$

On cherche la solution de (*) sous la forme : $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1(x)x + C_2(x)\frac{1}{x}$
 Où $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)\frac{1}{x} = 0 \\ C_1'(x)1 + C_2'(x)\frac{-1}{x^2} = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{2}{x} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{x} \Rightarrow C_1(x) = \log(x) + K_1$$

$$\Rightarrow C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -x \Rightarrow C_2(x) = -\frac{x^2}{2} + K_2$$

Alors, la solution est :

$$y(x) = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \frac{1}{x} + x \cdot \log(x) + \frac{-x^2}{2}$$

Systèmes d'équations différentielles linéaires non homogènes

Méthodes de la variations des constantes :

Soit le système linéaire non homogène :

$$\left\{ \frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + b(x) \right. \quad (1)$$

Le système homogène associe est :

$$\left\{ \frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y \right. \quad (2)$$

Soit $\{\vec{Y}_1(x), \dots, \vec{Y}_n(x)\}$ un système fondamental de (2). Chaque solution de (2) s'écrit :

$$\vec{Y}(x) = C_1 \vec{Y}_1(x) + \dots + C_n \vec{Y}_n(x)$$

Si $\vec{Y}(x)$ est une solution particulière de (1), la solution générale de (1) est :

$$\vec{Y}_g(x) = C_1 \vec{Y}_1(x) + \dots + C_n \vec{Y}_n(x) + \vec{Y}(x)$$

Soit la matrice $\Omega = (\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n)$, on a :

$$\frac{d\Omega}{dx} = \left(\frac{\vec{Y}_1}{x}, \dots, \frac{\vec{Y}_n}{x} \right) = (A(x) \cdot \vec{Y}_1, \dots, A(x) \cdot \vec{Y}_n) = A(x) \cdot (\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n)$$

Donc on a :

$$\left\{ \frac{d\Omega}{dx} = A(x) \cdot \Omega \right. \quad (3)$$

On cherche la solution particulière sous la forme :

$$\vec{Y}(x) = C_1(x) \vec{Y}_1(x) + \dots + C_n(x) \vec{Y}_n(x)$$

$$\left(\vec{Y}_1(x), \dots, \vec{Y}_n(x) \right) \cdot \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{pmatrix}$$

Alors, on a :

$$\left\{ \vec{Y}(x) = \Omega(x) \cdot \vec{C}(x) \right. \quad (4)$$

On cherche la solution sous cette forme donc on substituons (4) dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dx} \cdot \vec{C}(x) + \Omega \cdot \frac{d\vec{C}}{dx} &= A(x) \cdot \Omega \cdot \vec{C}(x) + \vec{b}(x) \\ \Rightarrow A(x) \cdot \Omega \cdot \vec{C}(x) + \Omega \cdot \frac{d\vec{C}}{dx} &= A(x) \cdot \Omega \cdot \vec{C}(x) + \vec{b}(x) \\ \Rightarrow \Omega \cdot \frac{d\vec{C}}{dx} &= \vec{b}(x)\end{aligned}$$

Où déterminant de $\Omega \neq 0$, donc $\Omega^{-1}(x)$ existe (Ω inversible).

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d\vec{C}}{dx} &= \Omega^{-1}(x) \cdot \vec{b}(x) \\ \Rightarrow \vec{C}(x) &= \int_{x_0}^x \Omega^{-1}(\tau) \vec{b}(\tau) d\tau + \vec{C}(x_0)\end{aligned}$$

D'où la solution est :

$$\vec{Y}(x) = \Omega(x) \int_{x_0}^x \Omega^{-1}(\tau) \vec{b}(\tau) d\tau + \Omega(x) \vec{C}(x_0)$$

telle que : $\vec{Y}(x_0) = \Omega(x_0) \cdot \vec{C} = C_0$

$$\Rightarrow \vec{Y}(x) = \Omega(x) \vec{C} + \Omega(x) \int_{x_0}^x \Omega^{-1}(\tau) \vec{b}(\tau) d\tau$$

est la solution qui vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Y}}{dx} = A(x) \cdot \vec{Y} + \vec{b}(x) \\ \vec{Y}(x_0) = \Omega(x_0) \cdot \vec{C} = C_0 \end{cases} \quad (*)$$

Exemple 1 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + e^{3t} \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y + t^2 e^{3t} \end{cases}$$

$$\text{Où : } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ t^2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Le système homogène est :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$$

le système fondamental est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} + t e^{3t} \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{La solution de système homogène})$$

$$\text{donc } \Omega(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \quad ; \quad \Omega(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de $\Omega(t)$:

$$\Omega^{-1}(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \cdot \int_0^t e^{-3\tau} \begin{pmatrix} 1+\tau & -\tau \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3\tau} \\ \tau^2 e^{3\tau} \end{pmatrix} d\tau$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t (1+\tau - \tau^3) d\tau \\ \int_0^t (\tau^2 - 1) d\tau \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} \\ -t + \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{avec : } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Alors, la solution est :

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} \left(1 + 3t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} \right) \\ y(t) = e^{3t} \left(3 + 2t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12} \right) \end{cases}$$

Exemple 2 :

Soit $A(t)$ une matrice $(n * n)$ continue sur $]a, b[$.

Un ensemble $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ de (n) solution de système :

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t) \vec{y} \quad ; \text{sur }]a, b[$$

est un système fondamental si et seulement si, il est linéairement indépendant sur $]a, b[$.

-Montrer que les fonctions :

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}; \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes sur tout l'intervalle $]a, b[$.

Solution :

On va montrer que :

$$C_1 \vec{y}_1 + C_2 \vec{y}_2 + C_3 \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

On pose : $A(t) = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$

$$\text{Alors, on a : } \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit que le déterminant de $A(t) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2e^{4t} \neq 0; \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{la solution est unique.}$$

Formule de Liouville :

Soit le système linéaire :

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \right. \quad (1)$$

Où $A(t)$ est une matrice $(n \times n)$, continue.

cas n=2 :

Soient $x^1(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ x_2^1(t) \end{pmatrix}$ et $x^2(t) = \begin{pmatrix} x_1^2(t) \\ x_2^2(t) \end{pmatrix}$, deux solutions linéairement indépendantes du système (1).

Soit le déterminant : $J(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{dJ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^1(t)}{dt} & \frac{dx_1^2(t)}{dt} \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) \\ \frac{dx_2^1(t)}{dt} & \frac{dx_2^2(t)}{dt} \end{vmatrix} = J_1(t) + J_2(t)$$

On a :

$$J_1(t) = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^1(t)}{dt} & \frac{dx_1^2(t)}{dt} \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}(t)x_1^1 + a_{12}(t)x_2^1 & a_{11}(t)x_1^2 + a_{12}(t)x_2^2 \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix}$$

Je multiplie la (2ème) ligne par a_{12} et je retranche de la première, j'obtiens :

$$J_1(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t)x_1^1 & a_{11}(t)x_1^2 \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)J(t)$$

La même chose pour : $J_2(t) = a_{22}J(t)$.

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dt} = (a_{11}(t) + a_{22}) \cdot J(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dt} = \text{trace}(A(t)) \cdot J(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t \frac{dJ(t)}{J(t)} = \int_{t_0}^t \text{trace}(A(\psi)) d\psi$$

$$\Rightarrow \log \left| \frac{J(t)}{J(t_0)} \right| = \int_{t_0}^t \text{trace}(A(\psi)) d\psi$$

$$\Rightarrow J(t) = J(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(\psi)) d\psi}$$

Système linéaires à coefficients périodiques :

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x(t) \\ A(t+T) = A(t) \end{cases} \quad (1)$$

$A(t)$ est une matrice telle que : $a_{ij}(t+T) = a_{ij}(t) \quad ; 1 \leq i ; j \leq n ; T = 2\pi$

En générale les solutions de (1) ne sont pas périodiques.

Exemple (cas $n = 1$) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1 + \sin(t)) \cdot x(t) \\ T = 2\pi \end{cases}$$

La solution générale est :

$$x(t) = C \cdot e^{t - \cos(t)} ; C = \text{constante}$$

On déduire que $x(t)$ n'est pas 2π -périodique.

proposition :

Soit $x(t)$ une matrice fondamentale de (1), alors $x(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale et il existe une matrice B inversible telle que :

$$x(t+T) = x(t) \cdot B ; \text{ pour } \forall t \in \mathbb{R} ; \text{ avec } \det(B) = e^{\int_0^T \text{trace}(A(s)) ds}$$

preuve :

puisque $x(t)$ une matrice fondamentale on a : $\frac{dx}{dt}(t) = A(t) \cdot x(t)$

posons $x(t) = x(t+T)$ alors

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t+T) = A(t+T) \cdot x(t+T) = A(t) \cdot x(t)$$

$\Rightarrow x(t)$ et $x(t+T)$ sont des matrice fondamentales.

Maintenant posons $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, on a aussi $x(t+T) = (x^1(t+T), \dots, x^n(t+T))$

$$\begin{cases} x^1(t+T) = b_{11}x^1(t) + \dots + b_{n1}x^n(t) \\ \dots \\ x^n(t+T) = b_{1n}x^1(t) + \dots + b_{nn}x^n(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t+T) = \begin{pmatrix} x^1(t) & \dots & x^n(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = x(t) \cdot B$$

posons $W(t) = \det(x(t))$

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(s))ds}$$

$$\Rightarrow W(t+T) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t+T} \text{trace}(A(s))ds} = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{trace}(A(s))ds + \int_t^{t+T} \text{trace}(A(s))ds}$$

$$\Rightarrow W(t+T) = W(t) \cdot e^{\int_t^{t+T} \text{trace}(A(s))ds}$$

On sait que :

$$x(t+T) = x(t) \cdot B \Rightarrow \det(x(t+T)) = \det(x(t)) \cdot \det(B)$$

$$\Rightarrow \det(B) = e^{\int_t^{t+T} \text{trace}(A(s))ds} \quad (\text{On peut montrer cette égalité par le lemme suivant}).$$

Lemme :

$$\text{Si } f(t+T) = f(t) \text{ alors } \int_t^{t+T} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds$$

Preuve :

$$\text{Posons : } I(t) = \int_t^{t+T} f(s)ds$$

$$\text{Alors : } I'(t) = f(t+T) - f(t) = 0$$

$$I'(t) = 0 \Rightarrow I(t) = \text{cte} \Rightarrow I(t) = I(0) = \int_0^T f(s)ds$$