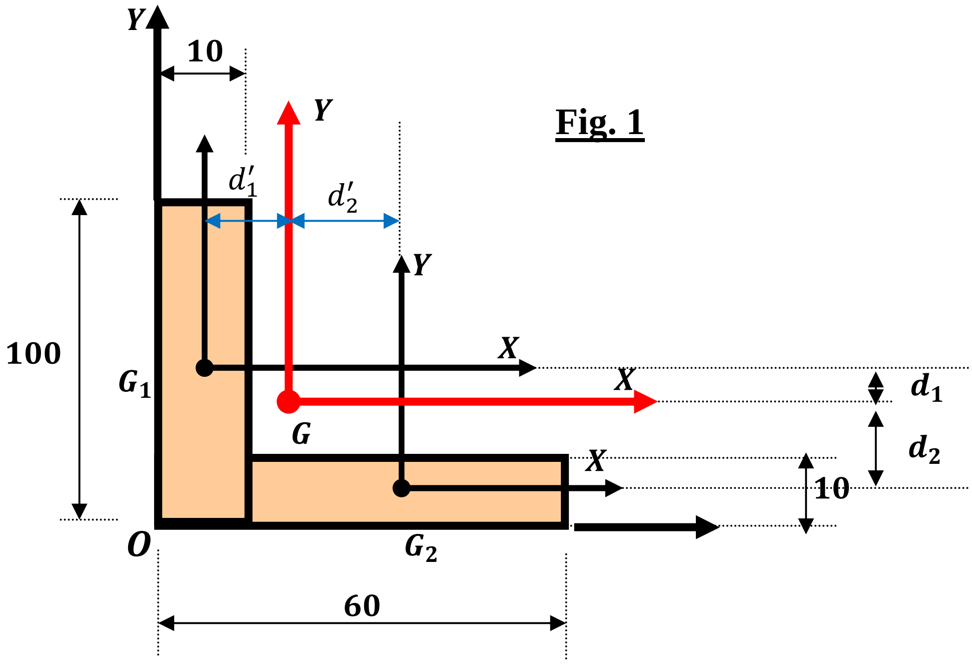
SOLUTION

Exercice N° 1 :

1) Déterminer la position du centre de gravité de la figure suivante:

Les unités données sont en (cm).



a) On partage la figure en forme de L en deux sections rectangulaires S_1 et S_2 de centre de gravitée G_1 et G_2.

Tableau 1.

b_1	h_1	X_{G1}	Y_{G1}	S_1	b_2	h_2	X_{G2}	Y_{G2}	S_2	X_G	Y_G
10	100	5	50	1000	50	10	35	5	500	15	35

b) Le centre de gravité est déterminé par la relation suivante:

$$X_G = \frac{\sum S_{yi}}{\sum S_{Tot}} = \frac{X_{G1}S_1 + X_{G2}S_2}{S_1 + S_2} = 15\ cm$$

$$Y_G = \frac{\sum S_{xi}}{\sum S_{Tot}} = \frac{Y_{G1}S_1 + Y_{G2}S_{21}}{S_1 + S_2} = 35\ cm$$

2) Déterminer les moments d'inerties centraux I_{GX} , I_{GY} et I_{Gz}.

a) Déterminant le moment d'inertie des surfaces S_1 et S_2 par rapport aux axe passant par leurs centres de gravités G_1 et G_2.

$$I_{1G1X} = \frac{b_1h_1^3}{12} \qquad I_{1G1Y} = \frac{h_1b_1^3}{12}$$

$$I_{2G2X} = \frac{b_2h_2^3}{12} \qquad I_{2G2Y} = \frac{h_2b_2^3}{12}$$

Les résultats des moments d'inerties de ces surfaces sont représentés au tableau ci-dessous.

$I_{1G1X}\ (cm^4)$	$I_{1G1Y}\ (cm^4)$	$\boldsymbol{I_{2G2X}\ (cm^4)}$	$I_{2G2Y}\ (cm^4)$
833333,33	8333,33	4166,67	104166,67

b) calcul les distances entre les axes:

$$d_1 = Y_{G1} - Y_G \qquad d_1' = X_{G1} - X_G$$

$$d_2 = Y_{G2} - Y_G \qquad d_2' = X_{G2} - X_G$$

$d_1(cm)$	$d_1'(cm)$	$d_2(cm)$	$d_2'(cm)$
15	-10	-30	20

c) Calcul des moments d'inerties par rapport aux axes G_X et G_Y:

$$I_{1GX} = I_{1G1X} + d_1^2 S_1 \qquad I_{1GY} = I_{1G1Y} + d_1'^2 S_1$$

$$I_{2GX} = I_{2G2X} + d_2^2 S_2 \qquad I_{2GY} = I_{2G2Y} + d_2'^2 S_2$$

$I_{1GX}\ (cm^4)$	$I_{2GX}\ (cm^4)$	$I_{1GY}(cm^4)$	$I_{2GY}(cm^4)$
1058333,33	454166,66	108333,33	304166,66

d) Déterminant les moments d'inerties de la section par rapport aux axes GX ; GY et GZ en utilisant les relations suivantes:

$$I_{GX} = I_{1GX} + I_{1GX} \qquad I_{GY} = I_{1GY} + I_{1GY} \qquad I_{GZ} = I_{GX} + I_{GX}$$

Les résultats sont présentés au tableau ci-dessous:

$I_{GX}(cm^4)$	$I_{GY}(cm^4)$	$I_{GZ}(cm^4)$
1512500	**412500**	**1925000**

Exercice N° 2:

1) Déterminer la position du centre de gravité de la figure suivante:

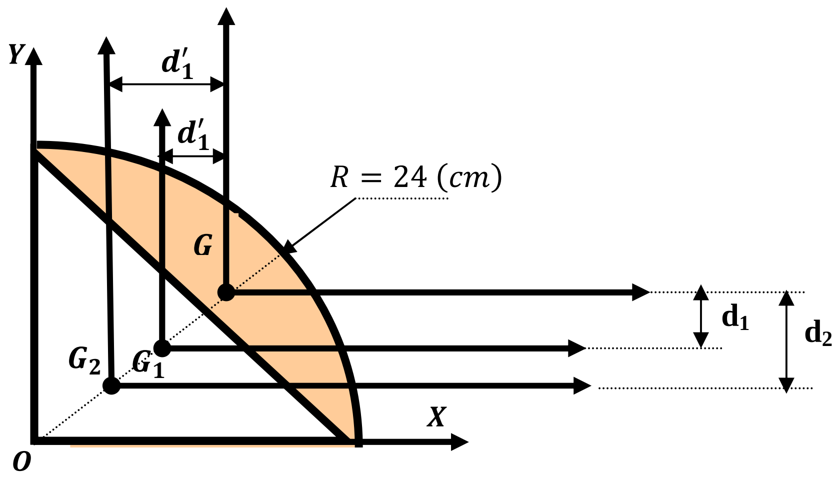


Fig. 3

Pour déterminer le centre de gravité d'une portion d'arc telle que montrer sur la figure, on partage cette figure en deux sections, l'une est un quart de cercle S_1 et l'autre un triangle S_2 de centre de gravitées G_1 et G_2 respectivement, dont les coordonnées sont représentées au tableau 1:

Tableau I

SECTION D'UN ¼ DE CERCLE				
R	C	X_{G1}	Y_{G1}	S_1
24	10,18592	10,18592	10,18592	452,3893
SECTION D'UN TRIANGLE RECTANGLE				
b	h	X_{G2}	Y_{G2}	S_2
24	24	8	8	288

Le centre de gravité est déterminé par la relation suivante:

$$X_G = \frac{\sum S_{yi}}{\sum S_{Tot}} = \frac{X_{G1}S_1 + X_{G2}S_2}{S_1 + S_2} = 14{,}01\ cm$$

$$Y_G = \frac{\sum S_{xi}}{\sum S_{Tot}} = \frac{Y_{G1}S_1 + Y_{G2}S_{21}}{S_1 + S_2} = 14{,}01\ \ cm$$

2) Déterminer les moments d'inerties centraux I_{GX} , I_{GY} et I_{GZ}.

a) Déterminant le moment d'inertie des surfaces S_1 et S_2 par rapport aux axe passant par leurs centres de gravités G_1 et $G_{2.}$ $\left(C = \frac{4R}{3\pi}\right)$

$$I_{1G1X} = \frac{\pi d^4}{256} - C^2 S_1 \qquad I_{1G1Y} = \frac{\pi d^4}{256} - C^2 S_1$$

$$I_{2G2X} = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{2G2Y} = \frac{hb^3}{12}$$

$I_{1G1X}(cm^4)$	$I_{1G1Y}(cm^4)$	$I_{2G2X}(cm^4)$	$I_{2G2Y}(cm^4)$
18207,36	18207,36	9216	9216

b. Calculer des distances entre les axes:

$$d_1 = Y_{G1} - Y_G \qquad d'_1 = X_{G1} - X_G$$

$$d_2 = Y_{G2} - Y_G \qquad d'_2 = X_{G2} - X_G$$

$d_1(cm)$	$d'_1(cm)$	$d_2(cm)$	$d'_2(cm)$
-3,82959	-3,82959	-6,01551	-6,01551

c) Calcul des moments d'inerties par rapport aux axes G_X et G_Y:

$$I_{1GX} = I_{1G1X} + d_1^2 S_1 \qquad I_{1GY} = I_{1G1Y} + d_1'^2 S_1$$

$$I_{2GX} = I_{2G2X} + d_2^2 S_2 \qquad I_{2GY} = I_{2G2Y} + d_2'^2 S_2$$

$I_{1GX}(cm^4)$	$I_{2GX}(cm^4)$	$I_{1GY}(cm^4)$	$I_{2GY}(cm^4)$
24842	19637,66	24842	19637,66

d) Déterminant les moments d'inerties de la section par rapport aux axes GX ; GY et GZ en utilisant les relations suivantes:

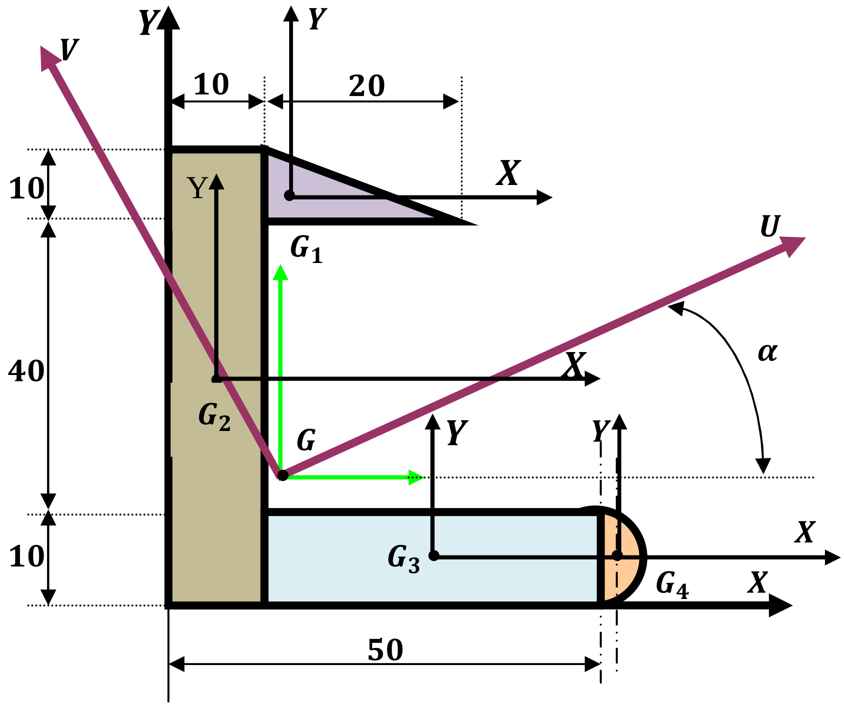
$$I_{GX} = I_{1GX} + I_{1GX} \qquad I_{GY} = I_{1GY} + I_{1GY} \qquad I_{GZ} = I_{GX} + I_{GX}$$

Les résultats sont présentés au tableau ci-dessous:

$I_{GX}(cm^4)$	$I_{GY}(cm^4)$	$I_{GZ}(cm^4)$
5204,337	5204,337	10408,67

Exercice N° 3:

a) Déterminer la position du centre de gravité (X_G, Y_G) par rapport aux axes OX et OY :



Données:

SECTIONS	X_{Gi}	Y_{Gi}	S_i	S_{Xi}	S_{Yi}
1. Triangle	16,66	53,33	100	Y_{G1} x S_1 = 5333	X_{G1} x S_1 = 1666
2. Rectangle	5,0	30,0	600	18 000	3 000
3. Rectangle	30,0	5,0	400	2000	12000
4. ½ cercle	52,12	5,0	39,27	196,3	2046,74
			1139,27	Σ S_{Xi} = 25529,3	Σ S_{Yi} = 18712,74

$$X_G = \frac{\sum S_{yi}}{\sum S_{Tot}} = \frac{18712,74}{1139,27} = 16,42\ cm$$

$$Y_G = \frac{\sum S_{xi}}{\sum S_{Tot}} = \frac{25529,3}{1139,27} = 22,40\ cm$$

1) Déterminer les moments d'inerties $\boldsymbol{I_{GX}}$ et $\boldsymbol{I_{GY}}$ ainsi que le produit d'inertie $\boldsymbol{I_{GXGY}}$:

a) Calcul des moments d'inerties et produit d'inertie de chaque section par rapport à son centre de gravité:

SECTIONS	I_{iGiX}	I_{iGiY}	$I_{iGiXGiY}$
1. Triangle	$\frac{bh^3}{36}=\frac{20.10^3}{36}=555,55$	$\frac{bh^3}{36}=\frac{10.20^3}{36}=2222,22$	$\frac{-b^2h^2}{72}=\frac{-20^2 10^2}{72}=-5555,55$
2. Rectangle	$\frac{bh^3}{12}=\frac{10.60^3}{12}=180000$	$\frac{hb^3}{12}=\frac{60.10^3}{12}=5000$	**0** axe de symétrie
3. Rectangle	$\frac{bh^3}{12}=\frac{40.10^3}{12}=3333,33$	$\frac{hb^3}{12}=\frac{10.40^3}{12}=53333,33$	**0** axe de symétrie
4. ½ cercle	$\frac{\pi d^4}{128}=\frac{\pi.10^4}{128}=245,44$	$\frac{\pi d^4}{128}-C^2S_4=68,60$	**0** axe de symétrie

b) Calcul des distances entre les axes:

$d_1 = Y_{G1} - Y_G = 53,33 - 22,4 = 30,93$ (cm) ; $d'_1 = X_{G1} - X_G = 16,66 - 16,42 = 0,24$ (cm)
$d_2 = Y_{G2} - Y_G = 30 - 22,4 = 7,6$ (cm) ; $d'_2 = X_{G2} - X_G = 5 - 16,42 = -11,42$ (cm)
$d_3 = Y_{G3} - Y_G = 5,0 - 22,4 = -17,4$ (cm) ; $d'_3 = X_{G3} - X_G = 30 - 16,42 = 13,58$ (cm)
$d_4 = Y_{G4} - Y_G = 5,0 - 22,4 = -17,4$ (cm) ; $d'_4 = X_{G4} - X_G = 52,12 - 16,42 = 35,7$ (cm)

2) Calcul des moments d'inerties I_{GX} et I_{GY} ainsi que le produit d'inertie I_{GXGY} :

$$I_{GX} = I_{1GX} + I_{2GX} + I_{3GX} + I_{4GX} = 447450,19\ cm^4$$
$$I_{GY} = I_{1GY} + I_{2GY} + I_{3GY} + I_{4GY} = 262695,53\ cm^4$$
$$I_{GXGY} = I_{1GXGY} + I_{2GXGY} + I_{3GXGY} + I_{4GXGY} = -170798,98\ cm^4$$

3) Déterminer la position des axes centraux principaux:

$$tg2\alpha = \frac{2I_{GXGY}}{I_{GY} - I_{GX}}$$

$$tg2\alpha = \frac{2(-170798,98\ )}{262695,53 - 447450,19} = 1,849$$

$\alpha = 30^o, 79$

4) Déterminer les moments d'inerties centraux principaux:

$$\boldsymbol{I_{min}^{max} = \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{GY} - I_{GX}}{2}\right)^2 + I_{GXGY}{}^2}}$$

$$\boldsymbol{I_{max} = I_U = \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{GY} - I_{GX}}{2}\right)^2 + I_{GXGY}{}^2}}$$

$$I_U = \frac{447450{,}19 + 262695{,}53}{2} + \sqrt{\left(\frac{262695{,}53 - 447450{,}19}{2}\right)^2 + -(170798{,}98)^2}$$
$$= 549252{,}83\ cm^4$$

$$\boldsymbol{I_{min} = I_V = \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{GY} - I_{GX}}{2}\right)^2 + I_{GXGY}{}^2}}$$

$$I_V = \frac{447450{,}19 + 262695{,}53}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{262695{,}53 - 447450{,}19}{2}\right)^2 + -(170798{,}98)^2}$$
$$= 160892{,}89\ cm^4$$

Calculs de vérification:

$$I_{UV} = I_{GXGY}.\,cos\ 2\alpha + \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2}.\sin 2\alpha$$

$$I_{UV} = -170798{,}98.\,cos\ 2(30{,}79) + \frac{447450{,}19 + 262695{,}53}{2}.\,sin\ 2(30{,}79) = 0$$