

Vibrations des systèmes mécaniques

2 domaines d'étude des **solides élastiques**

Statique

Contexte :

**Structures soumise à des
Efforts constants :**

- ☐ Pas d'évolution temporelle
des efforts appliqués
- ☐ Evolution très lente : **Fatigue**

Objet des cours de :

- ☐ Stat. des milieux continus (MMC)
- ☐ Résistance des matériaux (RDM)

Dynamique

Contexte :

**Structures soumise à des
Efforts dynamiques :**

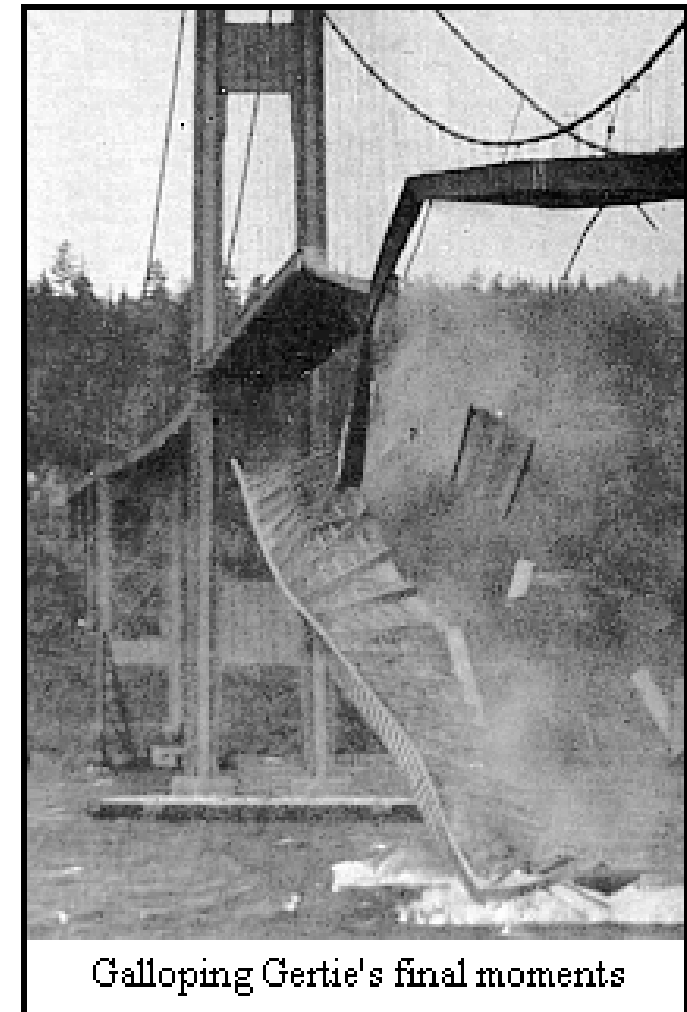
- ☐ Evolution temporelle rapide
des efforts appliqués :
 - Harmoniques, périodiques, qcq
 - Caractérisés par leur spectre

Objet des cours de :

- ☐ Vibrations ou Dynamique
des structures

Quand un système est mal modélisé

Destruction du pont de Tacoma



Problème

- Quelle structure vibre ?
 - Quelles causes ?
 - Quel mouvement ?
 - Quels paramètres ?

Observations

Mouvement

Oscillation autour
d'une position
d'équilibre statique

Paramètres influents :

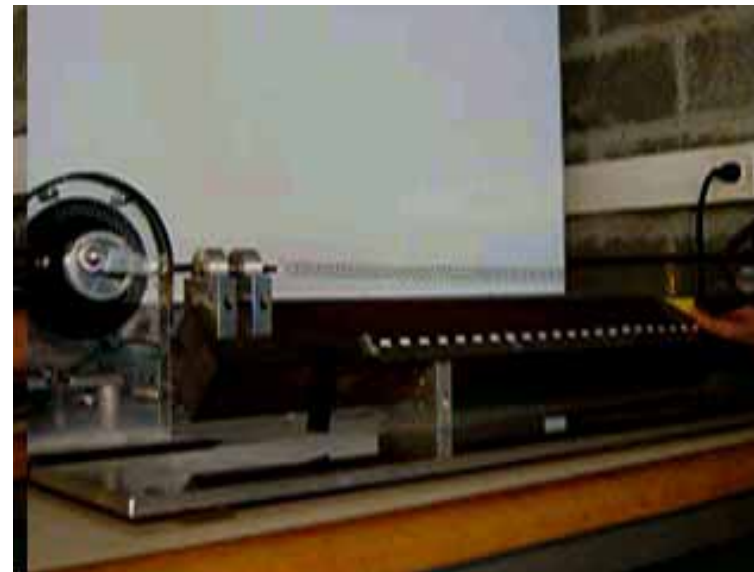
Inertie

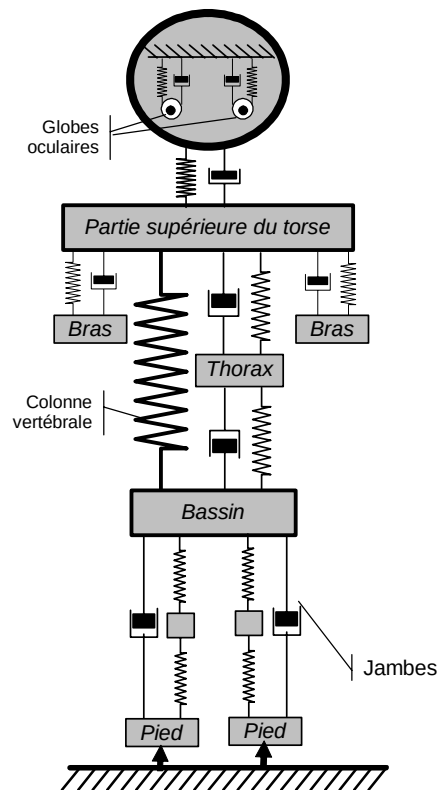
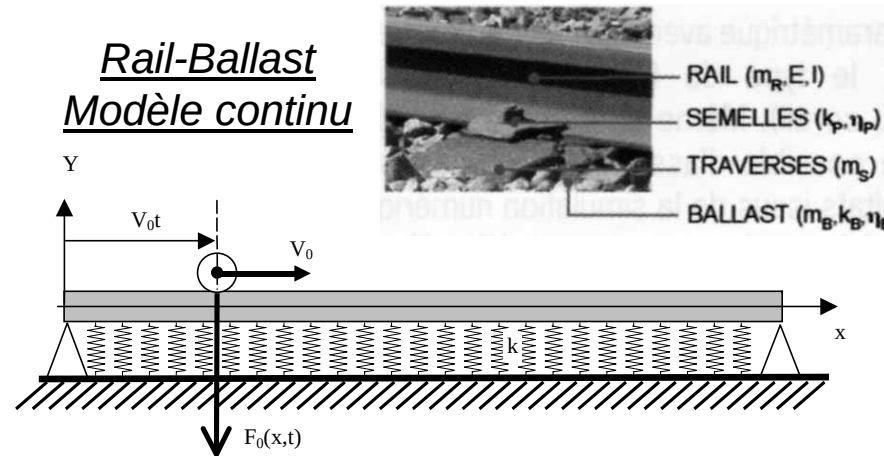
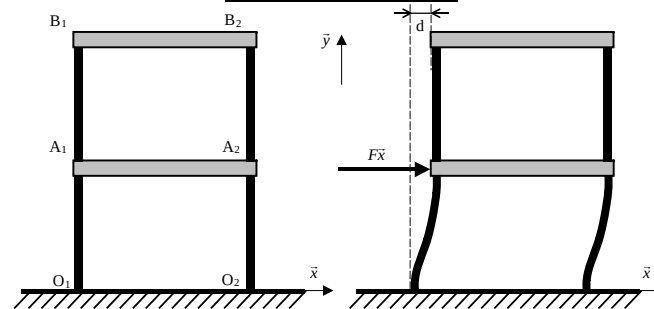
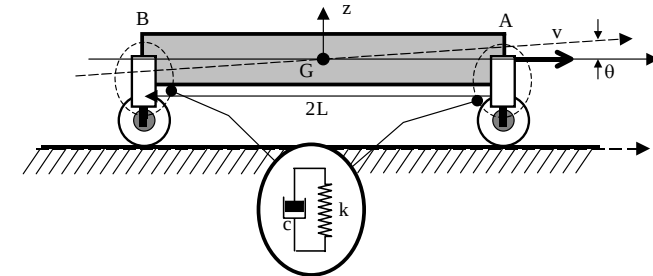
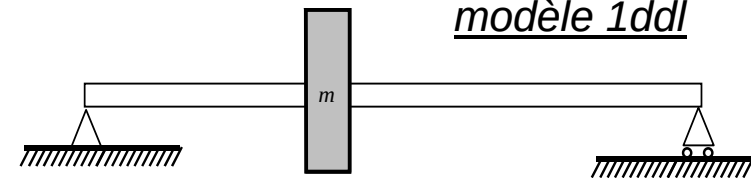
masse, moment

Elasticité

traction, cisaillement, torsion

Amortissement



Exemples de ModèlesCorps humain
Modèle discretRail-Ballast
Modèle continuBâtiment à 2 étages
modèle 2ddlAutomobile modèle 2ddlArbre de rotor
modèle 1ddl

Quelle précision est nécessaire au problème ?

Différents types de modèle

Modèles discrets

nombre fini n de ddl

Ecriture : analytique

Solution approchée :

analytique si $n \leq 2$

numérique si $n > 2$

Modèles continus

nbr ∞ de ddl (n)

(cordes - poutres - plaques)

Ecriture : analytique

Solution : analytique exacte

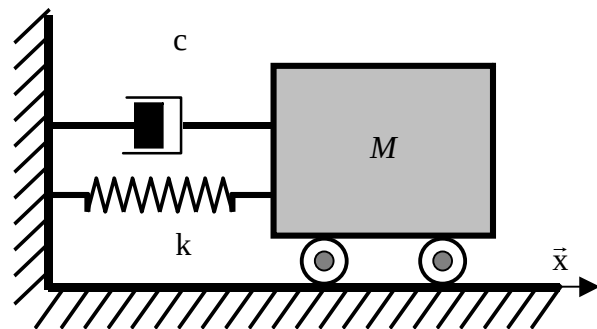
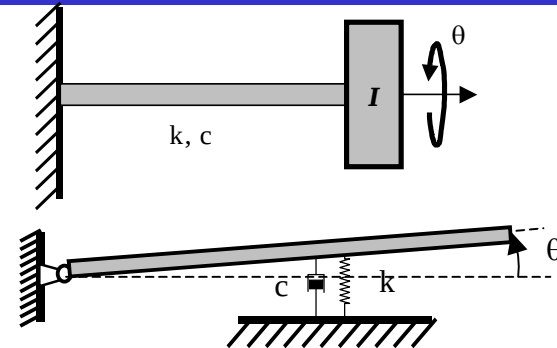
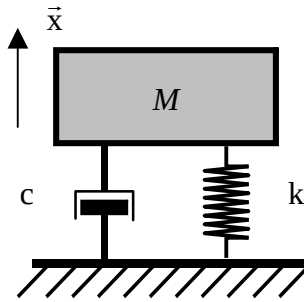
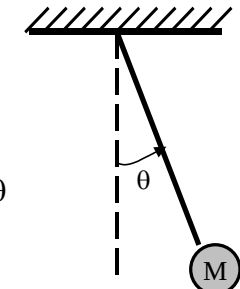
Modèles à éléments finis

**association d'un nombre fini
de structures continues élémentaires**

Ecriture numérique

Solution numérique approchée

Modèles de Systèmes oscillants à 1DDL

**En translation****En rotation****Pendulaire**

<i>Paramétrage</i>	Translation	Rotation	Pendulaire
Déplacement	Longitudinal : x	Angulaire : θ	Angulaire : θ
Inertie	Masse : M	Moment d'inertie : I	Masse : M
Raideur	Résistance à l'allongement : k	Résistance à la torsion : k	Pesanteur
Amortissement	Frottements visqueux : c		

Objectif :

Déterminer la forme du mouvement de la structure

en fonction : - du temps : $x(t)$, $\theta(t)$

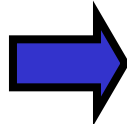
- de la fréquence de l'excitation : $x(\omega)$, $\theta(\omega)$

2 types de vibrations linéaires des structures

➤ Les Oscillations libres (OL)

Excitation

- Aucune force extérieure
 $F(t) = 0 \Rightarrow$ libre
- Position et/ou vitesse initiales non nulles



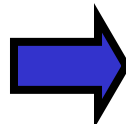
Réponse

- Vibration naturelle de la structure
- *sans amortissement :*
Mouvement harmonique à la **fréquence propre**
 - *avec amortissement :*
Mouvement pseudo harmonique amorti

➤ Les Oscillations forcées (OF)

Excitation

- Force extérieure entretenue ou transitoire
 $F(t) \neq 0 \Rightarrow$ forcée



Réponse

- Vibration forcée de la structure
- Mouvement accordé à l'excitation :
Amplitude et phase
selon le spectre de l'excitation
+
- Vibration libre si x_0 et/ou $v_0 \neq 0$

Écriture de l'équation du mouvement 1DDL (en translation)

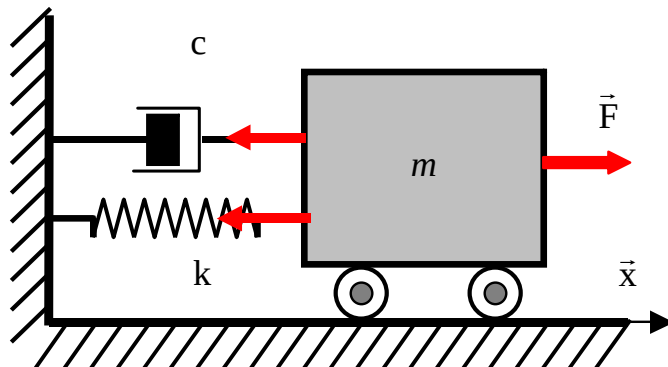
2 méthodes

Bilan des forces (PFD) :

- Force d'excitation : $F(t)$
- Force de rappel élastique : $-k x(t)$
- Force de frottement visqueux : $-c \dot{x}(t)$

$$\sum \text{Forces} = m\gamma$$

$$\Leftrightarrow F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$



Théorème de l'énergie :

- Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique : $U = \frac{1}{2} k x^2$
- Puissance dissipée : $\Pi_d = c \dot{x}^2$
- Puissance extérieure : $\Pi_e = F \dot{x}$

$$\frac{d(T + U)}{dt} + \Pi_d = \Pi_e$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

Solutions de l'équation du mouvement 1DDL Oscillations Libres non amorties (c=0)

Equation du mouvement : $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

Solution :
3 écritures équivalentes

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = X_1 e^{-j\omega_0 t} + X_2 e^{j\omega_0 t} \\ x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \\ x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ω_0 : pulsation propre,
 R_q : fonction du rapport de l'élasticité à l'inertie.

Conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}$$



Constantes

$$A, B \text{ ou } X_1, X_2 \text{ ou } X, \phi$$

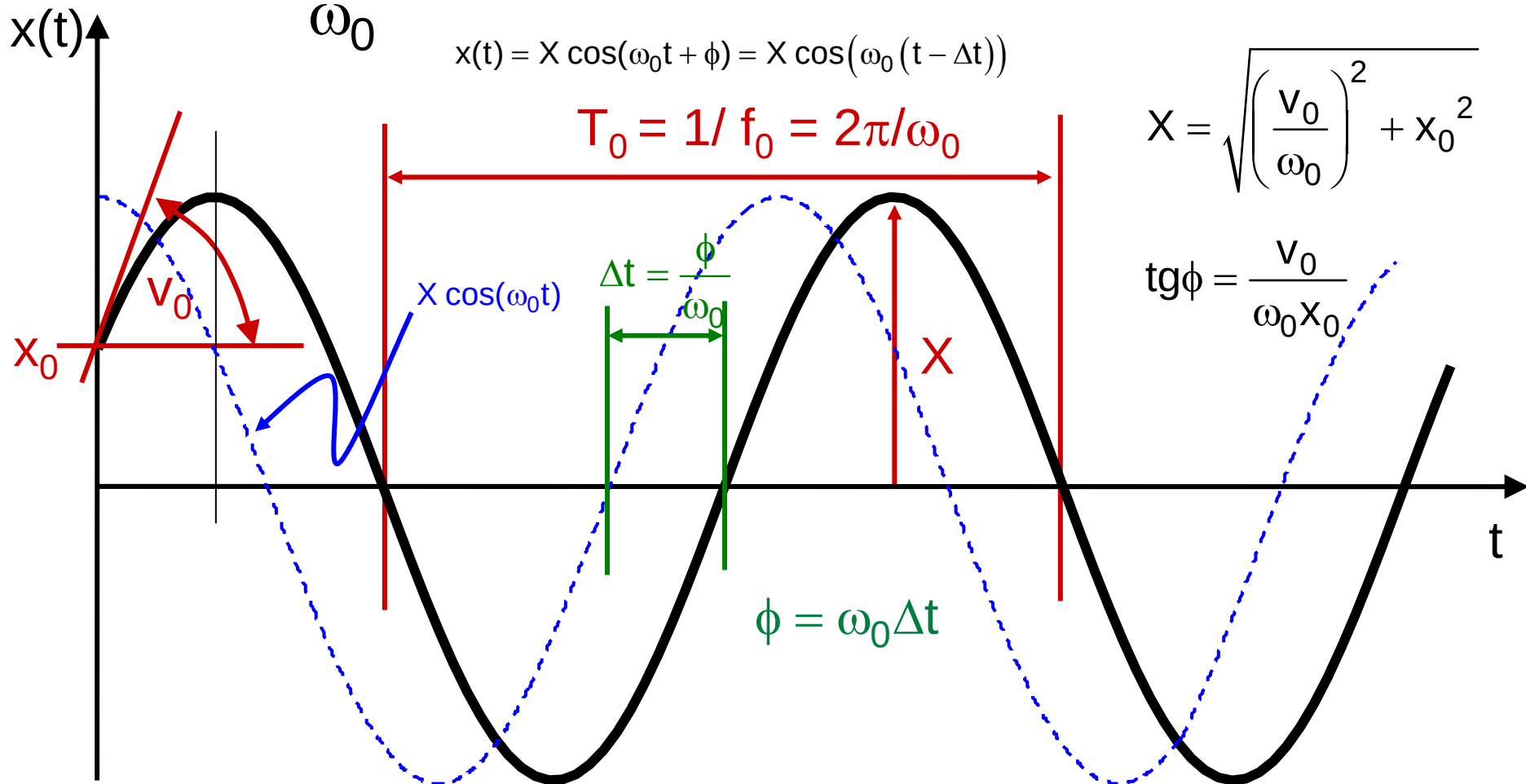
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t + \phi)$$

X : amplitude,
 ϕ : phase

Oscillations libres d'un système non amorti

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi) = X \cos(\omega_0 (t - \Delta t))$$

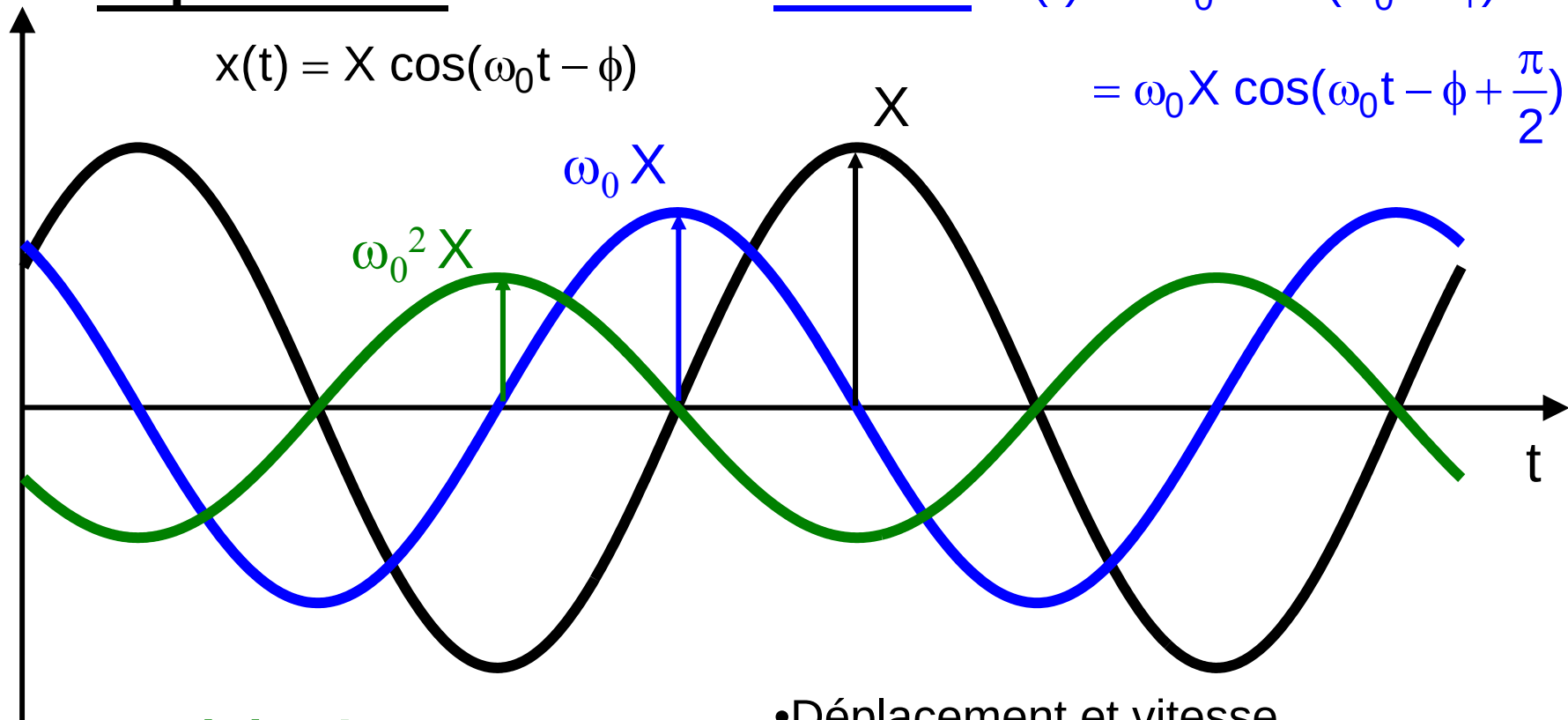


Oscillations libres d'un système à 1DDL non amorti**Déplacement**

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$$

Vitesse $\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \phi)$

$$= \omega_0 X \cos(\omega_0 t - \phi + \frac{\pi}{2})$$

**Accélération**

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \phi) \\ &= \omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \phi + \pi) \end{aligned}$$

- Déplacement et vitesse en quadrature
- Déplacement et accélération en opposition de phase

Solutions de l'équation du mouvement 1DDL Oscillations libres amorties ($c \neq 0$)

Equation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Solutions de la forme : $x(t) = Xe^{st}$

Equation caractéristique : $s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_0^2 = 0$

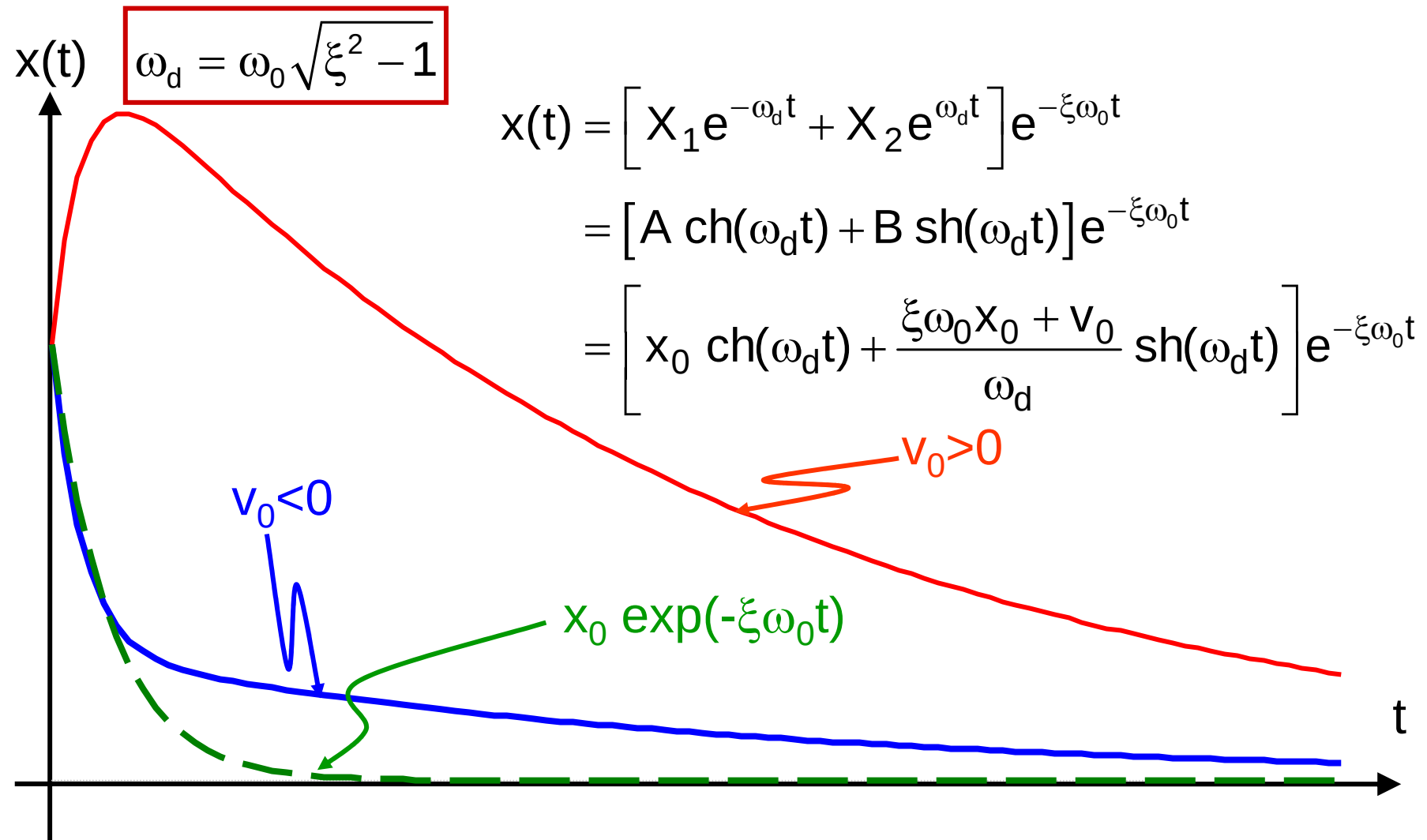
Racines :
$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

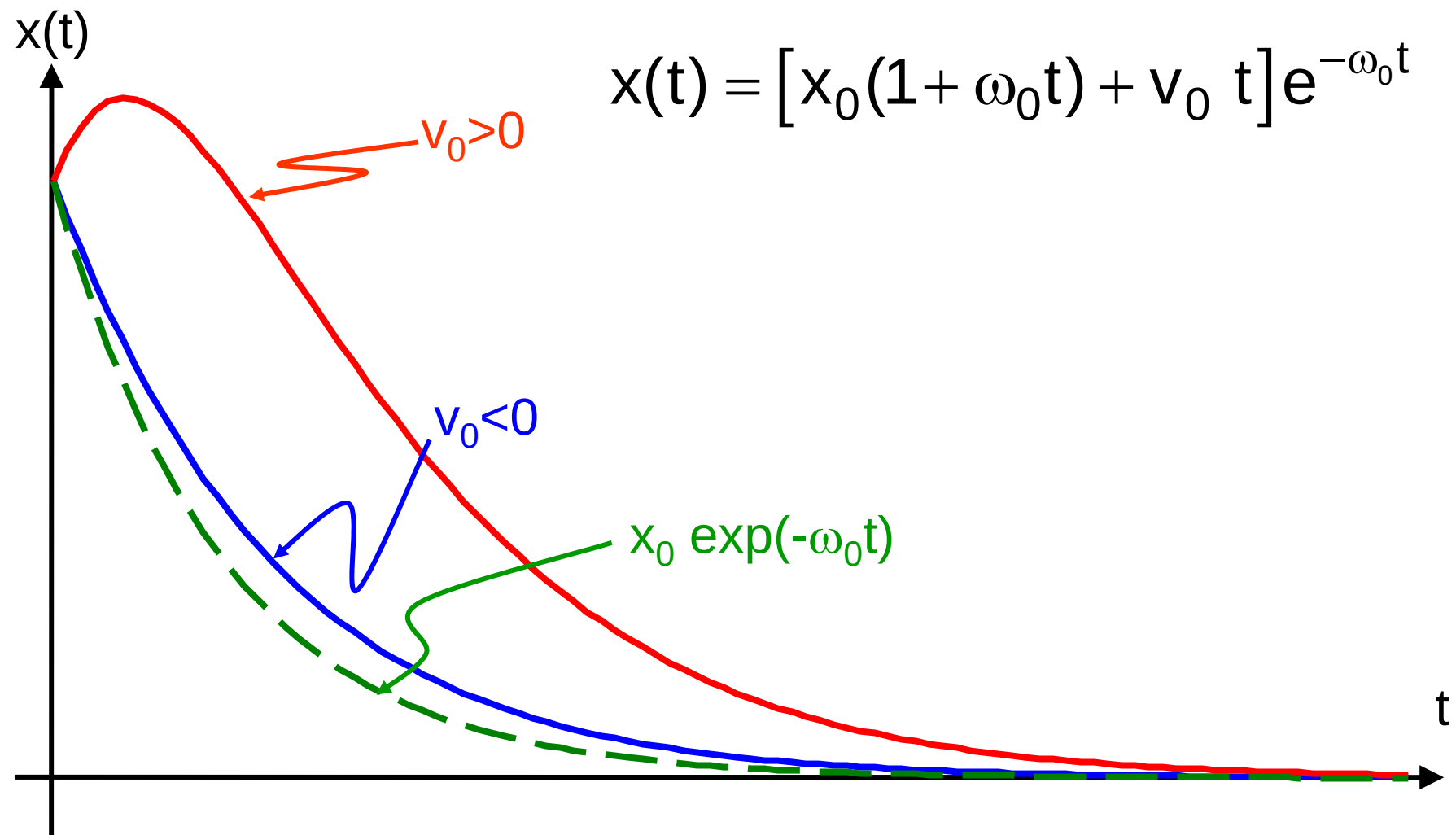
ξ : *facteur d'amortissement*

3 cas d'amortissement selon ξ

Oscillations libres d'un système amorti amortissement surcritique : $\xi > 1$



Oscillations libres d'un système amorti
amortissement critique : $\xi = 1$



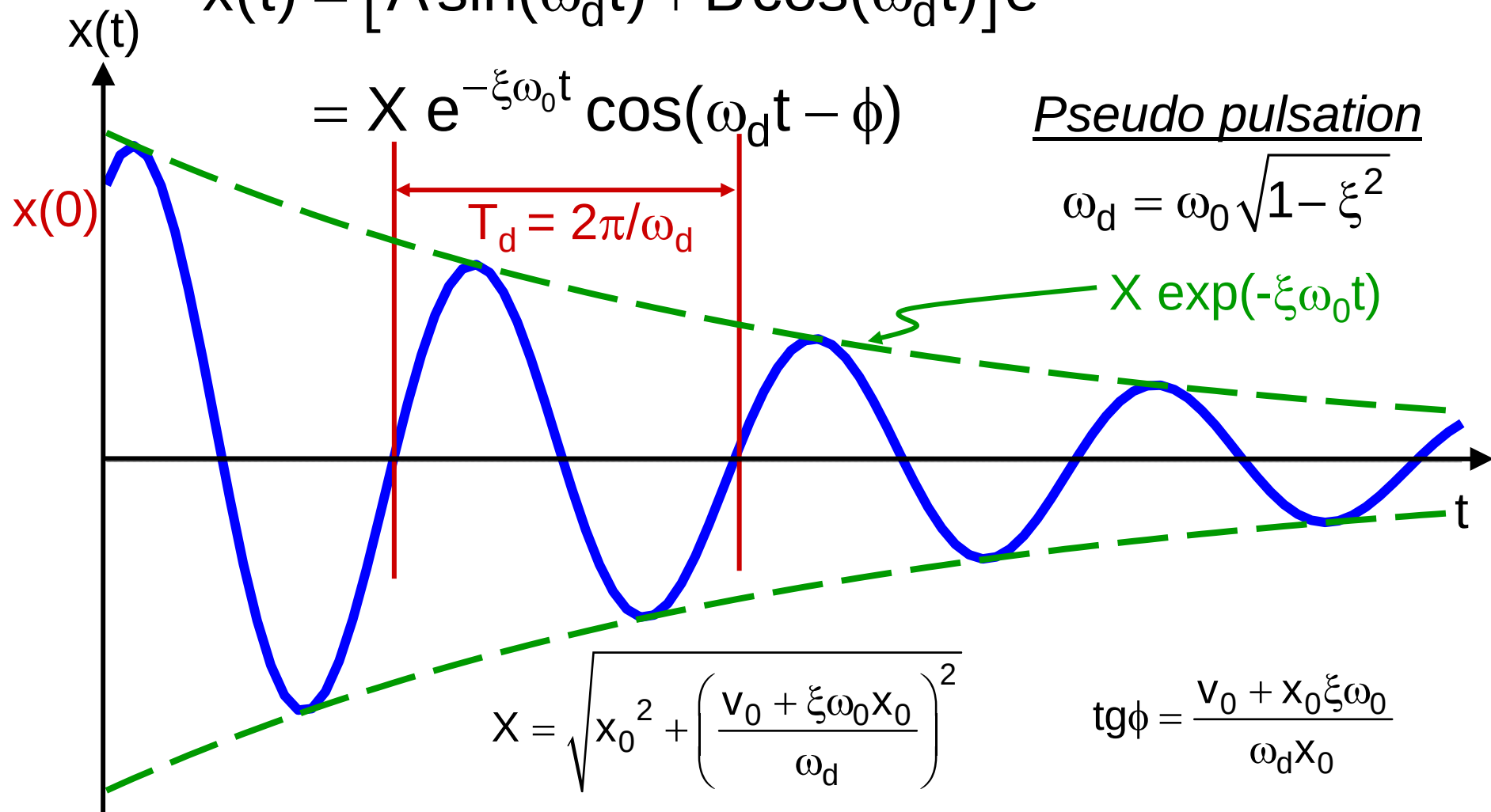
Oscillations libres d'un système amorti
amortissement sous - critique : $\xi < 1$

$$x(t) = [A \sin(\omega_d t) + B \cos(\omega_d t)] e^{-\xi \omega_0 t}$$

$$= X e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Pseudo pulsation

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$



Oscillations libres d'un système à 1DDL amorti **amortissement sous - critique : $\xi < 1$**

Détermination expérimentale de l'amortissement :

On mesure les amplitudes X_n et X_{n+1} de 2 maxima successifs séparés de T_d ,
On a :

$$\frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{x(t_0)}{x(t_0 + T_d)} = \frac{X e^{-\xi\omega_0 t_0}}{X e^{-\xi\omega_0(t_0 + T_d)}} = e^{\xi\omega_0 T_d}$$

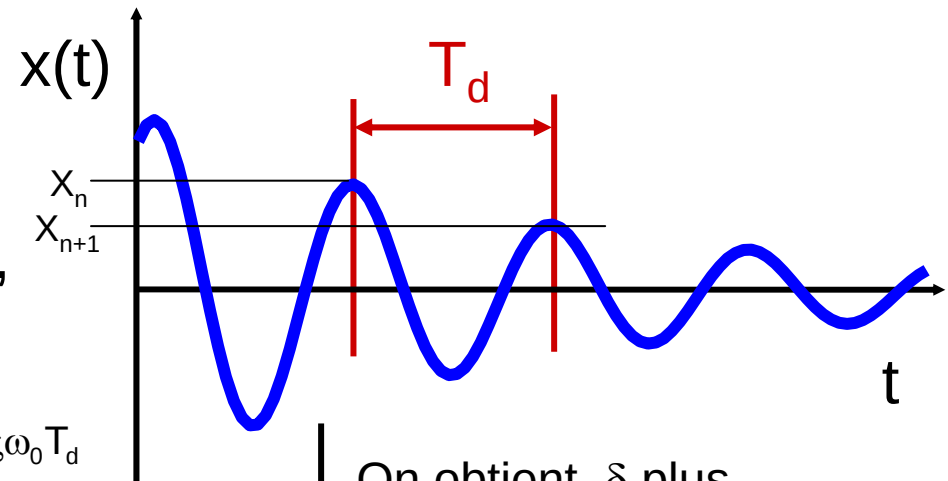
Décrément logarithmique

$$\text{Soit } \delta = \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) \Leftrightarrow \delta = \xi\omega_0 T_d = 2\pi\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

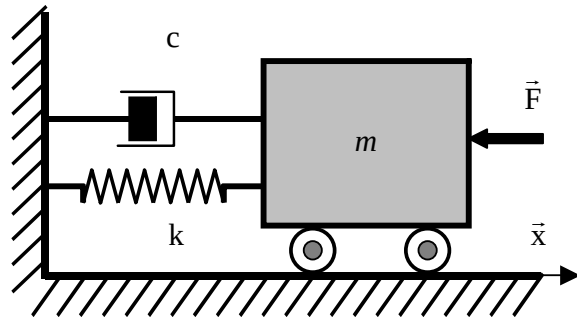
De δ déterminé par la mesure, on déduit l'amortissement ξ

$$\text{Rq: si } \xi \ll 1 \text{ alors } \delta = 2\pi\xi \Leftrightarrow \xi = \frac{\delta}{2\pi}$$



On obtient δ plus précisément avec des maxima séparés de pT_d :

$$\delta = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{X_n}{X_{n+p}}\right)$$

Oscillations forcées harmoniques

Rappel de l'équation du mouvement

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Excitation harmonique

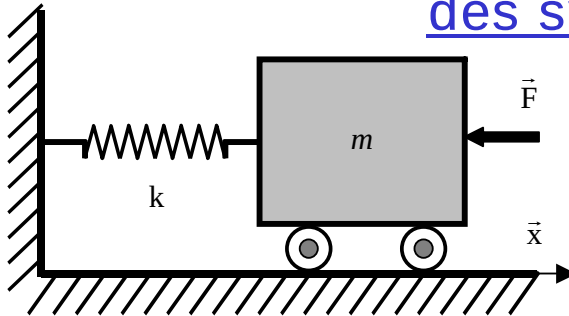
(notation complexe) :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 \operatorname{Re} \left[e^{j\Omega t} \right]$$

Réponse = Réponse transitoire $x_t(t)$ + Réponse permanente $x_p(t)$

- $x_t(t)$ = Réponse en régime libre (voir + haut)
- $x_p(t)$ = **mouvement après disparition du transitoire**
 - Harmonique de même pulsation Ω que l'excitation
 - Amplitude X et Déphasage ψ à déterminer

Oscillations forcées harmoniques des systèmes à 1DDL non amortis



L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\Omega t) \quad (1)$$

La solution générale est celle obtenue en oscillations libres

$$: \quad x_g(t) = X \cos(\omega_0 t - \phi)$$

La solution particulière de la forme : $x_p(t) = X \sin(\Omega t)$
est substituée dans (1) :

$$X(-m\Omega^2 + k) \sin(\Omega t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

D'où l'amplitude du mouvement forcé :

$$X = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

On note : $\beta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite

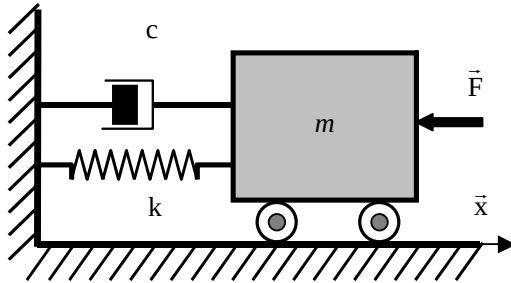
Le mouvement forcé s'écrit :

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k(1 - \beta^2)} \sin(\Omega t)$$

et **la solution complète** :

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

Oscillations forcées harmoniques des systèmes sous amortis



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \quad (2)$$

La solution générale est celle obtenue en oscillations libres :

$$x_g(t) = \left[X_g \cos(\omega_d t - \phi_g) \right] e^{-\xi\omega_0 t}$$

La solution particulière de la forme :
est substituée dans (2) pour obtenir
l'expression du **mouvement forcé** :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$$

$$X_p(\Omega) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

$$\phi_p(\Omega) = \text{Arctg}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

La **solution complète** : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

$$x(t) = \underbrace{\left[X_t \cos(\omega_d t - \phi_t) \right] e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t - \phi_p)}_{\text{Réponse permanente}}$$

Réponse transitoire

Réponse permanente

Oscillations forcées **harmoniques** des systèmes à 1DDL
Etude de la **réponse forcée permanente**

On a : $x_p(t) = X_{(\Omega)} \sin(\Omega t - \Phi_{(\Omega)})$ avec

$$X(\Omega) = X(\beta) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

et

$$\Phi(\Omega) = \Phi(\beta) = \text{Arctg}\left[\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right]$$

- Amplitude et phase de $x_p(t)$ dépendent de la pulsation Ω de l'excitation

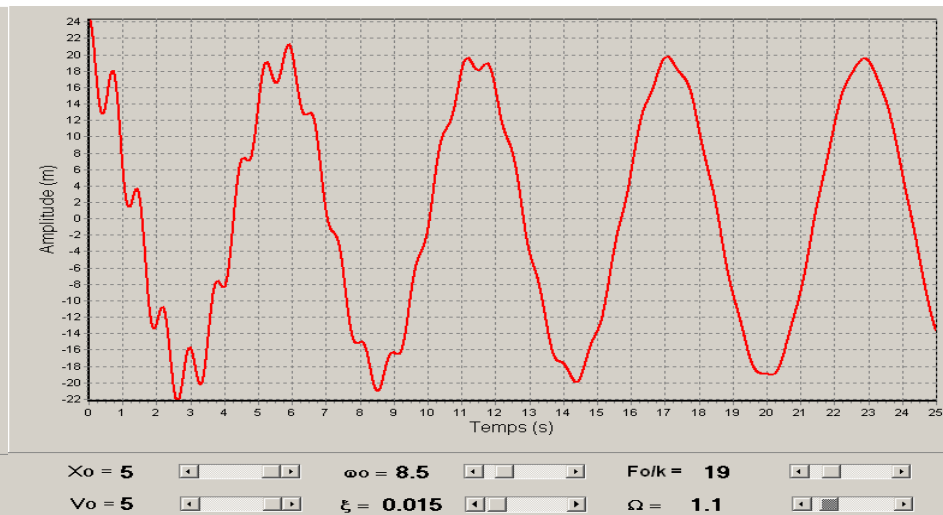
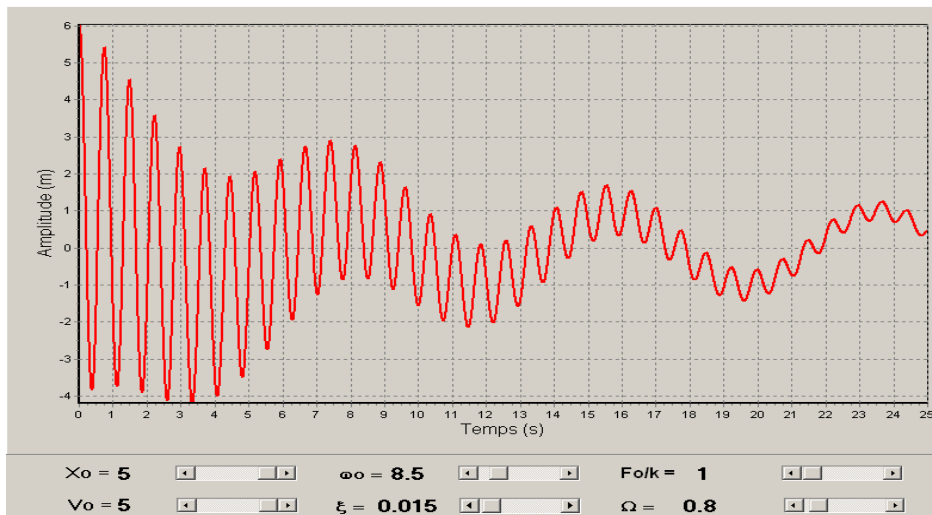
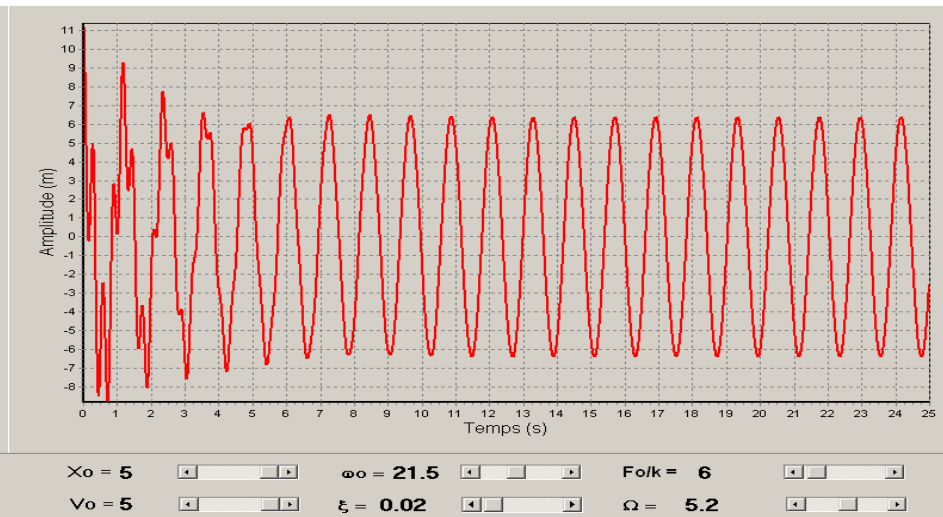
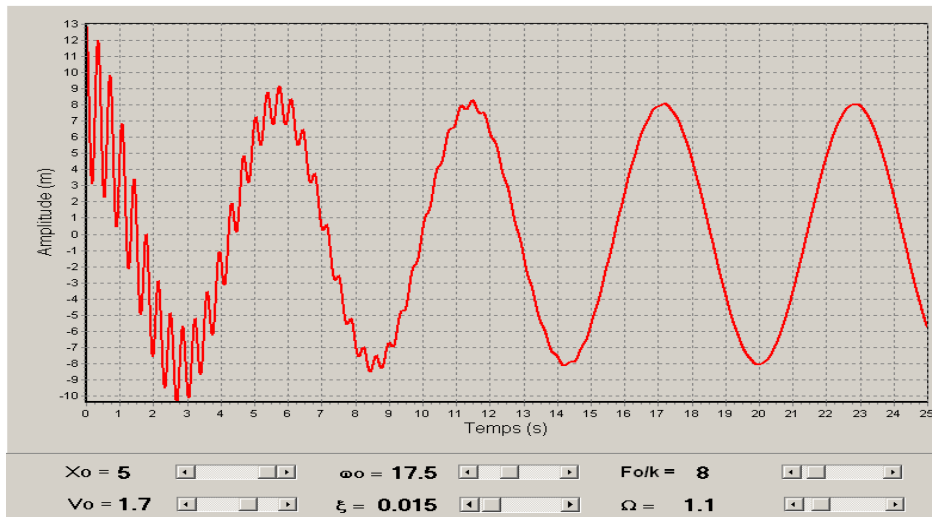
Coefficient d'amplification dynamique (sans dimension) :

$$A(\Omega) = A(\beta) = X(\beta) \frac{k}{F_0} = \frac{X(\beta)}{X_{st}} \Leftrightarrow A(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

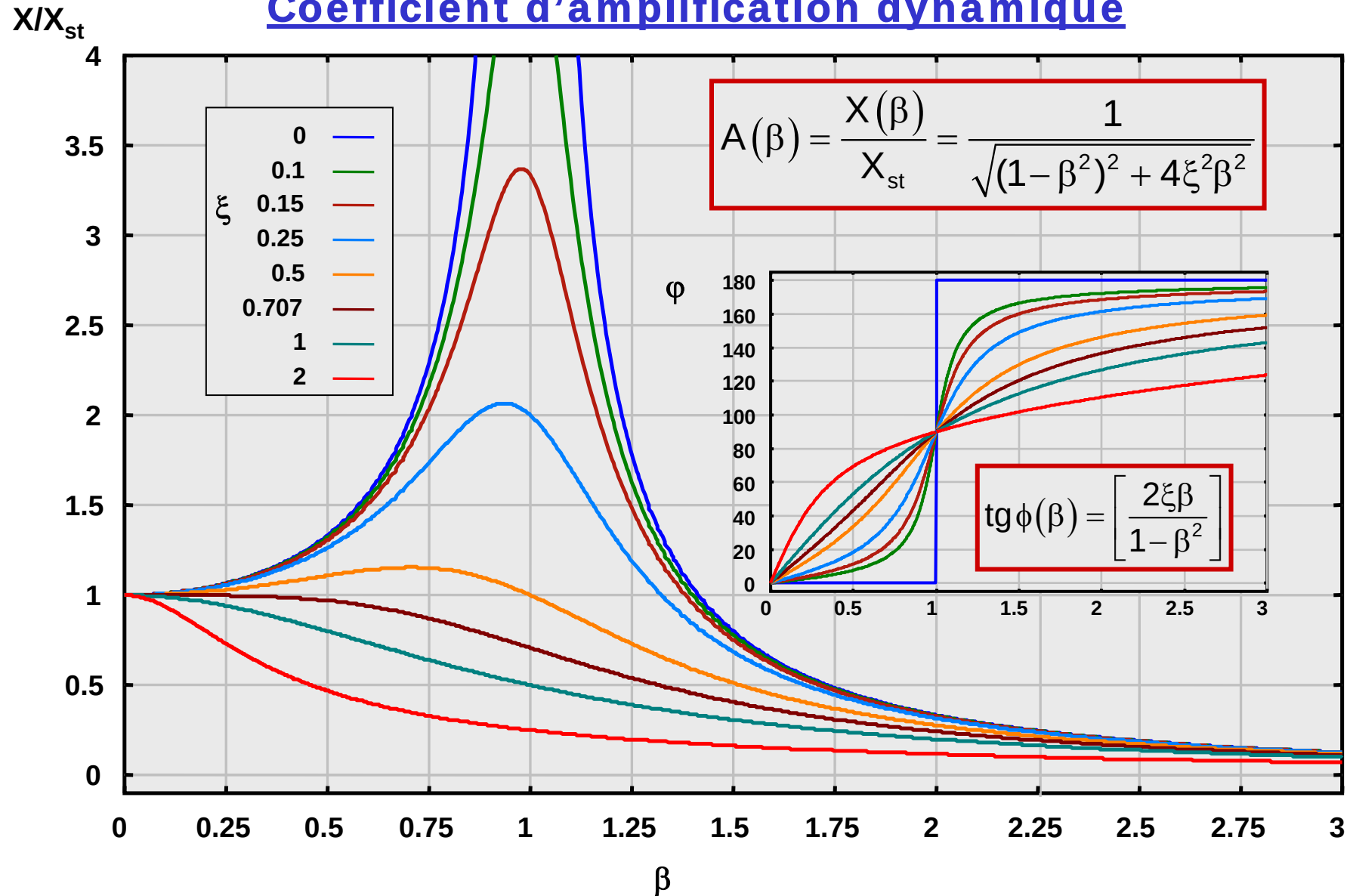
- $\Omega \rightarrow \omega_0$ ($\beta \rightarrow 1$) $\Rightarrow X(\Omega) \rightarrow \text{Max} \Rightarrow$ **Résonance**
- $\xi = 0 \rightarrow \Phi(\Omega) = 0$, excitation et réponse en phase.

Exemples de réponses
forcées harmoniques

$$x(t) = X_t \cos(\omega_d t - \phi_t) e^{-\xi \omega_0 t} + \frac{F_0}{k} \frac{\cos(\Omega t - \phi_p)}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2 \beta^2}}$$



Systèmes à 1DDL - Oscillations forcées harmoniques

Coefficient d'amplification dynamique

Systèmes à 1DDL - Oscillations forcées harmoniques
Exemples

1DDL Vertical

Régime libre

Régime forcé : 0.25 Hz

Régime forcé : 0.7 Hz

Régime forcé : 1 Hz

Régime forcé : 1.27 Hz

Régime forcé : 1.3 Hz

Régime forcé : 1.5 Hz

Régime forcé : 2 Hz

1DDL Horizontal

Régime libre

Régime forcé : 0.25 Hz

Régime forcé : 0.5 Hz

Régime forcé : 0.7 Hz

Régime forcé : 0.75 Hz

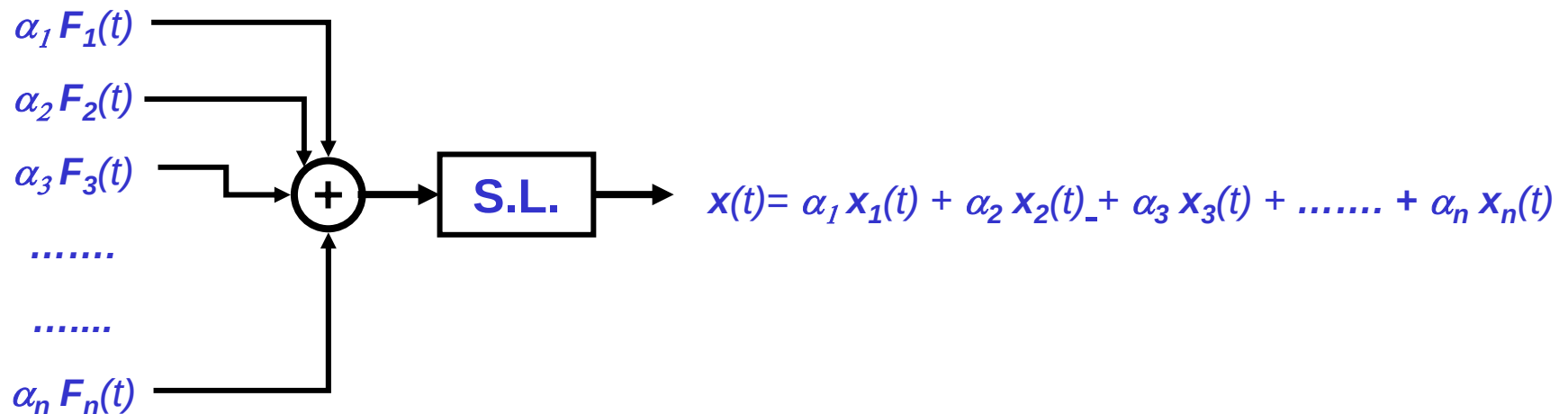
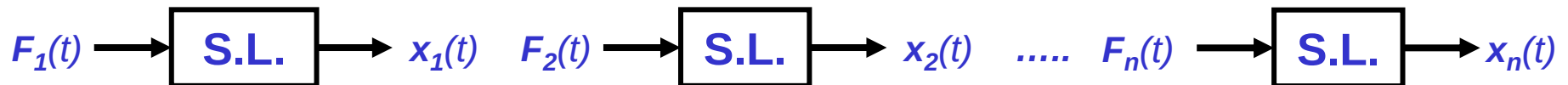
Régime forcé : 0.8 Hz

Régime forcé : 1 Hz

Régime forcé : 2 Hz

Système soumis à des excitations multiples
Principe de superposition

La réponse d'un système linéaire à une somme d'excitation est la superposition des réponses à chacune des excitations



Systèmes à 1DDL - 2 excitations harmoniques $\Omega_1 \approx \Omega_2$

Phénomène de Battement

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega_1 t) + F_1 \cos(\Omega_2 t) \rightarrow x_p(t) = X_1 \cos(\Omega_1 t - \Phi_1) + X_2 \cos(\Omega_2 t - \Phi_2)$$

$$X_+ = X_1 + X_2$$

$$2\Omega_+ = \Omega_1 + \Omega_2$$

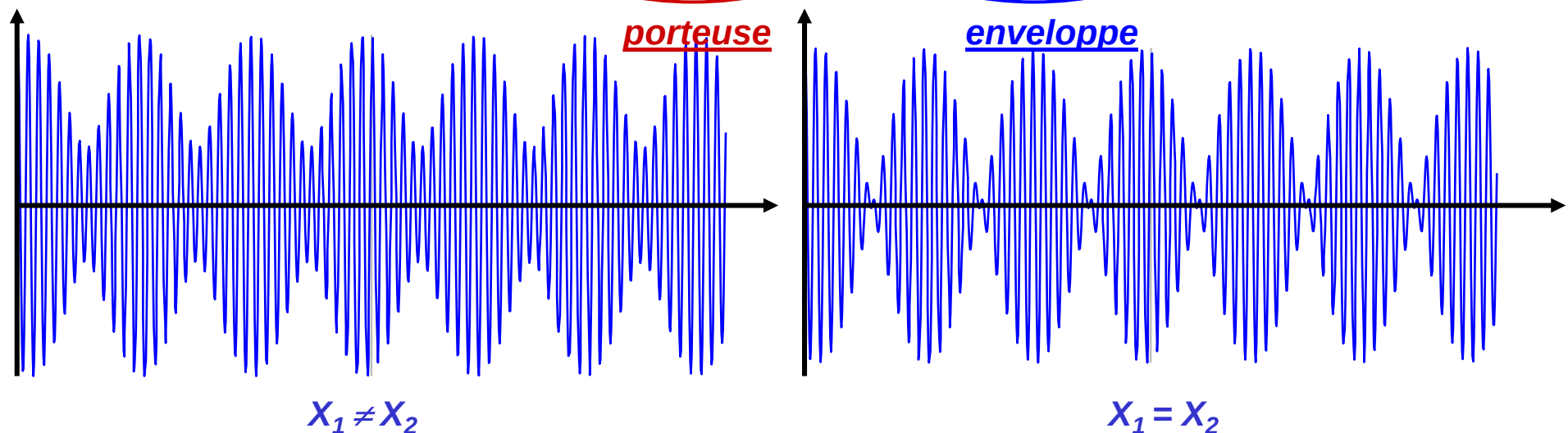
$$2\Phi_+ = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$X_- = X_1 - X_2$$

$$2\Omega_- = \Omega_1 - \Omega_2$$

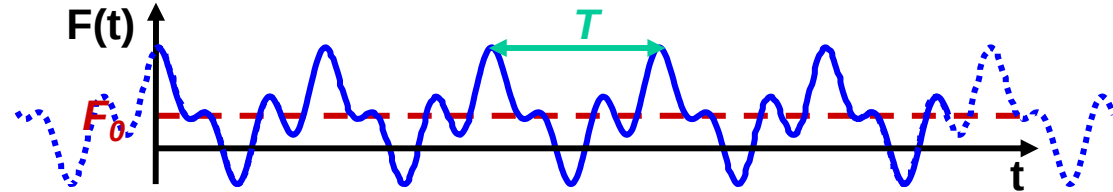
$$2\Phi_- = \Phi_1 - \Phi_2$$

$$x_p(t) = X_+ \cos(\Omega_+ t - \Phi_+) \cos(\Omega_- t - \Phi_-) - X_- \sin(\Omega_+ t - \Phi_+) \sin(\Omega_- t - \Phi_-)$$



Excitation T périodique Décomposition en Série de Fourier

- Une excitation de période T
i.e. telle que $F(t+nT) = F(t)$
peut s'écrire comme une série :



$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t) + B_n \sin(n\Omega t) \quad \text{ou} \quad F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\Omega t - \psi_n)$$

F_0 , A_n et B_n sont les **coefficients de Fourier**

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

Valeur moyenne

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt$$

ou

$$F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{B_n}{A_n}$$

Excitation T périodique
Réponse

A la composante harmonique $F_n(t)$ de l'excitation correspond la réponse harmonique $x_n(t)$ de même fréquence $n\Omega$:

$$F_n(t) = F_n \cos(n\Omega t - \psi_n) \longrightarrow x_n(t) = X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

Avec

$$X_n(n\Omega) = X(n\beta) = \frac{F_n}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - (n\beta)^2)^2 + 4\xi^2 (n\beta)^2}}$$

$$\phi_n(n\Omega) = \text{Arctg}\left(\frac{2\xi n\beta}{1 - (n\beta)^2}\right)$$

où

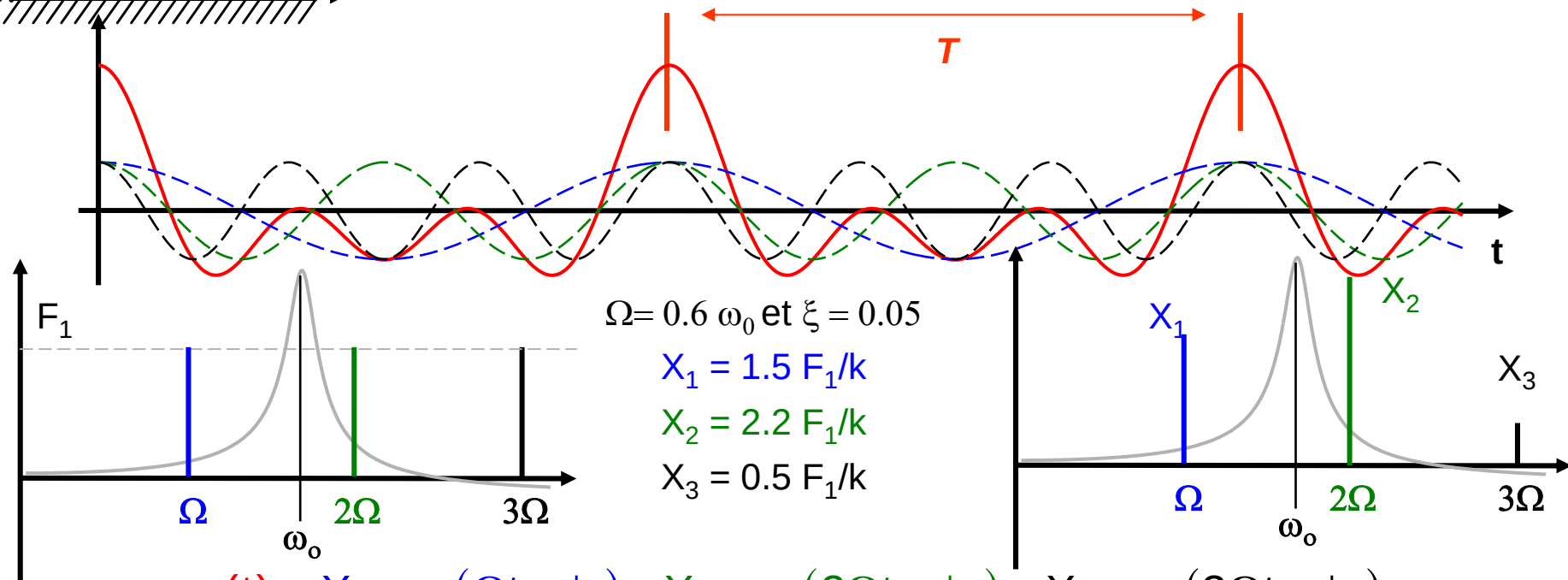
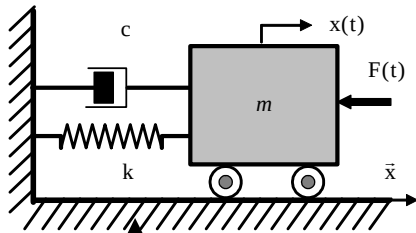
$$n\beta = \frac{n\Omega}{\omega_0}$$

Finalement par le principe de superposition on a :

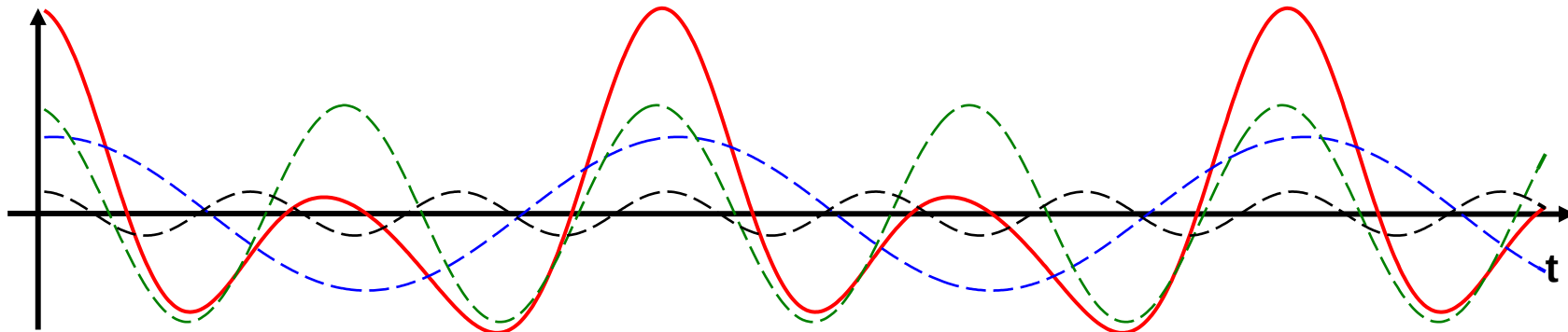
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

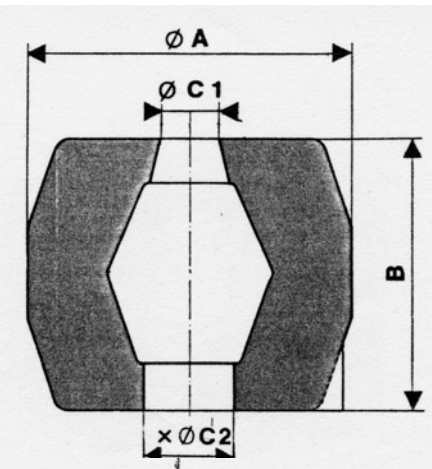
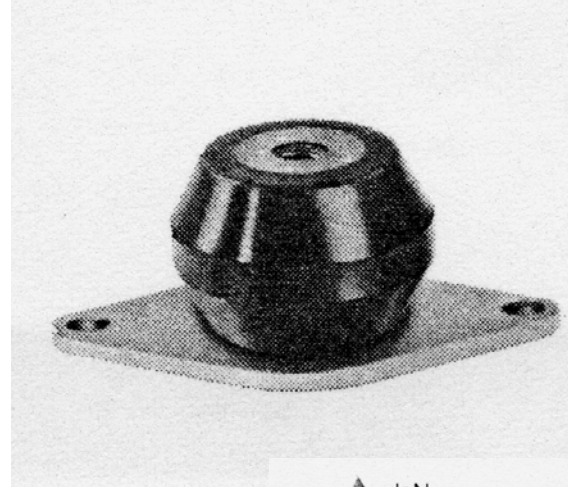
Exemple : Excitation à 3 composantes harmoniques

$$F(t) = F_1 \cos(\Omega t) + F_1 \cos(2\Omega t) + F_1 \cos(3\Omega t)$$



$$x(t) = X_1 \cos(\Omega t - \phi_1) + X_2 \cos(2\Omega t - \phi_2) + X_3 \cos(3\Omega t - \phi_3)$$



Problème d'isolation vibratoire

Charge statique nominale daN	Flèche $\pm 15\%$ mm	Ø A mm sous charge nominale	Hauteur B mm	Référence
60	10	80	40	810 780
100	15	105	70	810 766
150	18	124	90	810 768
400	20	136	90	810 769
600	24	175	120	810 773
800	26	170	140	810 784
800	16	175	90	810 779

