Unversité Badji Mokhtar Annaba

Réalisé par Dr. Khodja Nawel

Chapitre 3 (la suite)

Partie 2: Lois usuelles continues

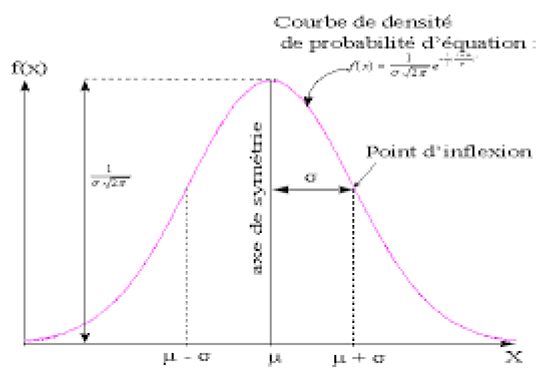
1 Loi normale (loi de Gauss):

Definition 1 *Soit X une variable aléatoire. X suit une loi normale de paramètres (μ, σ), notée $N(\mu, \sigma)$, si X admet comme densité*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque:

- *Espérance: $E(X) = \mu$.*
- *Variance: $V(X) = \sigma^2$.*
- *Écart-type: $\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$.*
- *La fonction de densité de probabilité de la loi normale a la forme d'une courbe en cloche .*
  Cette loi est symétrique par rapport à μ.



1.1 Fonction de répartition:

$$F(X) = P\left[X \leq x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Toute loi normale $N(\mu, \sigma)$ peut se ramener à la loi normale centrée réduite $N(\mu = 0, \sigma = 1)$. Ceci permet d'utiliser les tables de cette loi normale centrée réduite pour résoudre des problèmes sur une distribution normale quelconque.

2 Loi normale centrée réduite:

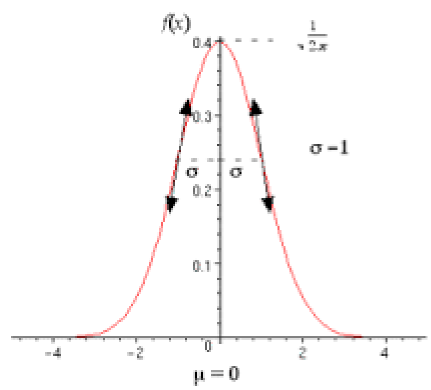
Definition 2 *On dit que la loi est centrée si son espérance $\mu = 0$, elles est dite réduite si sa varince σ^2 (et son écart-type σ) est égale à 1.*

La loi normale centrée réduite $N(\mu = 0, \sigma = 1)$ et donc définie par la formule:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{-1}{2}x^2}$$

***Remarque**:*

- *Espérance: $E(X) = \mu .= 0$.*
- *Variance: $V(X) = \sigma^2 = 1$.*
- *Écart-type: $\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = 1$.*
- *Cette loi est symétrique par rapport à $\mu = 0$.*



2.1 Fonction de répartition:

$$F(X) = P\left[X \leq x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{-1}{2}t^2} dt$$

Les valeurs de $F(X)$ s'obtiennent à l'aide d'un logiciel ou de Tables.

Règle de calcul de probabilités:

Dans l'utilisation de la table de la loi normale standard $N(0,1)$, on aura des calculs de probabilités à faire. On les fera avec les règles suivantes:

1. $F(-x) = 1 - F(x)$. *(Règle n: 1).*
2. $P[X \geq x] = 1 - P[X \leq x] = 1 - F(x)$. *(Règle n: 2).*
3. $PX \geq -x] = 1 - P[X \leq -x] = 1 - F(-x)$. *(Règle n: 3).*
   $= 1 - [1 - F(x)] = F(x)$.
4. $P[x_1 \leq X \leq x_2] = P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1] = F(x_2) - F(x_1)$.
5. $P[-x_1 \leq X \leq x_2] = P[X \leq x_2] - P[X \leq -x_1] = F(x_2) - F(-x_1)$ *(Règle n: 5).*
   $= F(x_2) - [1 - F(x_1)] = F(x_1) + F(x_2) - 1$.
6. $P[-x \leq X \leq x] = P[X \leq x] - P[X \leq -x] = F(x) - F(-x)$. *(Règle n: 6).*
   $= F(x) - [1 - F(x)] = F(x) + F(x) - 1 = 2F(x) - 1$.

Exemple 1. *Soit $X \rightsquigarrow N(0,1)$, calculer $P[X \leq 1.56]$.*

Solution: $P[X \leq 1.56] = F(1.56)$, *on cherche* 1.56 *dans la table (Table de la loi normale centrée réduite* $N(0,1)$

.

***Lecture de la table**: pour $x = 1.56$ (intersection de la ligne 1.50 et de la colonne 0.06), on a la proportion 0.9406.*

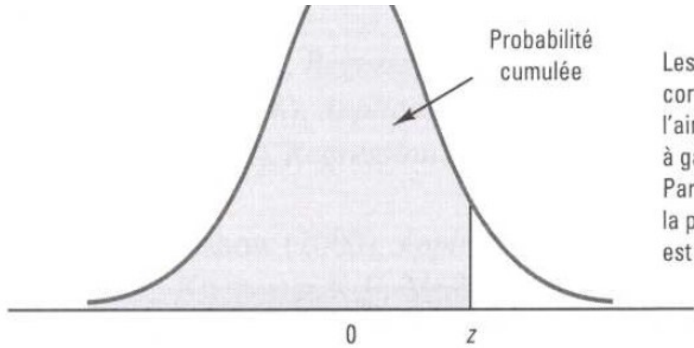
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,

$P[X \leq 1.56] = F(1.56) = 0.9406.$

Exemple 2. *Soit* $X \rightsquigarrow N(0,1)$*, calculer* $P[X \geq 0.49]$.

$P[X \geq 0.49] = 1 - P[X \leq 0.49] = 1 - F(0.49)$.*(→On utilise règle n: 2).*

La valeur de $F(0.49)$ *se trouve dans la table à l'intersection de la ligne* 0.4 *et de la colonne* 0.09.



Les chiffres de la table correspondent à la valeur de l'aire située sous la courbe à gauche de la valeur z. Par exemple, pour z = 1,25 la probabilité cumulée est égale à 0,8944.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224

On trouve donc $F(0.49) = 0.6879$*, alors*

$$P[X \geq 0.49] = 1 - P[X \leq 0.49] = 1 - F(0.49) = 1 - 0.6879 = 0.3121.$$

Exemple 3.

Soit $X \rightsquigarrow N(0,1)$*, calculer* $P[X \leq -1.1]$.

Solution: $P[X \leq -1.1] = F(-1.1) = 1 - F(1.1)$. *(→On utilise règle n: 1).*

La valeur de $F(1.1)$ *se trouve dans la table à l'intersection de la ligne* 1.1 *et de la colonne* 0.00.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,(
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8

On trouve

$F(1.1) = 0.8643$, *alors:* $P[X \leq -1.1] = F(-1.1) = 1 - F(1.1) = 0.1357$.

Exemple 4. *Soit* $X \rightsquigarrow N(0,1)$, *calculer* $P[-2 \leq X \leq 2]$.

Solution:

$$\begin{aligned} P[-2 \leq X \leq 2] &= P[X \leq 2] - P[X \leq -2] \text{ ($\rightarrow$On utilise règle n: 6)} \\ &= F(2) - F(-2) \\ &= F(2) - [1 - F(2)] \\ &= F(2) - 1 + F(2) \\ &= 2 \times F(2) - 1 \\ &= 2 \times (0.9772) - 1 \\ &= 0.9544. \end{aligned}$$

Exemple 5. *Soit* $X \rightsquigarrow N(0,1)$*, calculer* $P[-0.46 \leq X \leq 2.21]$.

Solution:

$$P[-0.46 \leq X \leq 2.21] = P[X \leq 2.21] - P[X \leq -0.46] \ . \ (\rightarrow \textit{On utilise règle n: 5)})$$

$$= F(2.21) - F(-0.46)$$

$$= F(2.21) - [1 - F(0.46)]$$

$$= F(2.21) - 1 + F(0.46)$$

$$0.9864 - 1 + 0.6772$$

$$= 0.6636.$$

2.2 Transformation d'une loi normale en loi normale centrée réduite:

Soit une variable X *distribuée selon une loi normale d'espérance* μ *et d'écart-type* σ *(*$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$*), alors la variable* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *est distribuée selon une loi normale centrée réduite, (*$Z \rightsquigarrow N(0,1)$*).*

L'opération ci-dessus s'appelle la transformation.

Exemple 1. $X \rightsquigarrow N(\mu = 17, \sigma = 9)$*, calculer* $P[X \leq 11]$.

Solution: *Pour résoudre ce problème à l'aide d'une Table, on va se servir de la transformation. On pose* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$*:*

$$P[X \leq 11] = P[\tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \tfrac{11-\mu}{\sigma}]$$

$$= P[\tfrac{X-17}{9} \leq \tfrac{11-17}{9}]$$

$$= P[Z \leq -2]$$

$$= F(-2) = 1 - F(2)$$

$$= 1 - 0.9772$$

$$= 0.0228.$$

Exemple 2. *Le poids moyen de* 500 *colis entreposés dans un certain hangar est de* 151 *kg et l'écart-type est* 15 *kg.*

En supposant que ces poids sont normalement distribués, calculer le poids d'un colis pris au hasard pesant:

1. *Entre* 120 *et* 155 *kg.*
2. *Plus de* 185 *kg.*

Solution: $X \rightsquigarrow N(\mu = 151, \sigma = 15)$, *on pose* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-151}{15}$, $Z \rightsquigarrow N(0,1)$.

1. $P[120 \leq X \leq 155] = P[\frac{120-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{155-\mu}{\sigma}]$
   $= P[\frac{120-151}{15} \leq \frac{X-151}{15} \leq \frac{155-151}{15}]$
   $= P[-2.066 \leq Z \leq 0.266]$
   $= P(Z \leq 0.266] - P[Z \leq -2.066]$
   $= F(0.266) - F(-2.066)$
   $= F(0.266) - [1 - F(2.066)]$
   $=F(0.266) - 1 + F(2.066)$
   $= 0.6026 + 0.9803 - 1$
   $= 0.5829.$

2. $P[$*plus de 185 kg*$] = P[X \geq 185]$
   $= 1 - P[X \leq 185]$
   $= 1 - P[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma}]$
   $= 1 - P[\frac{X-151}{15} \leq \frac{185-151}{15}]$
   $= 1 - P[Z \leq 2.26]$
   $= 1 - F(2.26)$
   $= 1 - 0.9881$
   $= 0.0119.$

Exemple 3. *Le poids des bébés à la naissance suit une loi normale de moyenne* 3.3 *kg et d'écart-type* 0.6 *kg. On note* X *la variable aléatoire "poids des bébés à la naissance".*

1. *Calculer la probabilité* $P[2.12 \leq X \leq 4.48]$.

Solution: $X \rightsquigarrow N(\mu = 3.3, \sigma = 0.6)$,*on pose* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *V.a centrée réduite;*

1. $P[2.12 \leq X \leq 4.48] = P[\frac{2.12-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{4.48-\mu}{\sigma}]$
   $= P[\frac{2.12-3.3}{0.6} \leq \frac{X-3.3}{0.6} \leq \frac{4.48-3.3}{0.6}]$
   $= P[-1.97 \leq Z \leq 1.97]$
   $= P[Z \leq 1.97] - P[Z \leq -1.97]$
   $= F(1.97) - F(-1.97)$
   $= F(1.97) - [1 - F(1.97)]$
   $= F(1.97) - 1 + F(1.97)$
   $= 2 \times F(1.97) - 1$
   $= 2 \times (0.97558) - 1$
   $\simeq 0.95.$

2.3 Approximation par la loi normale:

2.3.1 Approcher une loi binomiale par une loi normale:

On admet qu'une loi binomiale $B(n,p)$ peut être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = n \times p$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$ lorsque :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \geq 30 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{p} \geq 5 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{p} \times (1-\mathbf{p}) \geq 5 \end{cases}$$

Alors

$$B(n,p) \approx N(\mu = n \times p, \sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)})$$

2.3.2 Approcher une loi de Poisson par une loi normale:

On admet qu'une loi de Poisson être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = \lambda$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\lambda}$ lorsque:

$$\lambda \geq 10.$$

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx N(\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda})$$

*Dans la pratique, comme l'approximation faite est une approximation d'une loi discrète par une loi continue, nous devrons effectuer **une correction de continuité**, c'est à dire qu'à la valeur x_0 d'une valeur discrète, nous associerons l'intervalle $[x_0 - 0.5; x_0 + 0.5]$ pour la variable continue.*

A retenir:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{discr\grave{e}te}}[\mathbf{X} = \mathbf{x_i}] \simeq \mathbf{P}_{\mathbf{continue}}[\mathbf{x_i} - 0.5 \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{x_i} + 0.5]$$

Exemple 1. *On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse.*

On contrôle un lot de 1000 pièces, soit X la variable aléatoire: "nombre de pièces défectueuses parmi 1000.

1. *Quelle est la vraie loi de X? (on ne donnera que la forme générale).*
2. *Quel est son $E[X]$ et $V[X]$?*
3. *En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculer $P[18 \leq X \leq 22]$.*

Solution:

1. *La vraie loi de X est la loi binomiale de paramètre $p = 0.02$ et $n = 1000$,* $X \rightsquigarrow B(n = 1000, p = 0.02)$.

2. $E[X] = n \times p = 1000 \times 0.02 = 20$

   $V[X] = n \times p \times (1-p) = 1000 \times 0.02 \times (1 - 0.02) = 19.6$

   $\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{19.6} = 4.4271.$

3. *Comme* $\begin{cases} \mathbf{n} = 1000 > 30 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{p} = 20 > 5 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{p} \times (1 - \mathbf{p}) = 19.6 > 5 \end{cases}$

   alors on peut approximer la loi binomiale par la loi normale avec:

   $\mu = n \times p = 20$ *et* $\sigma = 4.4271$

   $B(n = 1000, p = 0.02) \approx N(\mu = 20, \sigma = 4.4271)$.

$$p[18 \leq X \leq 22] =$$

$$= p[18 - 0.5 \leq X \leq 22 + 0.5] \text{ (}\rightarrow\text{la propriété de la correction de continuité)}$$

$$= P[\tfrac{17.5-\mu}{\sigma} \leq \tfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \tfrac{22.5-\mu}{\sigma}] \text{ (}\rightarrow\text{changement de variable)}$$

$$= P[\tfrac{17.5-20}{4.4271} \leq \tfrac{X-20}{4.4271} \leq \tfrac{22.5-20}{4.4271}]$$

$$= P[-0.5647 \leq Z \leq 0.5647]$$

$$= P[Z \leq 0.5647] - P[Z \leq -0.5647]$$

$$= F(0.5647) - F(-0.5647)$$

$$= F(0.5647) - [1 - F(0.5647)]$$

$$= 2 \times F(0.5647) - 1$$

$$= 2 \times (0.3410) - 1 \ .$$

Exemple 2. *Une usine fabrique 400 lampes électriques à l'heure. on admet que le nombre X de lampes défectueuses produites en une heure suit une loi de Poisson de paramètre λ.*

1. *On suppose que $\lambda = 15$. Calculer $P[x > 15]$.*

2. *Calculer cette même probabilité par son approximation par la loi normale.*

Solution:

1.

$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda = 15)$ *donc*

$$P[X = k] = \frac{\exp^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

$$\lambda = 15 \Longrightarrow P[X = 15] = \frac{\exp^{-15} \times (15)^k}{k!}$$

$$P[X > 15] = 1 - P[X \leq 15]$$

$$= 1 - [P[X = 0] + P[X = 1] + ... + P[X = 15]]$$

$$= 1 - 0.568$$

$$= 0.432.$$

1. *Comme $\lambda = 15 > 10$, alors on peut approximer loi de poisson par la loi normale avec $N(\mu = \lambda = 15, \sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{15})$ donc,*

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx N(\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda})$$

$$P[X > 15] = 1 - P[X \leq 15]$$

$$= 1 - P[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{15-\mu}{\sigma}]$$

$$= 1 - P[Z \leq \frac{15-15}{\sqrt{15}}]$$

$$= 1 - P[Z \leq 0]$$

$$= 1 - F(0).$$

d'aprés la table de la loi normale centrée réduite, on a $F(0) = 0.5$.

D'où $P[X > 15] = 1 - F(0) = 1 - 0.5 = 0.5$.

3 Lois dérivées de la loi normale:

3.1 Loi du Khi-deux (χ^2):

Definition 3 *.Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes, chacune étant distribuée selon une loi normale centrée réduite,*

$$\forall i, X_i \rightsquigarrow N(0, 1)$$

la distribution de $S = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ est appelée loi de χ^2 à n degrés de liberté (en abrégé d.d.l).

Loi du $\chi^2(n)$: *Notation:* $S \rightsquigarrow \chi^2_{n.d.d.l}$.
Espéranace: $E[\chi^2] = n$.
Variance: $V[\chi^2] = 2n$.
Ecart-type: $\sigma = \sqrt{2n}$.

Remarque: *Cette loi est tabulée à la manière de la loi normale.*

Exemple 1. *Déterminer le quantile d'ordre* 0.975 *de la loi du Khi-deux avec* 18 *degrés de liberté. (c'est-à-dire trouver la constante* C *pour que* $P[\chi^2 \leq C] = 0.975$*).*

Solution: $1 - \alpha = 0.975 \Longrightarrow \alpha = 0.025$
Dans la table (loi khi-deux), le quantile se trouve à l'intersection de la ligne $n = 18$ *avec la colonne* $\alpha = 0.025$, *on obtient la valeur* 31.53

$$P(\chi^2_\nu \geq \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$

$1-\alpha$	**0,001**	**0,005**	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,1**	**0,5**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
α	**0,999**	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,5**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	[illegible]	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82

d'où $C = \chi^2_{18.d.d.l} = 31.53$.

Exemple 2. *Trouver le quantile d'ordre* 0.99 *de khi-deux avec* 15 *degrés de liberté. (c'est-à-dire trouver la constante* C *pour que* $P[\chi^2 \leq C] = 0.99$*)*

Solution: $1-\alpha = 0.99 \Longrightarrow \alpha = 0.01.$

Dans la table (table de la loi khi-deux), le quantile se trouve à l'intersection de la ligne $n = 15$ *avec la colonne* $\alpha = 0.01$, *on obtient la valeur* $30,58$.

$1-\alpha$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
α	**0,999**	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,5**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	[illegible]	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82

D'où $C = \chi^2_{15.d.d.l} = 30.58.$

Exemple 3. *Soit* $S \rightsquigarrow \chi^2_{n=15.d.d.l}$
Calculer $P[8.55 \leq S \leq 25]$.

Solution: $P[8.55 \leq S \leq 25] = P[S \leq 25] - P[S \leq 8.55]$, *on cherche les valeurs de chaque probabilté en utilsant la table de la loi Khi-deux.*

$P[S \leq 25]$ =0.95 *d'aprés la table*

$1-\alpha$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
α	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	$\boxed{25,00}$	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82

$P[S \leq 8.55] = 0.10$ *d'apré la table*

$1-\alpha$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
α	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	[illegible]	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
ν = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	[illegible]	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	[illegible]	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,69	2,17	[illegible]	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	[illegible]	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76	31,26
12	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	[illegible]	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	[illegible]	15,34	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	5,41	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82

alors $P[8.55 \leq S \leq 25] = P[S \leq 25] - P[S \leq 8.55] = 0.95 - 0.10 = 0.85.$

3.2 Loi de Student:

Definition 4 *Soit la variable aléatoire* $U \rightsquigarrow N(0,1)$ *et* $V \rightsquigarrow \chi^2_{n.d.d.l}$, U *et* V *étant indépendantes.*

Soit: $T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ *alors* T_n *suit une loi de student à* n *degrés de liberté.*

Loi de Student ($\mathbf{T_n}$):

Notation: $T_n \rightsquigarrow T_{n.d.d.l}$

Espérance: $E[T] = 0$ si $n > 1$.

Variance: $V[T] = \frac{n}{n-2}$ si $n > 2$.

Ecart-type: $\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

Exemple 1.

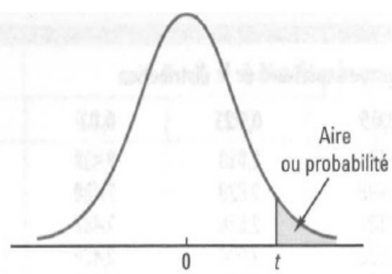
1. Trouver le quantile 0.20 avec 6 *d.d.l.* (c'est-à-dire trouver la constante C pour que $P[T \leq C] = 0.20$).
2. Trouver le quantile 0.025 avec 18 *d.d.l.* (c'est-à-dire trouver la constante C pour que $P[T \leq C] = 0.025$)

Solution:

1. Dans la table (loi de Student), le quantile se trouve à l'intersection de la ligne $n = 6$ avec la colonne $\alpha = 0.20$ (α désigne la probabilité)

   on obtient la valeur 0.906

Table 4: Loi du *t* de Student



Les chiffres de la table correspondent aux valeurs t pour différentes aires ou probabilités situées dans la queue supérieure de la distribution de Student. Par exemple, avec 10 degrés de liberté et une aire de 0,05 dans la queue supérieure de la distribution, $t_{0,05} = 1{,}812$. (pour test unilatéral !)

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499

D'où $C = T_{6.d.d.l} = 0.906$.

Dans la table (loi de student), le quantile se trouve à l'intersection de la ligne $n = 18$ avec la colonne $\alpha = 0.025$

on obtient la valeur 2.101.

Degrés de liberté	Aire dans la queue supérieure de la distribution					
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,862	1,330	1,734	$\boxed{2,101}$	2,552	2,878

D'où $T_{18.d.d.l} = 2.101$.

3.3 Loi de Fisher-Snedecor:

Definition 5 *.Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de χ^2respectivement à n et m degrés de liberté.*

On dit que $F = \frac{\frac{U}{n}}{\frac{V}{m}}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à $\left\{ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right\}$ degrés de liberté.

<u>loi de Fisher-snedecor:</u>

Notation: $F \rightsquigarrow \mathcal{F}_{(n,m).d.d.l}$.

Espérance: $E[F] = \frac{m}{m-2}$ si $m > 2$.

Variance: $V[F] = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ si $m > 4$.