

Chapitre 4

LIGNES D'INFLUENCE DES STRUCTURES ISOSTATIQUES

4.1 Introduction

L'étude d'un effet élastique E sous l'action d'un système de chargement variable dans le temps ou mobiles, tel que, l'effort normal, l'effort tranchant, moment fléchissant, le déplacement, la rotation dans une section donnée ou la réaction d'un appui ; nous entraîne à considérer la notion de lignes d'influence d'un effet quelconque E . A titre d'exemple, le calcul des ouvrages d'art tels que les divers type de ponts (en béton armé, métallique ou mixtes), fait intervenir cette notion de lignes d'influence, étant donnée que ce type de structure est sollicité par des charges mobiles et variables dans le temps et l'espace.

4.2 Définition d'une ligne d'influence

Considérons une poutre à plan moyen, chargée dans ce plan par des charges verticales. Soit un effet E (M , N , T , déplacement ou réaction d'appui, etc.), dans une section A donnée et fixée au préalable, d'abscisse x (figure 1). La loi de variation de ε (α) due à l'action d'une charge unitaire verticale ($P=1$), d'abscisse α variable, est dite fonction d'influence ou **ligne d'influence** de l'effet élastique E dans la section A , évaluée sous l'action d'une charge verticale unitaire ou d'un couple unitaire ($\Pi=1$).

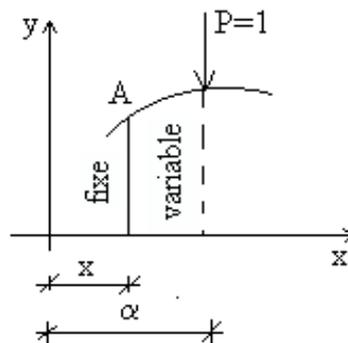


Figure 1

4.3 Utilisation des lignes d'influences

En effet, puisqu'on est dans le domaine élastique, on peut calculer à l'aide des lignes d'influence la valeur d'un effet élastique quelconque, sous n'importe quel type chargement, en appliquant le principe de superposition des actions des chargements réellement appliqués.

a) Cas d'un système de charges concentrées (figure 2)

En fait, l'effet d'un système de charges concentrées P_i , d'abscisse α_i vaut :

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \varepsilon(\alpha_i) \quad (4.1)$$

b) Cas d'un système de charges réparties (figure 3)

Si on considère une charge répartie variable ou constante de densité $q(\alpha)$, comprise entre les abscisses α_0 et α_1 , dans ce cas :

$$E = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} q(\alpha) \varepsilon(\alpha) d\alpha \quad (4.2)$$

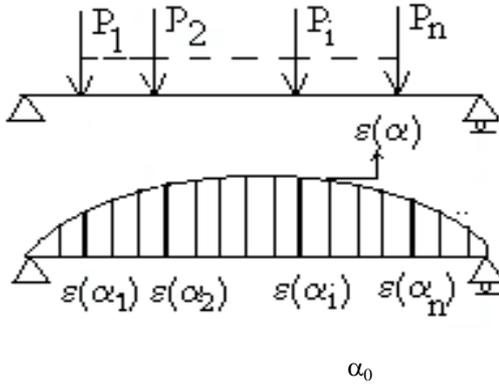


Figure 2: Système de charges concentrées

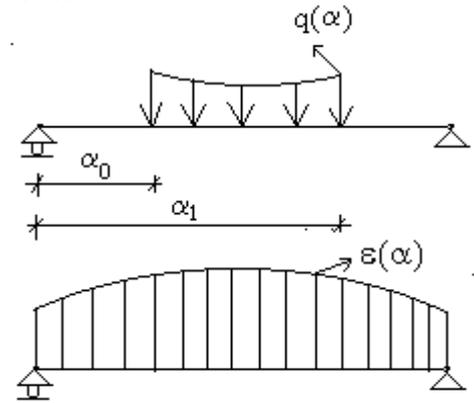


Figure 3: Charges réparties

c) Lignes d'influence dans le cas d'un couple unitaire

Soit un couple C, appliqué en un point d'abscisse α d'une poutre isostatique, ce couple est la limite de deux charges égales mais opposées ± P, appliquées aux sections α et (α + dα), quand dα tend vers 0 et P tend vers ∞, alors Pdα tend vers C=1 (figure 4)

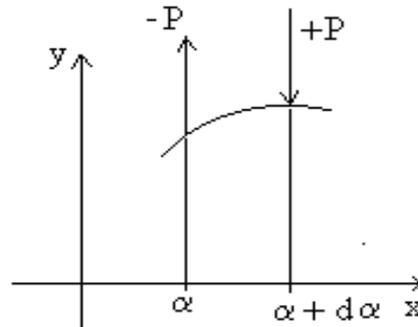


Figure 4

$$\varepsilon_2(\alpha) = \lim_{d\alpha \rightarrow 0} \left\{ P \left[\frac{\varepsilon_1(\alpha + d\alpha) - \varepsilon_1(\alpha)}{(\alpha + d\alpha) - (\alpha)} \right] \right\} = P \frac{d\varepsilon_1(\alpha)}{d\alpha} \quad (4.3)$$

Donc, à la limite lorsque :

$$P \rightarrow \infty \text{ et } d\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow P[\varepsilon_1(\alpha + d\alpha) - \varepsilon_1(\alpha)] = \left[P \frac{d\varepsilon_1(\alpha)}{d\alpha} \right] d\alpha = C \frac{d\varepsilon_1(\alpha)}{d\alpha} \quad (4.4)$$

Si C = 1, on peut conclure que, la fonction d'influence ε₂(α) due à un couple unitaire, est donc la dérivée par rapport à α, de celle ε₁(α), due à une charge unitaire.

$$\varepsilon_2(\alpha) = \frac{d\varepsilon_1(\alpha)}{d\alpha} \quad (4.5)$$

Dans le cas où une structure est soumise simultanément aux actions de forces extérieures concentrées P_i, aux charges réparties variables ou constantes q_i(α), aux couples concentrés C_i et aux couples répartis variables ou constants c_i(α), la valeur de l'effet total est donnée par la relation suivantes :

$$E = \sum \left[\vec{P}_i \varepsilon_{1i}(\alpha) + \int \vec{q}_i(\alpha) \varepsilon_{1i}(\alpha) d\alpha + \vec{C}_i \varepsilon_{2i}(\alpha) + \int \vec{c}_i(\alpha) \varepsilon_{2i}(\alpha) d\alpha \right] \quad (4.6)$$

4.4 Lignes enveloppes

Les lignes d'influences permettent de rechercher les valeurs extrêmes (minimum et maximum) d'un effet quelconque E, sous l'action de charges et surcharges variées.

Si on considère à titre d'exemple (figure 5), la ligne d'influence d'un effet E sous l'action d'une charge unitaire, et supposons que la courbe représentative de cette ligne d'influence présente deux zones, l'une correspondant à des ordonnées positives et l'autre à des ordonnées négatives.

L'effet d'une charge répartie de densité constante q pouvant être appliquée à une partie seulement de la poutre est toujours compris entre deux valeurs qA_1 et $-qA_2$, donc :

$$-qA_2 \leq E \leq qA_1$$

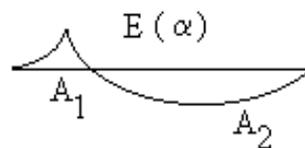


Figure 5

L'effet maximum E produit par une charge q constante et répartie uniformément sur une longueur d, s'obtiendra en disposant cette charge sur un segment de droite AB = d, tel que : Les ordonnées de la ligne d'influence en A et B soient AA' et BB' (figure 6).

Si on déplace la charge à droite ou à gauche d'une petite quantité ξ , l'effet E diminue.

L'effet maximum correspondant à une corde A'B' parallèle à AB=d

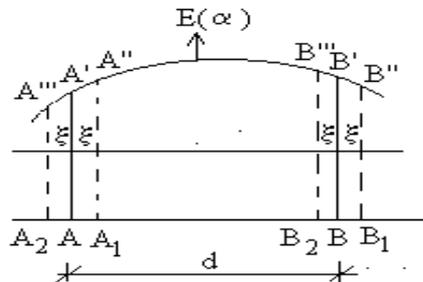


Figure 6

On peut donc déterminer aisément à l'aide des lignes d'influence, le maximum le minimum de l'effet E dans une section d'abscisse x, fixé au préalable. En reportant sur l'ordonnée de l'abscisse x, la valeur maximale et la valeur minimale, on obtient en faisant varier x, la ligne enveloppe de l'effet considéré E. Ces lignes enveloppe mettent en évidence les extremums de l'effet E dans chaque section.

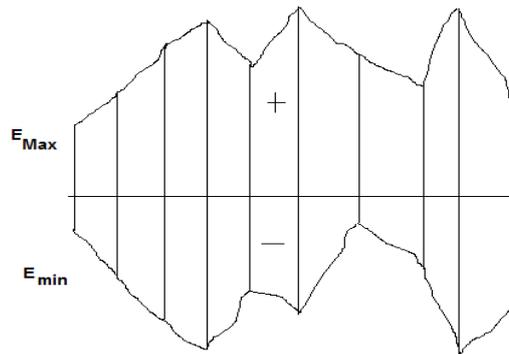


Figure 7: Ligne enveloppe d'un effet élastique E(R,M,T,N, etc..)

4.5 Lignes d'influence d'une réaction d'appui, d'un moment fléchissant, d'un effort tranchant ou d'un effort normal.

4.5.1 Ligne d'influence des réactions d'appui d'une poutre isostatique

Soit une poutre de longueur L reposant sur deux appuis, soumise à une charge unitaire ($P=1$) d'abscisse α (figure.8).

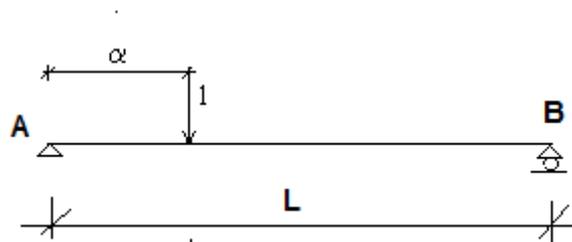


Figure 8: Poutre isostatique

Si on considère l'équilibre statique de cette poutre dans le plan xy . Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad (4.7)$$

$$\sum \vec{M}_B = 0 \Rightarrow R_A L - 1(L - \alpha) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{\alpha}{L} \quad (4.8)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 1 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{\alpha}{L} \quad (4.9)$$

D'après l'équation (4.8)

- Pour $\alpha=0 \Rightarrow R_A=1$ (la charge unitaire est située au niveau de l'appui A)
- Pour $\alpha=L \Rightarrow R_A=0$ (la charge unitaire est située au niveau de l'appui B)

Donc la ligne d'influence de l'effet réaction R_A , $\varepsilon(\alpha)$ est une **fonction linéaire (droite)**.

- La seconde équation (4.9) nous permet de déterminer la fonction d'influence de la réaction R_B .
 - pour $\alpha=0 \Rightarrow R_B=0$ (la charge unitaire est située au niveau de l'appui A)
 - pour $\alpha=L \Rightarrow R_B=1$ (la charge unitaire est située au niveau de l'appui B)

Donc la ligne d'influence de l'effet, réaction R_B , **$\varepsilon'(\alpha)$ est aussi une droite.**

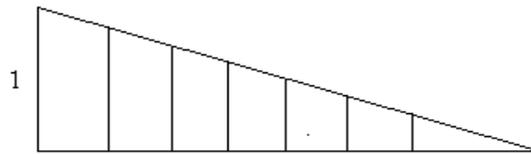


Figure 9: Ligne d'influence de la réaction R_A

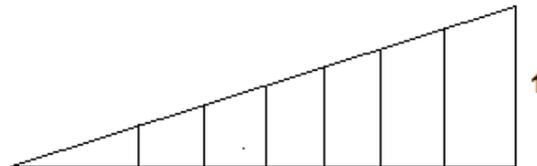


Figure 10: Ligne d'influence de la réaction R_B

4.5.2 Ligne d'influence d'un effort normal

Soit le treillis isostatique de la figure 9, on se propose de tracer la ligne d'influence de l'effort normal dans une des barres de ce treillis, par exemple, l'effort dans la barre AC.

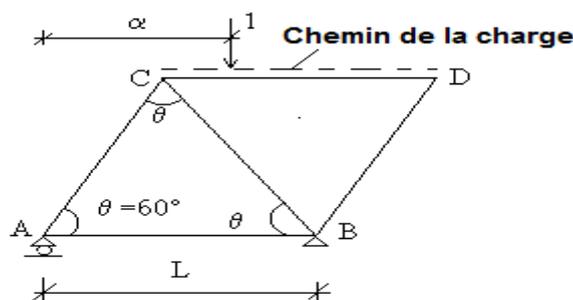


Figure 11: Treillis isostatique

Calcul des réactions d'appui

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum \vec{M}_B = 0 \Rightarrow R_A L - 1(L - \alpha) = 0 \Rightarrow R_A = 1 - \frac{\alpha}{L}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 1 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{\alpha}{L}$$

Calcul de l'effort normal dans la barre AC

On isole le nœud A (figure 12)

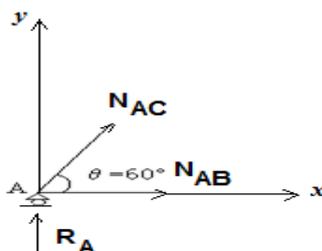


Figure 12: Isolation du nœud A

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_{AC} \sin \theta + R_A = 0 \Rightarrow N_{AC} = -\frac{R_A}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right) = -1,154 \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right) = \varepsilon(\alpha)$$

C'est la ligne d'influence ou fonction d'influence de N_{AC} . cette fonction est une droite qui sera tracée au niveau de la ligne de cheminement de la charge unitaire.

Or la charge unitaire, se déplaçant entre les abscisses $\alpha_1 = \frac{L}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{3L}{2}$, donc :

- Pour $\alpha = \frac{L}{2} \Rightarrow N_{AC} = -0,577$ (compression)
- Pour $\alpha = \frac{3L}{2} \Rightarrow N_{AC} = 0,577$ (Traction)

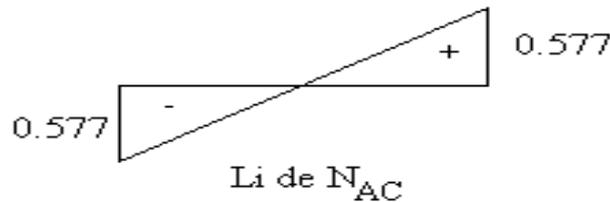


Figure 7

4.5.3 Ligne d'influence d'un effort tranchant dans un section quelconque x

Soit la poutre isostatique soumise à une charge unitaire ($P=1$)(figure.8) et soit x l'abscisse d'une section fixée au préalable, ou l'on se propose d'étudier et de tracer la ligne d'influence de l'effort tranchant. Deux cas de figure peuvent se présenter :

a) 1^{er} cas $\alpha \leq x$

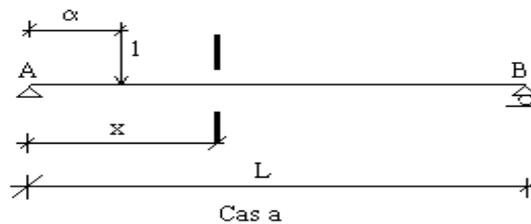


Figure 8

L'équilibre du tronçon droit entraîne :

$$T(\alpha, x) = -R_B = -\frac{\alpha}{L}, \text{ cette fonction est une droite}$$

- Pour $\alpha = 0 \Rightarrow T = 0$
- Pour $\alpha = x \Rightarrow T = -\frac{x}{L}$

b) 2^{ème} cas $\alpha \geq x$

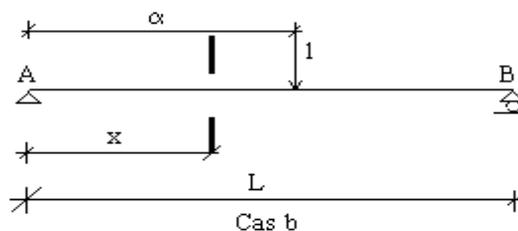


Figure 9

L'équilibre du tronçon gauche entraîne : $T(\alpha, x) = R_A = 1 - \frac{\alpha}{L}$, cette fonction est une droite

- Pour $\alpha = x \Rightarrow T = 1 - \frac{x}{L}$
- Pour $\alpha = L \Rightarrow T = 0$

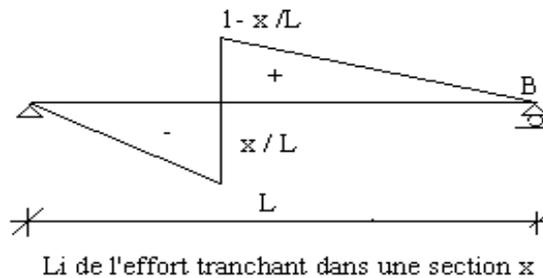


Figure 10

4.5.4 Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque x

Comme dans le cas de l'effort tranchant deux situations peuvent se présenter :

a) 1^{er} cas $\alpha \leq x$ (figure.14)

L'équilibre du tronçon droit entraîne : $M(\alpha, x) = R_B(L-x) = \frac{\alpha}{L}(L-x)$ cette fonction est une droite.

- Pour $\alpha = 0 \Rightarrow M = 0$
- Pour $\alpha = x \Rightarrow M = \frac{x}{L}(L-x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

b) 2^{ème} cas $\alpha \geq x$ (figure.15)

L'équilibre du tronçon gauche entraîne : $M(\alpha, x) = R_A x = \left(1 - \frac{\alpha}{L}\right)x$

Cette fonction est aussi une droite.

- Pour $\alpha = x \Rightarrow M = \left(1 - \frac{x}{L}\right)x$
- Pour $\alpha = L \Rightarrow M = 0$

Remarque : On retrouve le même résultat que pour le 1^{er} cas pour $\alpha=x$

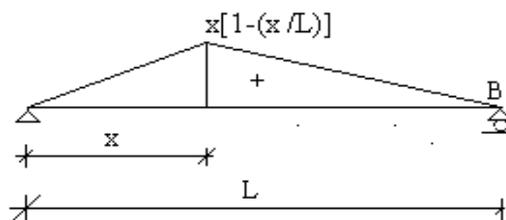


Figure 11 : Ligne d'influence du moment fléchissant

4.5.5 Lignes d'influence des déformations

Le problème des lignes d'influences des déformations peut être traité de différentes manières et selon des théories très diverses telles que :

1. la relation courbures - moment fléchissant : $y'' = -M / EI$
2. Les formules de Bresse données par les relations suivantes :

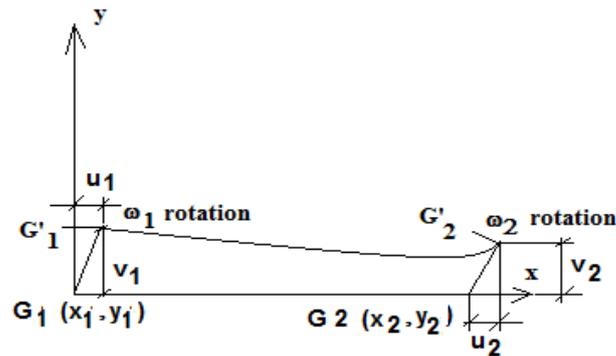


Figure 18: Déplacements généralisés d'un tronçon de poutre

$$u_2 = u_1 - \omega_1(y_2 - y_1) - \frac{N}{EA}(x_2 - x_1) + \lambda t(x_2 - x_1) \quad (4.10)$$

$$v_2 = v_1 - \omega_1(x_2 - x_1) - \frac{T}{GA}(x_2 - x_1) - \int_1^2 \frac{M}{EI}(x_2 - x) dx \quad (4.11)$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \int_1^2 \frac{M}{EI} dx \quad (4.12)$$

Ou :

- (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées des points G_1 et G_2 (figure 18)
- (u_1, v_1, ω_1) et (u_2, v_2, ω_2) sont les déplacements généralisés des points 1 et 2

Il est à noter qu'usuellement on néglige les termes suivants :

$$\begin{aligned} &\omega_1(y_2 - y_1) \text{ car } y_2 = y_1 \\ &\frac{N}{EA}(x_2 - x_1) \\ &\frac{T}{GA}(x_2 - x_1) \\ &\lambda t(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Les formules de Bresse sont couramment utilisées, sous la forme :

$$u_1 = u_2 \quad (4.13)$$

$$v_2 = v_1 - \omega_1(x_2 - x_1) - \int_1^2 \frac{M}{EI}(x_2 - x) dx \quad (4.14)$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \int_1^2 \frac{M}{EI} dx \quad (4.15)$$

3. Le théorème Betti-Maxwell :

- La ligne d'influence du déplacement vertical d'une section x , sous l'effet d'une charge unitaire verticale, d'abscisse α , est la ligne représentative de ce déplacement de la section d'abscisse α sous l'action d'une force vertical unité placée dans la section d'abscisse x .
- La ligne d'influence de la rotation d'une section x , sous l'effet d'une charge unitaire verticale, d'abscisse α , est la ligne représentative de ce déplacement de la section d'abscisse α sous l'action d'un couple unité agissant dans la section d'abscisse x .

$$\delta_{x\alpha} = \delta_{\alpha x} \quad (4.16)$$

Et :

$$\theta_{x\alpha} = \theta_{\alpha x} \quad (4.17)$$

4.5.5.a Exemples de Lignes d'influence de déplacements linéaires (flèches)

Exemple 1 :

Soit une console soumise à l'action d'une charge unitaire concentrée, deux cas sont alors à considérer :

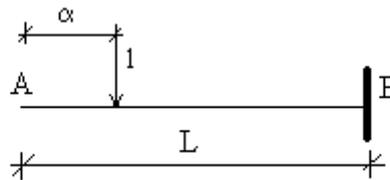


Figure 19: poutre en console sous charge unitaire

- 1. $0 \leq x_1 \leq \alpha$ $m(x_1) = 0$
- 2. $\alpha \leq x_2 \leq L$ $m(x_2) = -(x - \alpha)$

Dans une section d'abscisse ξ nous avons : $df = \frac{Mx}{EI} dx$

Donc :

$$f = -\frac{1}{EI} \left[\left(\int_0^\alpha m(x_1) dx \right) + \left(\int_\alpha^L m(x_2) dx \right) \right] \quad (4.18)$$

$$f_p = -\frac{1}{EI} \left[\left(\int_\alpha^L m(x_2) dx \right) \right] = \frac{1}{EI} \left[\left(\int_\alpha^L (x - \alpha) x dx \right) \right] = \frac{1}{6EI} (\alpha^3 - 3\alpha L^2 + 2L^3)$$

$$f' = \frac{df}{d\alpha} = \frac{1}{2EI} (\alpha^2 - L^2) \Rightarrow f' = 0 \text{ pour } \alpha = L$$

$$f'' = \frac{\alpha}{EI} > 0 \Rightarrow \text{concavité vers les } y < 0$$

$f'' = d^2f / d\alpha^2 = (\alpha / EI) > 0$: concavité tournée vers les ordonnées positives

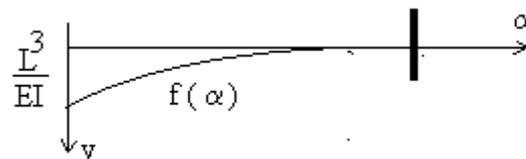


Figure 20: Ligne d'influence de la flèche cas d'une console

4.5.5.b Lignes d'influence des déplacements angulaires (rotations)

Exemple 2 On se propose de tracer la ligne d'influence de la rotation d'une poutre sur deux appuis simples soumise à une charge verticale unitaire $P = 1$

Nous avons :

$$\omega_A = \int_0^L \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx \quad \text{et} \quad \omega_B = - \int_0^L \frac{M}{EI} \left(\frac{x}{L} \right) dx \quad (4.19)$$

Avec :

$$0 < x < \alpha \quad M = x \frac{(L-x)}{L} \quad (4.20)$$

Et :

$$\alpha < x < L \quad M = \alpha \frac{(L-x)}{L} \quad (4.21)$$

1°) **Calcul de $\omega_A(\alpha)$**

$$\omega_A = \frac{1}{EI} \int_0^\alpha x \frac{(L-\alpha)}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \alpha \frac{(L-x)}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \quad (4.22)$$

$$\omega_A(\alpha) = \frac{\alpha(L-\alpha)(2L-\alpha)}{6EIL} \quad (4.23)$$

Et :

$$\omega'_A(\alpha) = \frac{3\alpha^2 - 6L\alpha + 2L^2}{6EIL} \quad (4.24)$$

La rotation est maximum pour : $\alpha = 0.42L$

Elle vaut alors

$$\omega_{Amax} = \frac{\sqrt{3}}{27EI} L^2 \quad (4.25)$$

$$\omega'_A(0) = \frac{L}{3EI} \quad \text{et} \quad \omega'_A(L) = -\frac{L}{6EI} \quad (4.26)$$

Et finalement :

$$\omega''_A(\alpha) = \frac{(L-\alpha)}{EIL} < 0 \Rightarrow \text{La concavité tournée vers les } y < 0$$

2°) **Calcul de $\omega_B(\alpha)$**

$$\omega_B = -\frac{1}{EI} \int_0^\alpha x \frac{(L-\alpha)}{L} \left(\frac{x}{L}\right) dx - \frac{1}{EI} \int_0^\alpha \alpha \frac{(L-x)}{L} \left(\frac{x}{L}\right) dx \quad (4.27)$$

$$\omega_B(\alpha) = \frac{\alpha(L-\alpha)(L+\alpha)}{6EIL} \quad (4.28)$$

$$\omega'_B(\alpha) = \frac{L^2 - 3\alpha^2}{6EIL} \quad (4.29)$$

$$\omega'_B(\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 0.58L$$

Donc :

$$\omega_{Bmax} = \frac{\sqrt{3}}{27EI} L^2 \quad (4.30)$$

$$\omega'_B(0) = \frac{L}{6EI} = -\omega'_A(L) \quad \text{et} \quad \omega'_B(L) = -\frac{L}{3EI} = -\omega'_A(0) \quad (4.31)$$

Remarque : Les deux courbes représentative sont évidemment symétriques par rapport à l'axe vertical d'abscisse $L/2$, puisque le changement de α en $L - \alpha$ dans l'équation de ω_A donne ω_B

3°) Courbes représentative de $\omega_A(\alpha)$ et de $\omega_B(\alpha)$

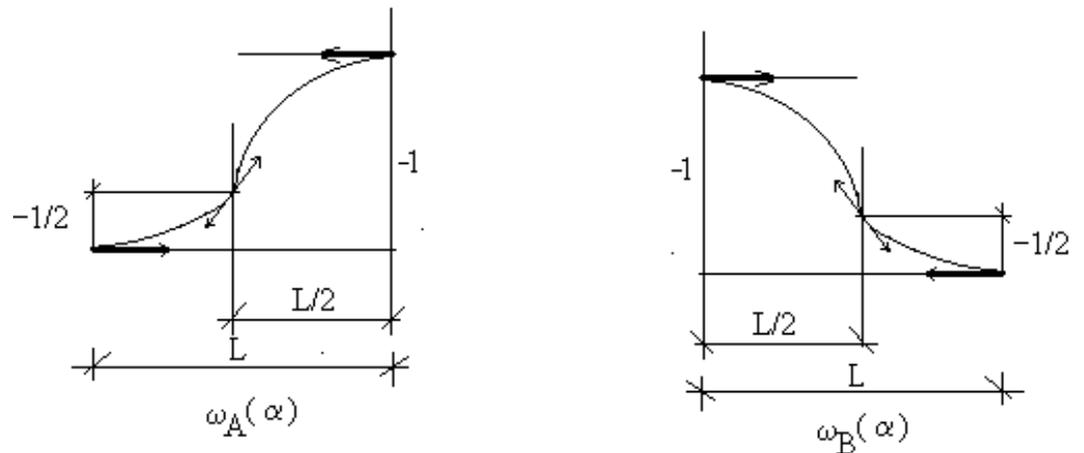


Figure 212: Lignes d'influence des rotations

4.5.6 Effets d'un convoi et théorème de Barré

4.5.6.a Définition d'un convoi

Un convoi (figure.18) est un système de charges concentrées, appelées essieux, pouvant se déplacer dans leur ensemble, les distances mutuelles entre les lignes d'action des différentes charges restent invariables au cours du déplacement, par exemple : camion, trains, voitures etc.

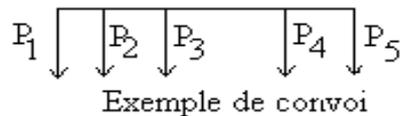


Figure 22 : Un convoi

4.5.6 Introduction

Pour déterminer l'effort tranchant maximum T ou le moment fléchissant maximum M dans une section quelconque sous l'effet de l'action d'un convoi, on a recours aux lignes d'influences correspondantes dans cette section, et on fait déplacer le convoi (dessiné sur un papier transparent), le long du tracé de la ligne d'influence jusqu'à ce que l'on obtienne le maximum de l'effet considéré. Il est évident qu'un essieu doit se trouver sur la section considérée pour avoir l'effet escompté. On peut se contenter de déterminer les valeurs maximales dans un certain nombre de sections distinctes de la poutre et tracer par la suite les lignes enveloppes. Cette manière de procéder peut ne pas être suffisante, car il est plus intéressant de déterminer les maximums absolus de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans l'ensemble de la poutre.

En ce qui concerne l'effort tranchant, il est aisé de déterminer les maximums absolus, en effet, ces derniers se produisent dans les sections extrêmes de la poutre (au niveau des appuis).

Relativement au moment fléchissant, la solution du problème est donnée par le théorème de Barré.

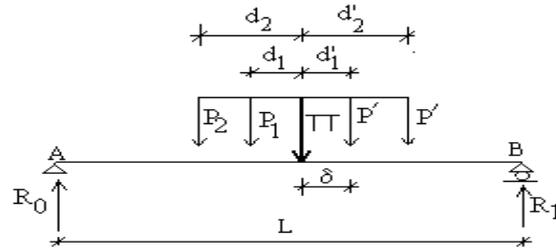


Figure 13 : Poutre isostatique sous la charge d'un convoi

4.6.3 Théorème de Barré

Énoncé du théorème : Le moment fléchissant est maximum au droit d'un essieu, lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.

Remarque :

Il ne faut considérer que les essieux du convoi qui se trouvent effectivement sur la poutre. Soit Π la résultante des forces concentrées qui constituent le convoi :

$$\Pi = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n P'_i \quad (4.32)$$

et

$$\sum_{i=1}^n P_i d_i = \sum_{i=1}^n P'_i d'_i \quad (4.33)$$

Soit R_0 La réaction de gauche, la somme des moments par rapport à l'appui droit est donnée par :

$$\sum \vec{M}_1 = R_0 L - \Pi \left(\frac{L}{2} - \delta \right) = 0 \quad (4.34)$$

Donc :

$$R_0 = \Pi \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{L} \right) \quad (4.35)$$

δ : Abscisse de la résultante du convoi par rapport au milieu de la poutre (figure.20)

Le moment au droit de l'essieu i est donné par :

$$M_i = \Pi \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{L} \right) \left(\frac{L}{2} + \delta - d_i \right) - \sum_{k>i} P_k (d_k - d_i) \quad (4.36)$$

Ou autrement :

$$M_i = \Pi L \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{L} \right) \left(\frac{L}{2} + \frac{\delta}{L} - \frac{d_i}{L} \right) - \sum_{k>i} P_k (d_k - d_i) \quad (4.37)$$

M_i est maximum si $\frac{dM_i}{d\delta} = 0$ donc :

$$\frac{dM_i}{d\delta} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{L} - \frac{d_i}{L}\right) + \left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{L}\right) = 0$$

Soit :

$$-\frac{2\delta}{L^2} + \frac{d_i}{L^2} = 0 \Rightarrow d_i = 2\delta \Rightarrow \delta = \frac{d_i}{2} \quad (4.38)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer pour confirmer le théorème de Barré.

Dans ces conditions le moment fléchissant maximum au niveau de l'essieu i est donné par :

$$M_{imax} = \frac{\Pi L}{4} \left[1 - \frac{d_i}{l}\right]^2 - \sum_{k>i} P_k (d_k - d_i) \quad (4.39)$$