

Réponses Devoir No 1

Exercice 1.

– 1-

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2a- Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$, $\delta X = (u_1, u_2, u_3)$, $X' = X + \delta X$
si $\delta x = \phi(X', t) - \phi(X, t)$ alors $\delta x = F(t)\delta X = ((1 + \alpha t)u_1, u_2, u_3)$.
– 2b- $\text{Vol}(\delta V) = \det(V_1, V_2, V_3)$. Si $\delta V' = \phi(\delta V)$ alors

$$\text{Vol}(\delta V') = J(t)\text{Vol}(\delta V) = (1 + \alpha t)\det(V_1, V_2, V_3).$$

– 3-

$$C(t) = F^T F = \begin{pmatrix} (1 + \alpha t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– 4-

$$L(t) = \frac{1}{2}(C - I) = \begin{pmatrix} \alpha t + \alpha^2 t^2 / 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si αt est petit devant 1 le tenseur des déformations est donné par

$$\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

– 1a-

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(t) = F^T F = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + 4\alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1b- Les dilataions principales sont les valeurs propres de $F(t)$ et les directions principales sont les vecteurs propres associés u_j , on trouve :

$$\lambda_1 = 1 + \alpha t, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \quad \text{vp de multiplicité 2}$$

$$u_1 = e_1, \quad u_2 \in [e_2, e_3]$$

– 2

$$L(t) = \frac{1}{2}(C - I) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 2\alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}(C - I) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ε tenseur des petites déformations si , $\alpha t \ll 1$.

Exercice 3.

– 1-

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 + kX_2 & kX_1 & 0 \\ 2kX_1 & 1 - 2kX_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(t) = F^T F = I + kA + k^2 B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2X_2 & 3X_1 & 0 \\ 3X_1 & -4X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4X_1^2 + X_2^2 & -3X_1X_2 & 0 \\ -3X_1X_2 & X_1^2 + 4X_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2- $\sqrt{C_{ii}(X)} = \Lambda(X, \delta X)$ dilatation relative suivant la direction $\delta X = \lambda e_i$
- 3- $C_{ij}(X)$ détermine l'angle de glissement dans le plan $[e_i, e_j]$
- 4- Supposons $\delta X = \lambda u$, $u = (1, 1, 0)$ et $|\lambda| \ll 1$. Alors

$$\Lambda(X, \delta X) = \frac{C(X, u, u)^{1/2}}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

avec

$$\begin{cases} C_{11} &= 1 + 2kX_2 + k^2(X_2^2 + 4X_1^2) \\ C_{12} &= 3kX_1 - 3k^2X_1X_2 \\ C_{22} &= 1 - 4kX_2 + k^2(4X_2^2 + X_1^2) \end{cases} \quad (1)$$

Si kR est petit alors

$$\Lambda(X, \delta X) \sim \sqrt{1 + k(X_1 - X_2)}$$

Cette quantité est définie si $kR \leq 1$.