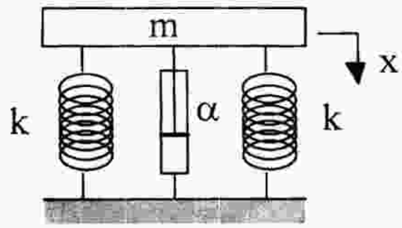
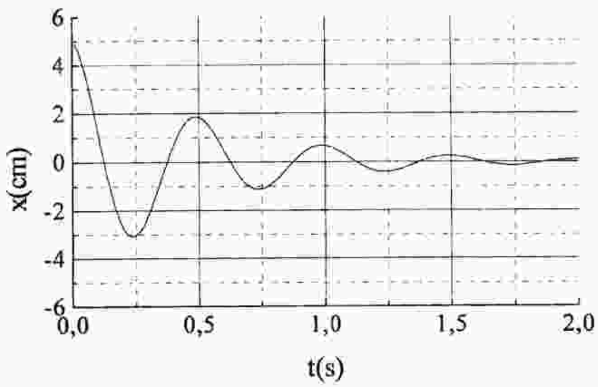
OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

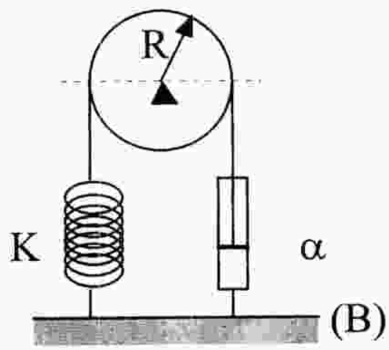
Exercice 1 : Une masse m = 20 kg est montée sur deux ressorts de raideur k=4 kN/m et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α=130 kg/s. A l'instant initial, la masse est écartée de 5 cm de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.
a) Calculer le déplacement et la vitesse de la masse m en fonction du temps.
b) Quels sont le déplacement et la vitesse à l'instant t=1 s?



Exercice 2 : Un bloc de masse 25 kg est monté sur un support en caoutchouc, de masse négligeable, qui se comprime de 6.1cm sous ce poids. Quand le bloc vibre librement, on enregistre les positions de la masse après l'avoir déplacé de 5cm à partir de sa position d'équilibre (voir figure ci-contre). Sachant que le tapis de caoutchouc peut être symbolisé par un ressort de raideur K associé à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , calculer ces coefficients K et α .

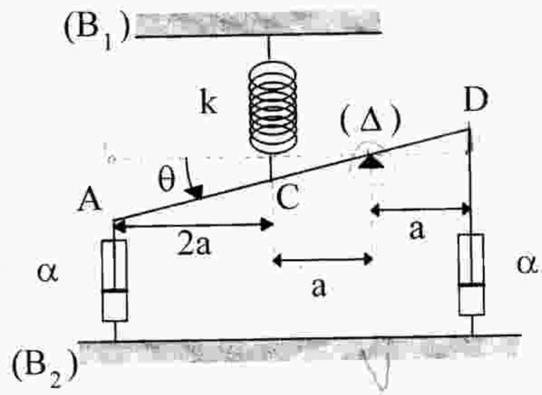


Exercice 3 : Le système de la figure ci-contre est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R en rotation autour de son axe de révolution fixe. Un fil inextensible, de masse négligeable, entraîne le cylindre sans glissement sur sa périphérie ; ses deux extrémités sont reliées à un bâti fixe (B) par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Quelle la valeur critique du coefficient α ?



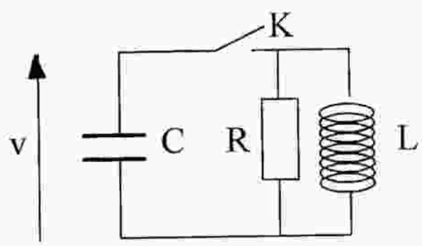
Exercice 4 :

Le système mécanique de la figure ci-contre est constitué d'une tige rectiligne AD, homogène, de masse M=3kg et de longueur L=2m. Cette tige peut tourner, dans le plan vertical, sans frottement, autour d'un axe horizontal (Δ) fixe. Les extrémités A et D de la tige sont reliées au bâti fixe B_2 par deux amortisseurs identiques de coefficient de frottement visqueux α. Le point C, milieu de la tige, est relié au bâti B_1 par un ressort de raideur k. A l'équilibre, la tige est horizontale.



Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période 1s. On constate qu'au bout de 5 pseudo-périodes, l'amplitude est égale à 20 % de l'amplitude initiale. En déduire la valeur numérique de α puis celle de k.

Exercice 5 : Le circuit ci-contre est constitué d'un condensateur de capacité C=1μF, d'une bobine d'inductance L=0.1mH et d'une résistance R pouvant prendre les valeurs 1Ω , 5Ω et 1kΩ. Le condensateur est initialement chargé sous une tension de 5V. A l'instant t=0s, on ferme brusquement l'interrupteur K.



1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension v(t) aux bornes du condensateur.

2) Pour les trois valeurs de la résistance:

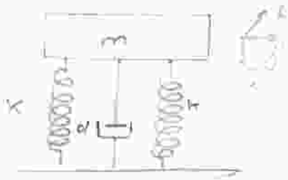
a) Quelles sont les valeurs de δ et ω_0 ?

b) En déduire les variations de v(t) au cours du temps.

c) Tracer le graphe de v(t) en fonction du temps.

Oscillations libres de systèmes amortis à un degré de liberté

Exercice 1 :



$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ (force de frottement visqueuse)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (Toutes les forces dérivent d'un potentiel)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \phi$ (force généralisée associée à la force qui ne dérive pas d'un potentiel)

$\phi = \vec{f}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$ $\quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = x\vec{i}$ et $q = x$

$\vec{f} = -\alpha \dot{x}\vec{i}$

$\phi = -\alpha \dot{x}\vec{i}\,\frac{\partial x\vec{i}}{\partial x} = -\alpha \dot{x}\,\vec{i}\,\vec{i}\,\frac{\partial x}{\partial x}$

$\phi = -\alpha \dot{x}$

$L = T - U$ $\quad L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - kx^2 + c^{te}$

$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \phi$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$

Equation caractéristique :

$r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{2k}{m} = 0$ on pose :

$\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$

donc : $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$ $\quad \Delta' = \delta^2 - \omega_0^2$

$\delta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{130}{2\times 20} = \frac{13}{4} \Rightarrow \delta = 3{,}25\ s^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 10^4}{20}}$ $\quad \omega_0 = 20\ s^{-1}$

$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 = 3{,}25^2 - 20^2 < 0$

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$

$r_1 = -\delta + \sqrt{\Delta'} = -\delta + i\omega_a$

$r_2 = -\delta - \sqrt{\Delta'} = -\delta - i\omega_a$

$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = D e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

$x(t) = E e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \theta)$

$x(0) = 5\,cm$ et $\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(t) = -\delta E e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \theta) + \omega_a E e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \theta)$

$$\begin{cases} x(0) = E\sin\theta \\ \dot{x}(0) = -\delta E\sin\theta + \omega_a E\cos\theta \end{cases}$$

d'où $E = \frac{x(0)}{\sin\theta}$

$-\delta\frac{x(0)}{\sin\theta}\sin\theta + \omega_a\frac{x(0)}{\sin\theta}\cos\theta = 0$

$\Rightarrow -\delta + \omega_a\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$ car $x(0) \neq 0$

$tg\,\theta = \frac{\omega_a}{\delta}$

$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{tg^2\theta} = 1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}$

donc $\frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}}$

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = x(0)\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega_a^2}}\; e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \theta) \\ tg\,\theta = \frac{\omega_a}{\delta} \end{gathered}}$$

Exercice 2

$F_\alpha = -\alpha v = -\alpha\dot{y}$

$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad U = U_K + U_m$

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ à l'équilibre $Ky_0 - mg = 0$

$U_K = \frac{1}{2}K(y+y_0)^2 \; ; \; U_m = -mg(y+y_0)$

$U = \frac{1}{2}Ky^2 + Kyy_0 + \frac{1}{2}Ky_0^2 - mgy - mgy_0$

$U = \frac{1}{2}Ky^2 + (Ky_0 - mg)\,y + c^{te}$

condition d'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

$Ky_0 - mg = 0$ donc $U = \frac{1}{2}Ky^2 + c^{te}$

$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$ et $L = T - U$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$

donc $m\ddot{y} + Ky = -\alpha\dot{y}$

$\Rightarrow m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + Ky = 0$

$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = 0 \Rightarrow \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

$y(t) = Ce^{-\delta t}\cos(\omega_a t - \varphi) \; / \; \omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

$D = \frac{1}{n}\log\frac{y(t)}{y(t+nT_a)} = \delta T_a \Rightarrow \delta = \frac{D}{T_a}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{5}{0{,}8} \Rightarrow D = 0{,}91$ et $\delta = 1{,}8\,s^{-1}$

on a $\delta = \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \alpha = 2\delta m$

$\alpha = 91{,}03\,Kg\,s^{-1}$

$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \Rightarrow \omega_a^2 = \frac{4\pi^2}{T_a^2} = \frac{40}{T_a^2}$

$\omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2 = \frac{40 + D^2}{T_a^2}$

donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{40 + D^2}{T_a^2}}$

$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = m\omega_0^2 = m\left(\frac{40 + D^2}{T_a^2}\right)$

$= 25\left(\frac{40 + 0{,}91^2}{0{,}5^2}\right)$

$K = 4074\,Kg/s^2$

Exercice 3

α ?

$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(MR^2)\dot{\theta}^2$

$U_K = \frac{1}{2}Kx^2 \; / \; x = R\sin\theta = R\theta$

donc $U_K = \frac{1}{2}KR^2\theta^2 \; ; \; U_M = 0$

$L = T - U = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \; / \; D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$

$MR^2\ddot{\theta} + KR^2\theta = -\alpha R^2\dot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{M}\dot{\theta} + \frac{K}{M}\theta = 0$

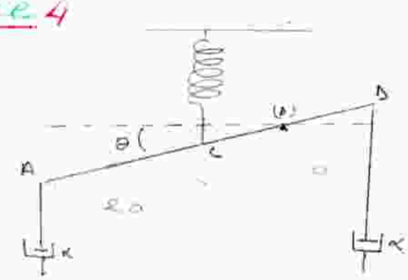
$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\delta = \frac{\alpha}{2M} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

critique $\frac{\alpha^2}{4M^2} = \frac{K}{M}$

GENIE DES PROCEDES fan page

Exercice 4



$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \;/\; J = \frac{M(4a)^2}{12} + Ma^2 = \frac{7Ma^2}{3}$

donc : $T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} Ma^2\right)\dot{\theta}^2$

$U = U_K + U_m$

$U_K = \frac{1}{2} Ka^2 (\theta + \theta_0)^2$

$U_m = -mg\,a(\theta + \theta_0)$

donc : $U = \frac{1}{2} Ka^2\theta^2 + Ka^2\theta\theta_0 - mga\theta + c^{te}$

$U = \frac{1}{2} Ka^2\theta^2 + \theta(K\theta_0 - mg)\,a + c^{te}$

condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$

$Ka\theta_0 - mg = 0$; $U = \frac{1}{2} Ka^2\theta^2 + c^{te}$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 \;/\; \mathcal{D}_1 = \frac{1}{2}\alpha a^2\dot{\theta}^2$

$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{2}\alpha\, 9a^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}(10\alpha a^2)\dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \;/\; L = T - U$

$\frac{7}{3} Ma^2\ddot{\theta} + 10a^2\dot{\theta} + Ka^2\theta = 0$

$x = a\theta$, $\dot{x} = a\dot{\theta}$, $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} + \frac{2(15\alpha)}{7M}\dot{\theta} + \frac{3K}{7M}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

avec : $\delta = \frac{15\alpha}{7M}$ et $\omega_0^2 = \frac{3K}{7M}$

$\frac{\theta_5}{\theta_0} = 0,2 \Rightarrow \frac{\theta_0}{\theta_5} = 5$

$\mathcal{D} = \frac{1}{n}\log\left(\frac{\theta(t_0)}{\theta(t_0 + nT_a)}\right) = \delta T_a$

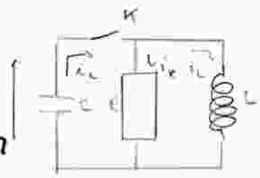
$\mathcal{D} = \frac{1}{5}\log 5 = 0,32$ $\quad \delta = \frac{D}{T_a} = 0,32\, s^{-1}$

$\alpha = \frac{7M}{15}\delta = 0,448$

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{4\pi^2 + \Delta^2}{T_a^2} = \frac{3K}{7M}$

$K = \frac{7M(4\pi^2 + \Delta^2)}{3T_a^2} = 942,5$

Exercice 5



$t = 0$, $V = 5$ Volt
$C = 1\,\mu F$, $L = 0{,}1\,mH$
$R = 1\,\Omega$ ou $5\,\Omega$ ou $1\,k\Omega$

1/ Equation différentielle :

Loi des nœuds en A $\quad i_c = i_R + i_L$

Branche en parallèle sur AB

$V = V_C = V_R = V_L$

$V_R = R\,i_R \quad$ et $\quad V_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

$V_c = \dfrac{q}{C} \quad$ on cherche $V_c(t)$

$i_c = \dfrac{V_c}{R} + i_L \Rightarrow i_L = i_c - \dfrac{V_c}{R}$

$\Rightarrow V_c = \dfrac{L\,d}{dt}\left(i_c - \dfrac{V_c}{R}\right) = L\dfrac{di_c}{dt} - \dfrac{L}{R}\dfrac{dV_c}{dt}$

$q = CV_c$

$i_c = -\dfrac{dq}{dt} \quad$ car décharge

$L\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{d}{dt}CV_c\right) - \dfrac{L}{R}\dfrac{dV_c}{dt} = V_c$

$-LC\ddot{V}_c - \dfrac{L}{R}\dot{V}_c = V_c \Rightarrow \ddot{V}_c + \dfrac{1}{RC}\dot{V}_c + \dfrac{1}{LC}V_c = 0$

$\Rightarrow \ddot{V}_c + 2\delta\,\dot{V}_c + \omega_0^2 V_c = 0$

avec : $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} = \dfrac{1}{10^{-4}\times 10^{-6}} = 10^{10}$

$\omega_0 = 10^5\,s^{-1}$

2/ $R = 1\,\Omega \quad \delta = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{1}{2\cdot 10^{-6}} = 5\cdot 10^5 > \omega_0$

régime amorti

$V_c(t) =$

$R = 5\,\Omega \quad \delta = \dfrac{1}{2RC} = \dfrac{1}{10^{-5}} = 10^5 = \omega_0$

régime critique.

$V_c(t) =$

$R = 1\,k\Omega \quad \delta = 10^2 < \omega_0$

régime pseudo-périodique.

$V_c(t) = 0{,}025\,e^{-500\,t}\sin(99998{,}71\,t + \ldots)$

conditions : $V_c(0) = 5$ Volt

$i_c = -\dfrac{C\,dV_c}{dt} = 0$

$V_c(t) = 0{,}025\,e^{-\delta t}(\sin\theta + 5\cos\theta)$

Module $\sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

$= 0{,}025\sqrt{26}\,e^{-\delta t}\left(\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{26}}}_{\sin\varphi}\sin\theta + \underbrace{\dfrac{5}{\sqrt{26}}}_{\cos\varphi}\cos\theta\right)$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \varphi = 1{,}373$

$V_c(t) = 0{,}1274\,e^{-\delta t}\cos(99998{,}71\,t - 1{,}373)$

$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$

Décrément $D = \ln\dfrac{V_i}{V_{i+1}} = \delta T_0$