CHAPITRE 4

Méthodes numériques et conditionnement pour les systèmes d'équations linéaires

4.1 Système d'équations linéaires

Définition 4.1.1 *Soit n et m deux entiers naturels non nuls. Un système linéaire de n équations à m inconnues $x_1, ..., x_m$ est un système (S) de la forme:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_{1j}\ x_j + ... + a_{1m}\ x_m = b_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{i1}\ x_1 + a_{i2}\ x_2 + ... + a_{ij}\ x_j + ... + a_{im}\ x_m = b_i \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + ... + a_{nj}\ x_j + ... + a_{nm}\ x_m = b_n \end{array}\right. \qquad \text{(S)}$$

où les a_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ et les b_k $(1 \leq k \leq n)$ sont des éléments de $\mathbb{k}$ fixés.

Notation 4.1.1 *On note $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ la matrice du système (S).*

Forme matricielle: *Si on note* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ *le système* (S) *s'écrit :* $Ax = b.$

Exemple 4.1.1 *On considère le système (S) de deux équations à trois inconnues :*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 - 3x_2 = 2 \end{cases} \tag{S}$$

La matrice A *de ce système est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

et la forme matricielle est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.1.1 Conditionnement d'un système d'équations linéaires

Définition 4.1.2 *Soit* $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$ *une matrice inversible. Le nombre noté* $cond(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|$ *est appelé le conditionnement de la matrice* A*, relativement à la norme matricielle considérée.*

Théorème 4.1.1 *Soient* $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$ *une matrice inversible,* b *un vecteur non nul.*

1- Soient $x,\ x + \delta x$ *les solutions des systèmes* $Ax = b$ *et* $A(x + \delta x) = b + \delta b.$

On suppose que $b \neq 0,$ *alors on a :*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \tag{4.1.1}$$

et c'est la meilleure possible (c'est-à-dire : $\exists b \neq 0$ *et* $\delta b \neq 0$ *tels que (3.1) devienne égalité).*

2- Soient $x,\ x + \delta x$ *les solutions des systèmes* $Ax = b$ *et* $(A + \delta A)(x + \delta x) = b.$

On suppose que $b \neq 0,$ *alors on a :*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{4.1.2}$$

et c'est la meilleure possible (c'est-à-dire : $\exists b \neq 0$ et $\delta b \neq 0$ tels que (3.2) devienne égalité).

Preuve *1- Soient $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$, d'où $A^{-1}b = x$, $A\delta x = \delta b$ et $A^{-1}\delta b = \delta x$.*

On a : $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, ce qui implique

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|} \tag{*}$$

et

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\delta b\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta b\|}{\|x\|}$$

D'après (*), il vient

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta b\|}{\|x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| . \|\delta b\| . \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

ce qui implique

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond\,(A)\, \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Pour verifier que c'est la meilleure, prendre $b \neq 0$ et $\delta b \neq 0$ tels que

$$\left\|A^{-1}\delta b\right\| = \left\|A^{-1}\right\| \|\delta b\|$$

on a l'égalité dans (3.1).

2- On a : $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ implique $\delta x = -A^{-1}\delta A\,(x + \delta x)$ ce qui implique

$$\|\delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| . \|\delta A\| \|x + \delta x\|$$

d'où

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = \frac{\|A^{-1}\delta A\,(x + \delta x)\|}{\|x + \delta x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| . \|\delta A\| = cond\,(A)\, \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Pour verifier que c'est la meilleure, prendre un vecteur $y \neq 0$ tel que :

$$\left\|A^{-1}y\right\| = \left\|A^{-1}\right\| . \|y\| \tag{**}$$

et un scalaire $\beta \neq 0$. et on prend alors : $b = (A + \beta I_n)\, y$, $\delta A = \beta I_n$ et $\delta x = -\beta A^{-1}y$, ce qui implique $x + \delta x = y$, $Ax = b$ et $(A + \delta A)(x + \delta x) = (A + \beta I_n)\, y = b$.

D'où d'après (**):

$$\|\delta x\| \leq |\beta| . \left\|A^{-1}y\right\| = \left\|A^{-1}\right\| . \|y\| = \left\|A^{-1}\right\| . \|\delta A\| \|x + \delta x\| .$$

De plus si β n'est pas une valeur propre de A, alors $b \neq 0$.

Exercice 4.1.1 *1- Pour toute matrice A inevrsible. Montrer que*

- $cond(A) \geq 1$

- $cond(A) = cond(A^{-1})$

- $cond(\alpha A) = cond(A)$ *pour tout* $\alpha \geq 0.$

2- On désigne par $cond_2(A)$ *le conditionnement de la matrice* A*, relatif à la norme euclidienne. Montrer que*

Si A *est une matrice normale (c'est-à-dire* $A \times A^T = A^T \times A$*),*

$$cond_2(A) = \frac{\max\limits_i \ |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i \ |\lambda_i(A)|},$$

où les $\lambda_i(A)$ *sont les valeurs propres de la matrice* A*.*

- Si A *est une matrice unitaire (c'est-à-dire* $A \times A^* = A^* \times A = I_n$*) ou orthogonale (c'est-à-dire* $A \times A^T = A^T \times A = I_n$*), alors :*

$$cond_2(A) = 1.$$

4.2 Méthodes itératives

On va voir un type de méthodes intératives de résolution du système $Ax = b$.

Soit la forme matricielle $Ax = b$ avec $A \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$, $\det(A) \neq 0$ et $b \in \Bbbk^n$. Une méthode intérative se présente sous la forme

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ vecteur arbitraire,} \\ \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \ k \geq 0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

avec $B \in \mathbf{M}_n(\Bbbk)$ en fonction de A et b, c un vecteur de $\Bbbk^n$ construit à partir de b.

4.2.1 Convergence des méthodes intératives

Définition 4.2.1 *La méthode itérative (3.2) est dite convergente si pour tout* $x^{(0)}$

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} x^{(k)} = x^*$$

où x^* est la solution de $Ax = b$.

Remarque 4.2.1 *1- On a alors* $x^* = Bx^* + c$.

2- Si on pose $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, *pour* $k \geq 0$

Comme

$$\begin{cases} x^* = Bx^* + c \\ et \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases},$$

on a

$$e^{(k)} = Bx^{(k-1)} - Bx^* = Be^{(k-1)} = ... = B^k e^{(0)}$$

de plus $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} x^{(k)} = x^*$ *équivaut à* $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} e^{(k)} = 0$ *équivaut à* $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} B^k e^{(0)} = 0$.

Donc la méthode itérative (3.2) est convergente si

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} B^k v = 0, \ \forall v$$

ce qui est équivaut à

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\| B^k v \right\| = 0, \ \forall v$$

pour toute norme vectorielle $\|.\|$.

Critère de convergence des méthodes itératives

Théorème 4.2.1 *Les propositions suivantes sont equivalentes :*

(i) La méthode (3.2) est convergente vers x^* *tel que* $x^* = Bx^* + c$;

(ii) $\rho(B) < 1$;

(iii) $\|B\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle* $\|.\|$.

Preuve $\underline{(i) \implies (ii)}$

Supposon que $\rho(B) \geq 1$, $\rho(B) = |\lambda|$, *donc il existe un vecteur* q *tels que :*

$$q \neq 0, \ Bq = \lambda q \ \text{et} \ |\lambda| \geq 1$$

ce qui implique

$$\forall k \geq 0, \ \ \left\| B^k q \right\| = \left\| \lambda^k q \right\| = \left| \lambda^k \right| \|q\| = |\lambda|^k \|q\| \geq \|q\|$$

ce qui contredit

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\| B^k q \right\| = 0.$$

$\underline{(ii) \implies (iii)}$

D'après le théorème (2.3) : $\forall \epsilon > 0$, *il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que :*

$$\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i)*Soit* $\|.\|$ *une norme matricielle subordonnée, d'après la Proposition 2.6,*

$$\forall k \geq 0,\ \forall v \in \mathbb{k}^n,\ 0 \leq \left\|B^k v\right\| \leq \left|\left\|B^k\right\|\right| \|v\| \leq \|B\|^k \|v\|.$$

Puisque $\|B\| < 1$, *alors*

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \|B\|^k = 0$$

ce qui implique

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left\|B^k v\right\| = 0.$$

4.2.2 Quelques méthodes itératives particulières

On décompose A sous la forme $A = M - N$ avec M façile à inverser. Alors :

$$Ax = b \text{ si et seulement si } x = M^{-1}.N.x + M^{-1}.b$$

ce qui équivaut à

$$x = B.x + c$$

avec

$$\begin{cases} B = M^{-1}.N \\ \text{et} \\ c = M^{-1}.b \end{cases},$$

et on s'intéresse à la méthode intérative (3.2).

Pratiquement, on résout les systèmes linéaires successifs :

$$\text{pour } k \geq 0,\ M.x^{(k+1)} = N.x^{(k)} + b.$$

a). Méthode de Jacobi

On suppose que $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, ..., n.$

On décompose A sous la forme $A = D - (E + F)$ avec

$$\begin{cases} M = D = diag\,(a_{ii}) \ \ \text{(c'est-à-dire diagonale de } A) \\ \text{et} \\ N = E + F \end{cases}$$

où

$$E = \begin{cases} -a_{ij}, \text{ si } i > j \\ \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

et

$$F = \begin{cases} -a_{ij}, \text{ si } i < j \\ \\ 0, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

En partant de $Bx^{(k)} + c$ avec

$$\begin{cases} B = M^{-1}.N = D^{-1}.(E+F) \\ \text{et} \\ c = D^{-1}.b \end{cases},$$

on obtient l'algorithme suivant :

Algorithme 4.2.1

$$\begin{cases} x^{(0)} \textit{ donnée initiale} \\ \\ x^{(k+1)} = J.x^{(k)} + c, \ k \geq 0 \end{cases}.$$

où $J = D^{-1}.(E+F) = I_n - D^{-1}.A$ *est appelée matrice de Jacobi.*

En posant $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$, on est conduit à résoudre $D.x^{(k+1)} = (D-A).x^{(k)} + b$ c'est-à-dire le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1^{(k+1)} = -a_{12}\ x_2^{(k)} - a_{13}\ x_3^{(k)} - ... - a_{1n}\ x_n^{(k)} + b_1 \\ . \\ a_{22}\ x_2^{(k+1)} = -a_{21}\ x_2^{(k)} - a_{23}\ x_3^{(k)} - ... - a_{2n}\ x_n^{(k)} + b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{nn}\ x_n^{(k+1)} = -a_{n1}\ x_1^{(k)} - a_{n2}\ x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}\ x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{cases}$$

b). Méthode de Gauss-Seidel

Posons $M = D - E,\ N = F,$ et $G = M^{-1}.N = (D-E)^{-1}.F.$

On pourait améliorer la méthode précédente en utilisant les quantitées déjà calculées :

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1^{(k+1)} = -a_{12}\ x_2^{(k)} - a_{13}\ x_3^{(k)} - ... - a_{1n}\ x_n^{(k)} + b_1 \\ . \\ a_{22}\ x_2^{(k+1)} = -a_{21}\ x_2^{(k)} - a_{23}\ x_3^{(k)} - ... - a_{2n}\ x_n^{(k)} + b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{nn}\ x_n^{(k+1)} = -a_{n1}\ x_1^{(k)} - a_{n2}\ x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}\ x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{cases}$$

ce qui revient à écrire l'algorithme suivant :

Algorithme 4.2.2

$$\begin{cases} x^{(0)}\ \textit{donnée initiale} \\ \\ D.x^{(k+1)} = E.x^{(k+1)} + F.x^{(k)} + b \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x^{(0)}\ \textit{donnée initiale} \\ \\ x^{(k+1)} = G.x^{(k)} + (D-E)^{-1}\, b \end{cases}$$

où $G = (D-E)^{-1}.F$ *est appelée matrice de Gauss-Seidel. Elle est inversible si* $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, ..., n.$

c). <u>Méthode de relaxation</u>

Pour $\omega \neq 0$, en posant $M = \frac{1}{\omega}\ D - E$, $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)\ D + F$, et $R_\omega = M^{-1}N = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}.D + F\right)$, on a

$$A = M - N = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}.D + F\right)$$

et

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1^{(k+1)} = a_{11}\ x_1^{(k)} - \omega \left\{ a_{11}\ x_1^{(k)} + a_{12}\ x_2^{(k)} + ... + a_{1n}\ x_n^{(k)} \right\} + \omega b_1 \\ . \\ a_{22}\ x_2^{(k+1)} = a_{22}\ x_2^{(k)} - \omega \left\{ a_{21}\ x_2^{(k)} + a_{22}\ x_2^{(k)} + ... + a_{2n}\ x_n^{(k)} \right\} + \omega b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{nn}\ x_n^{(k+1)} = a_{nn}\ x_n^{(k)} - \omega \left\{ a_{n1}\ x_1^{(k)} + a_{n2}\ x_2^{(k)} + ... + a_{nn}\ x_n^{(k)} \right\} + \omega b_n \end{cases}$$

ce qui revient à écrire l'algorithme suivant :

Algorithme 4.2.3

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée initiale} \\ \\ \left(\frac{1}{\omega}D - E\right).x^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}.D + F\right).x^{(k)} + b \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée initiale} \\ \\ x^{(k+1)} = R_\omega.x^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} b \end{cases}$$

où $R_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}.D + F\right)$ *est appelée matrice de relaxation.*

Remarque 4.2.2 *1- Pour* $\omega = 1,\ R_\omega = G.$

2- Comme $a_{ii} \neq 0$ *pour tout* i, $\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)$ *est inversible.*

3- Lorsque $\omega > 1$, *on parle de sur-relaxation.*

4- Lorsque $\omega < 1$, *on parle de sous-relaxation.*

4.2.3 Convergence des méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel, et relaxation

Théorème 4.2.2 *Soit* A *une matrice symétrique défnie positve, décomposée sous la forme* $A = M - N$ *avec* M *inversible.*

Si la matrice symétrique $M^T + N$ *est définie positive, alors :*

$$\rho\left(M^{-1}.N\right) < 1.$$

Preuve *1- M^T+N est symétrique car : $A=M-N$ implique $M=A+N$ ce ci implique $M^T=A^T+N^T$,*

Puisque A symétrique, donc

$$M^T+N=A^T+N^T+N=A+N^T+N=M+N^T.$$

2- Comme A est symétrique définie positive, l'application

$$v\in\mathbb{R}^n \longrightarrow \|v\|=\left(v^T\ Av\right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On considère alors la norme matricielle $\|.\|$ induite par cette norme vectorielle.

$$\left\|M^{-1}.N\right\|=\left\|I_n-M^{-1}.A\right\|=\sup_{\|v\|=1}\left\|v-M^{-1}.Av\right\|$$

Soit v un vecteur tel que $\|v\|=1$. On pose $w=M^{-1}.Av$, on a

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= (v-w)^T\ A(v-w)=1-v^T.Aw-w^T.Av+w^T.Aw\\ &= 1-w^T.M^Tw-w^T.Mw+w^T.Aw\\ &= 1-w^T\left(M^T+N\right)w.\end{aligned}$$

Si $v\neq 0$, alors $w=M^{-1}.Av\neq 0$. D'où

$$w^T\left(M^T+N\right)w>0.$$

Donc si la matrice symétrique M^T+N est définie positive, on a

$$\|v-w\|^2=1-w^T\left(M^T+N\right)w<1.$$

Exemple 4.2.1 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & ... & ... & 0 & 0\\ -1 & ... & ... & ... & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & ... & ... & ... & -1\\ 0 & 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1- Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v^T A v = v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (v_i + v_{i-1})^2 > 0, \ v \neq 0,$$

donc la matrice symétrique A est définie positive.

2- Pour la méthode de Jacobi : on prend

$$\begin{cases} M = D \\ \\ N = E + F \end{cases}$$

$A = M - N$ est symétrique définie positive, car

$$v^T \left(M^T + N\right) v = v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (v_i + v_{i-1})^2 > 0, \ v \neq 0.$$

$M^T + N$ est définie positive ce qui implique

$$\rho\left(M^{-1}.N\right) < 1.$$

Théorème 4.2.3 *(Ostrowski-Reich)* ***(Conditions suffisante de convergence de la méthode de relaxation)***

Si A est symétrique défnie positve, la méthode de relaxation converge pour $\omega \in]0, \ 2[$.

Preuve *On applique le théorème précédent.*

On a $A = M - N$ avec

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{\omega} D - E \\ \\ N = \left(\dfrac{1-\omega}{\omega}\right) D + F \end{cases}$$

Comme $E^T = F$, alors

$$\begin{aligned} M^T + N &= \frac{1}{\omega} D - E^T + \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) D + F \\ \\ &= \frac{1}{\omega} D + \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) D \\ \\ &= \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right) D \end{aligned}$$

Puisque $\omega \in]0,\ 2[$, *alors*

$$\left(\frac{2-\omega}{\omega}\right) > 0.$$

Donc $M^T + N = \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right) D$ *est défnie positve.*

Théorème 4.2.4 ***(Conditions nécessaire de convergence de la méthode de relaxation)***

1- Le rayon spectral de la matrice de relaxation est tel que $\rho(R_\omega) \geq |\omega - 1|$.

2- Ainsi, si $\omega \notin]0,\ 2[$, *la méthode de relaxation ne converge pas.*

Preuve *On a* $R_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)D + F\right) = M^{-1}N$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(R_\omega) &= \det(R_\omega) = \det\left(M^{-1}N\right) = \frac{\det(N)}{\det(M)} \\
&= \frac{\det\left(\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)D + F\right)}{\det\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)^n}{\frac{1}{\omega^n}} . \frac{\det D}{\det D} = (1-\omega)^n .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\rho(R_\omega))^n \geq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(R_\omega)| = |1-\omega|^n ,$$

donc $\rho(R_\omega) \geq |1-\omega|$ *et la méthode de relaxation ne peut converger que pour* $\omega \in]0,\ 2[$.

Exercice 4.2.1 *Soit A une matrice hermitienne définie positive. Montrer que pour tout* $\omega \in]0,\ 2[$, *la méthode de relaxation converge.*

4.2.4 Autres méthodes itératives :

Méthode du gradient à pas fixe

L'algorithme du gradient à pas fixe généralement est donné comme suit :

Algorithme 4.2.4

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée initiale} \\ \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha.\left(A.x^{(k)} - b\right),\ k \geq 0, \end{cases}$$

où α est une constante fixée.

Si on pose $r^{(k)} = A.x^{(k)} - b,$ on a

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha.r^{(k)}$$

ce qui implique

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha.Ar^{(k)} = (I_n - \alpha.A)\,.r^{(k)}.$$

Condition nécessaire et suffisante de convergence : La méthode du gradient à pas fixe est converge si

$$\rho\,(I_n - \alpha.A) < 1.$$

Proposition 4.2.1 *Si la matrice A est symétrique définie positive alors la méthode du gradient à pas fixe converge si et seulement si*

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$$

avec λ_n la plus grande valeur propre de A.

De plus $\alpha = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ est une valeur optimale (c'est-à-dire que $I_n - \alpha.A$ a le plus petit rayon spectral).

Méthode du gradient à pas optimal

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donnée initiale} \\ \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k.\left(A.x^{(k)} - b\right),\ k \geq 0, \end{cases}$$

où α_k est choisi tel que :

$$r^{(k+1)} \perp r^{(k)}$$

avec $r^{(k)} = A.x^{(k)} - b$. Donc $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k.A.r^{(k)}$.

$r^{(k+1)} \perp r^{(k)}$ équivaut dire que $\left\langle r^{(k)} - \alpha_k.A.r^{(k)},\ r^{(k)}\right\rangle = 0$ équivaut à

$$\alpha_k = \frac{\left\|r^{(k)}\right\|_2^2}{\left\langle r^{(k)}A,\ r^{(k)}\right\rangle}$$

Algorithme 4.2.5 *L'algorithme de la méthode du gradient à pas optimal est donné par :*

(0) $k = 0$

$x^{(0)}$ *donnée initiale*

(1) calcul de $r^{(k)} = A.x^{(k)} - b$

(2) Si $r^{(k)} = 0$, *c'est terminé.*

(3) Si $r^{(k)} \neq 0$, *on calcul :*

$$\alpha_k = \frac{\left\| r^{(k)} \right\|_2^2}{\langle A.r^{(k)},\ r^{(k)} \rangle}$$

et

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k . r^{(k)}$$

(4) $k := k + 1$ *et aller à (1).*

Exemple 4.2.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution du système $Ax = b$ *est* $x = \binom{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}}$.

Les valeurs propres de la matrice A *sont:*

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} > 0 \\ et \\ \lambda_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} > 0 \end{cases}.$$

Remarquons que A *est symétrique car*

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

de plus, elle est définie positive (Proposition 2.5). Donc A *est symétrique définie positive.*

On choisit une donnée initiale

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et on calcul le premier itéré pour :

a). ***Méthode de Jacobi:***

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

*b). **Méthode de Gauss-Seidel**:*

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

*c). **Méthode du gradient à pas fixe:***

On a $r^{(0)} = A.x^{(0)} - b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Convergence de la méthode:

Comme A *est symétrique définie positive, si on choisit* α *(Proposition 3.2) tel que:*

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_2} = \frac{2}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = 0,55279,$$

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2}{5}.$$

La méthode converge.

Calcul de $x^{(1)}$: *Si on prend* $\alpha = \frac{1}{2} < 0,55279,$ *on obetient*

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - \alpha.r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = \frac{2}{5} < 0,55279,$ *on obetient*

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - \alpha.r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*d). **Méthode du gradient à pas optimal**:* $r^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Calcul de $\alpha_{(0)}$: *On a*

$$\left\| r^{(0)} \right\|_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{17}{2}$$

et

$$\begin{aligned} \left\langle A.r^{(0)},\ r^{(0)} \right\rangle &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{123}{4}. \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha_0 = \frac{\left\|r^{(0)}\right\|_2^2}{\langle A.r^{(0)},\ r^{(0)}\rangle} = \frac{17}{2} \times \frac{4}{123}$$

$$= \frac{34}{123}$$

Calcul de $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{34}{123}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$