Module : Analyse fonctionnelle appliquée Avril 2019
Master 1 de Mathématiques Appliquées

Série 3

Excercice 1.
Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, On pose :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n) & si \quad x_n > 0 \\ u(x', -x_n) & si \quad x_n < 0 \end{cases}$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$. Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|\tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{2}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$.

Excercice 2.
On considère la suite de fonctions $v_n(x) = \exp(-nx)$ pour $x \geq 0$. Etudier sa convergence dans $L^2(\mathbb{R}^*_+)$ et en déduire que l'on ne peut pas définir une application trace

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : D(\mathbb{R}_+) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & \gamma_0(u) = u(0) \end{array}$$

linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^+)$. (notation : $\mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$)

Excercice 3. (Changemnt de variable dans H^1)
Soient $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière C^1 par morceaux et F un C^1- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $\Omega = F(\hat{\Omega})$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est aussi de classe C^1 par morceaux.
b) Montrer que l'opérateur de composition :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^1(\hat{\Omega}) \\ v & \longrightarrow & v \circ F \end{array}$$

est bien défini, linéaire et continu. En déduire qu'il défini un isomorphiosme de $H^1(\Omega)$ sur $H^1(\hat{\Omega})$.

Excercice 4. Soit $u \in D(\bar{\Omega})$ telle que $u|_{\partial\Omega} = 0$. Montrer qu'il existe une suite $u_p \in D(\Omega)$ telle que $u_p \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

Excercice 5. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ (ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$) et $u \in H^1_0(\Omega)$. On pose :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Excercice 6. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $Ker(\gamma_0) = H^1_0(\Omega)$.