

Systme des quations diffrentielles linaires coefficients constants

Soit le systme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$O \ x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

La solution de ce problme est : $x(t) = e^{A(t)} \cdot x_0$

On a : $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$

O J est la matrice de Jordan $\Rightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1} \Rightarrow x(t) = P \cdot e^{J(t)} \cdot P^{-1} \cdot x_0$

Proposition 1 :

Si A est diagonalisable.

Soient $V_1, \dots, V_n$ les vecteurs propres associes aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$et \ soit \ P = [V_1, \dots, V_n] \ \text{alors on a : } P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La solution du problme (1) est :

$$x(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot x_0$$

Proposition 2 :

Si A admet les valeurs propres complexes $\{\lambda_1 = a_1 + ib_1, \dots, \lambda_n = a_n + ib_n\}$ et les vecteurs propres associs $\{w_1 = u_1 + iv_1, \dots, w_n = u_n + iv_n\}$.

Si $P = [v_1, u_1, v_2, u_2, \dots, v_n, u_n]$ alors on a :

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

La solution du problème (1) est :

$$x(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{a_1 t} \cos(b_1 t) & -e^{a_1 t} \sin(b_1 t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ e^{a_1 t} \sin(b_1 t) & e^{a_1 t} \cos(b_1 t) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_2 t} \cos(b_2 t) & -e^{a_2 t} \sin(b_2 t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_2 t} \sin(b_2 t) & e^{a_2 t} \cos(b_2 t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{a_n t} \cos(b_n t) & -e^{a_n t} \sin(b_n t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{a_n t} \sin(b_n t) & e^{a_n t} \cos(b_n t) \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot x_0$$

Exemple 1:

Rsoudre le systme suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\text{O } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a les valeurs propres associes :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \bar{\lambda}_1 = 1 - i, \lambda_2 = 2 + i, \bar{\lambda}_2 = 2 - i$$

Les vecteurs propres associes :

$$Aw_1 = \lambda_1 w_1 \Rightarrow w_1 = u_1 + iv_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1 + iv_1$$

$$Aw_2 = \lambda_2 w_2 \Rightarrow w_2 = u_2 + iv_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2 + iv_2$$

$$\Rightarrow P = [v_1, u_1, v_2, u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Alors La solution est :

$$x(t) = P \cdot e^{J(t)} \cdot P^{-1} \cdot x_0 = P \cdot \begin{pmatrix} e^t \cos(t) & -e^t \sin(t) & 0 & 0 \\ e^t \sin(t) & e^t \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \cos(t) & -e^{2t} \sin(t) \\ 0 & 0 & e^{2t} \sin(t) & e^{2t} \cos(t) \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot x_0$$

Exemple 2:

Rsoudre:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\text{O } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A possde les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ double et $\lambda_2 = -1$ simple.

$A\lambda_1 = \lambda_1 v_1$ correspond 2 vecteurs propres independants $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

La multiplicite gomtrique de $\lambda_1 = \dim E(\lambda_1) = 2$, et la multiplicite algbrique de $\lambda_1 = 2$

$\Rightarrow A$ est diagonalisable $\Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A\lambda_2 = \lambda_2 v_3$ correspond le vecteur propre $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Alors on a :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Alors La solution est :

$$x(t) = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot x_0 = P \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot x_0$$

Forme canonique de Jordan

Soit le systme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit A une matrice relle avec des valeurs propres relles $\lambda_j, j = 1, \dots, k$, et des valeurs propres complexes $\lambda_j = a_j + ib_j, \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ avec $j = k + 1, \dots, n$

alors il existe une base $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n\}$ de $\mathbb{R}^{2n-k}$ o v_j avec $j = 1, \dots, k$ et w_j avec $j = k + 1, \dots, n$ sont des vecteurs propres gnralises de A , $u_j = \operatorname{Re}(w_j)$ et $v_j = \operatorname{Im}(w_j)$ pour $j = k + 1, \dots, n$. Alors la matrice :

$$P = [v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n] \text{ est inversible, et on a: } P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

O les blocs lmentaires de Jordan pour $i = 1, \dots, r$ sont de la forme:

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

si λ_i une des valeurs propres relles.

et de la forme :

$$B_i = \begin{bmatrix} D & Id_2 & O_2 & \dots & \dots & O_2 \\ O_2 & D & Id_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & D & Id_2 \\ O_2 & \dots & \dots & \dots & O_2 & D \end{bmatrix} \quad (3)$$

avec : $D = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix}$, $Id_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

si λ_i une des valeurs propres complexes de A .

Alors la solution du problme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \end{cases}$$

est donne par :

$$x(t) = P \cdot \begin{bmatrix} e^{B_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{B_n t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot x_0$$

Si $B = B_i$ est une matrice de taille $(m * m)$ de la forme (2),on a :

$$e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $B = B_i$ est une matrice de taille $(2m * 2m)$ de la forme (3), on a :

$$e^{Bt} = e^{at} \begin{bmatrix} R & tR & \frac{t^2}{2!}R & \cdots & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & R & tR & \ddots & \ddots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & R & tR \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

O $R = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$, on pose $a_i = a$ et $b_i = b$

preuve de la forme (2):

Si la matrice B de la forme :

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow B = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \lambda I_m + N \Rightarrow e^{Bt} = e^{\lambda I_m t} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot e^{Nt}$$

O N est une matrice nilpotente d'indice m tel que :

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 + \cdots + \frac{1}{m-1}N^{m-1}t^{m-1}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^{m-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \ddots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

preuve de la forme (3):

Si la matrice B de la forme :

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & O_2 & \cdots & \cdots & O_2 \\ O_2 & D & I_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & D & I_2 \\ O_2 & \cdots & \cdots & \cdots & O_2 & D \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & D & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & D & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & D \end{bmatrix} + N, \text{ O } N = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & I_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors on a :

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{Dt} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & e^{Dt} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & e^{Dt} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & e^{Dt} \end{bmatrix} \cdot e^{Nt} = e^{Dt} \cdot e^{Nt}$$

tel que :

$$e^{Dt} = e^{at} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & R & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & R & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}, \text{ O } R = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } e^{Nt} = I + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 + \dots + \frac{1}{m-1}N^{m-1}t^{m-1}$$

$$\Rightarrow e^{Nt} = \begin{bmatrix} I_2 & I_2t & I_2\frac{t^2}{2!} & \cdots & \cdots & I_2\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & I_2 & I_2t & \ddots & \ddots & I_2\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & I_2 & I_2t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

