TESTS STATISTIQUES
COMPARAISON DE 2 MOYENNES
PR BOUZBID

Faculté de Médecine d'Annaba
Biomathématiques Statistiques
1 ère année Médecine Dentaire

Objectifs du cours

Etre capable de comparer

- deux moyennes de 2 séries indépendantes

Tous les tests statistiques, quels qu'il soient,

calculent

la probabilité de se tromper en rejetant H_0

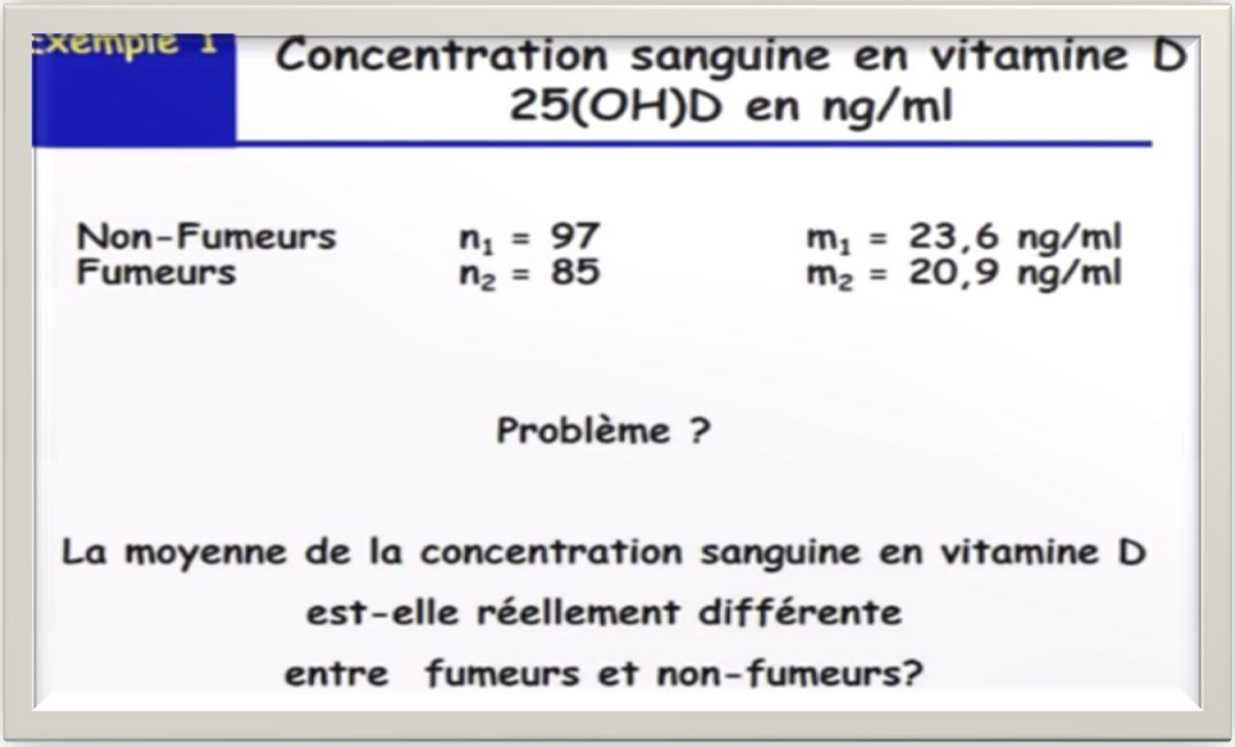
↓

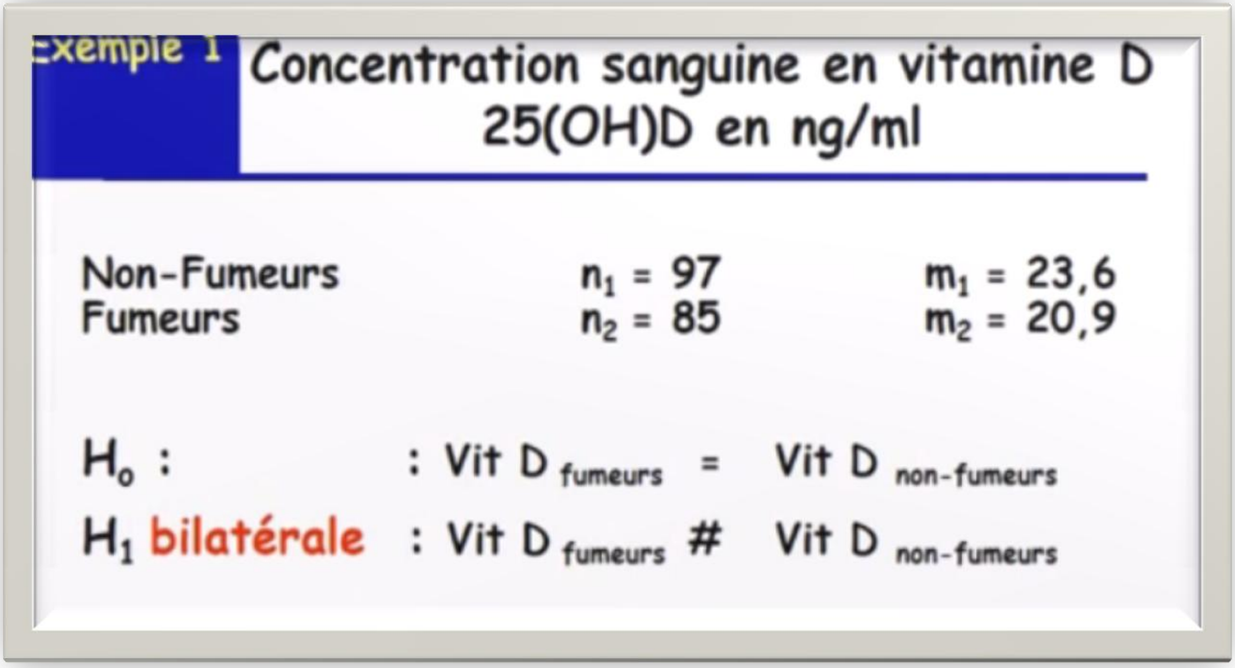
le petit *p*

Comment comparer deux moyennes de deux séries indépendantes?

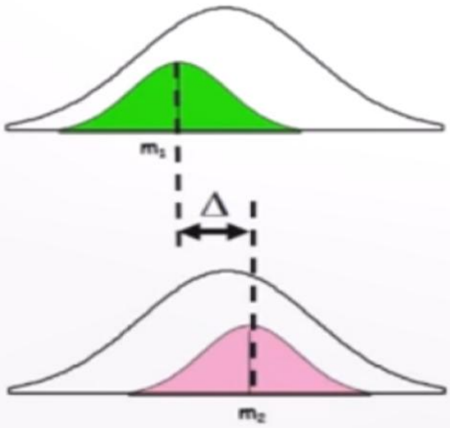
1. Test Z

2. Test T de Student


Exemple 1
Concentration sanguine en vitamine D 25(OH)D en ng/ml
Non-Fumeurs $n_1 = 97$ $m_1 = 23,6$ ng/ml
Fumeurs $n_2 = 85$ $m_2 = 20,9$ ng/ml
Problème ?
La moyenne de la concentration sanguine en vitamine D
est-elle réellement différente
entre fumeurs et non-fumeurs?


Exemple 1
Concentration sanguine en vitamine D 25(OH)D en ng/ml
Non-Fumeurs $n_1 = 97$ $m_1 = 23,6$
Fumeurs $n_2 = 85$ $m_2 = 20,9$
H_0 : : Vit D $_{fumeurs}$ = Vit D $_{non\text{-}fumeurs}$
H_1 bilatérale : Vit D $_{fumeurs}$ # Vit D $_{non\text{-}fumeurs}$

Comparaison de 2 moyennes



Si H_0 vraie : $\mu_1 = \mu_2$

$$\Delta = m_1 - m_2 \approx 0$$

Exemple 1 Concentration sanguine en vitamine D 25(OH)D en ng/ml

Non-fumeurs	$n_1 = 97$	$m_1 = 23{,}6$
Fumeurs	$n_2 = 85$	$m_2 = 20{,}9$

H_0 : : Vit D $_{\text{fumeurs}}$ = Vit D $_{\text{non-fumeurs}}$

H_1 bilatérale : Vit D $_{\text{fumeurs}}$ # Vit D $_{\text{non-fumeurs}}$

$$\Delta = 23{,}6 - 20{,}9 = 2{,}7$$

Est-ce que 2,7 est suffisamment éloigné de zéro

pour qu'on rejette H_0

Théorème

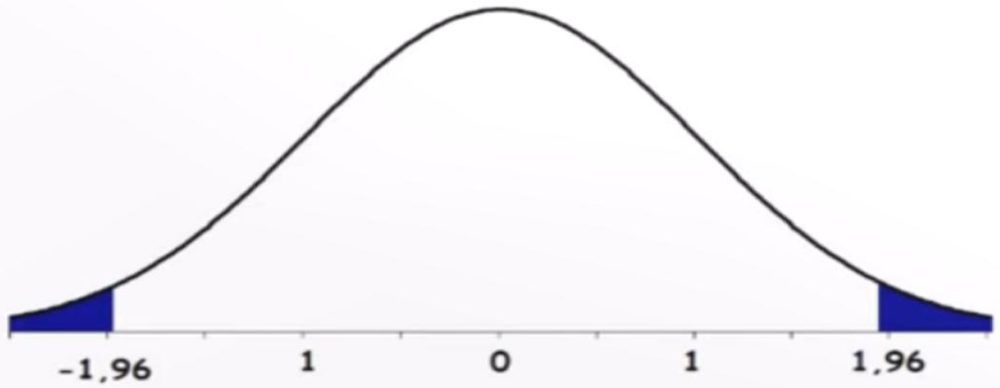
- La différence de deux variables normales est elle-même une variable normale
- La variable $\Delta = m_1 - m_2$ suit donc une loi normale
- Si H_0 vraie,
  Δ suit une loi normale centrée sur zéro

Théorème

- La différence de deux variables normales est elle-même une variable normale
- La variable $\Delta = m_1 - m_2$ suit donc une loi normale
- Si H_0 vraie,
  Δ suit une loi normale centrée sur zéro
- Si on pose $Z = \dfrac{\Delta}{\text{écart type de } \Delta}$

Z suit une loi normale centrée réduite
centrée sur 0
réduite écart type =1

Loi normale centrée (0) réduite (1)



Si $|Z| > 1{,}96$ on rejette H_0

$p < 5\%$

Calcul de Z

$$|Z| = \frac{\Delta}{\text{écart type de } \Delta} = \frac{|m_1 - m_2|}{\text{écart type de } (m_1 - m_2)}$$

écart type de $(m_1 - m_2)$??

Théorème

La variance de la différence de deux variables est égale à la somme des deux variances

$$s^2_{\Delta} = s^2_{m1} + s^2_{m2}$$

$$s^2_{m1} = \frac{s_1^2}{n_1} \qquad s^2_{m2} = \frac{s_2^2}{n_2}$$

$$s^2_{\Delta} = \frac{s^2_1}{n_1} + \frac{s^2_2}{n_2}$$

Calcul de Z

$$Z = \frac{\Delta}{s_{\Delta}} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{s^2_1}{n_1} + \frac{s^2_2}{n_2}}}$$

Exemple 1

Calcul de Z

Non-fumeurs	$n_1 = 97$	$m_1 = 23,6$	$s_1 = 8,3$
Fumeurs	$n_2 = 85$	$m_2 = 20,9$	$s_2 = 7,6$

$$Z = \frac{|23,6 - 20,9|}{\sqrt{\frac{8,3^2}{97} + \frac{7,6^2}{85}}} = 2,29$$

$Z > 1,96$

Table de |Z| (alpha bilatéral)

$Z = 2,29$

|Z| >	2,58	2,33	2,17	2,05	1,96	1,64	1,28
alpha	1%	2%	3%	4%	5%	10%	20%

$p < 3\ \%$

Exemple 1 — Concentration sanguine en vitamine D 25(OH)D en ng/ml

Non-fumeurs	m_1 = 23,6 ng/ml
Fumeurs	m_2 = 20,9 ng/ml

Les concentrations sanguines de vitamine D

différent significativement

entre fumeurs et non-fumeurs

$p < 3\%$

Test Z de comparaison de 2 moyennes Condition d'application

1) Tailles des 2 échantillons supérieures à 30

2) Si les échantillons sont petits (<30)

on utilise le test t de Student

Comment comparer deux moyennes ? Petits échantillons

1. Test Z

2. Test T de Student

Calcul de t

$$|t| = \frac{\Delta}{\text{écart type de } \Delta} = \frac{|m_1 - m_2|}{\text{écart type de } (m_1 - m_2)}$$

écart type de $(m_1 - m_2)$??

$$\cancel{s^2_\Delta = \frac{s^2_1}{n_1} + \frac{s^2_2}{n_2}} \qquad s^2_\Delta \cong \frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}$$

Variance commune

On estime la variance des moyennes

par la variance commune des 2 échantillons

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Calcul de t

$$t = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$$

t suit une loi de Student
à $n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté

Exemple 2

Taux de cholestérol LDL (g/L)

Non-Traités	$n_1 = 15$	$m_1 = 1{,}81$	$s_1 = 0{,}50$
Traités	$n_2 = 12$	$m_2 = 1{,}41$	$s_2 = 0{,}39$

$$s^2 = \frac{(15-1)0{,}50^2 + (12-1)0{,}39^2}{15+12-2} = 0{,}21$$

$$t = \frac{|1{,}81 - 1{,}41|}{\sqrt{\frac{0{,}21}{15} + \frac{0{,}21}{12}}} = 2{,}27$$

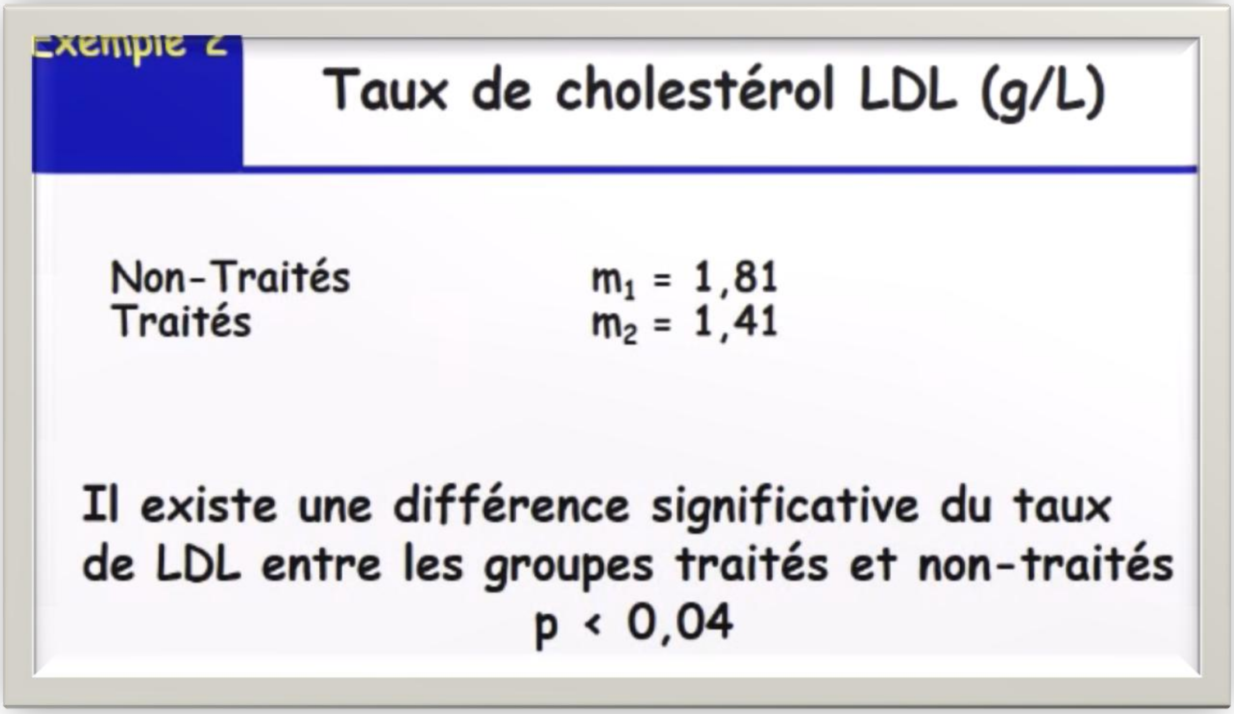
ddl = 15 + 12 -2 = 25

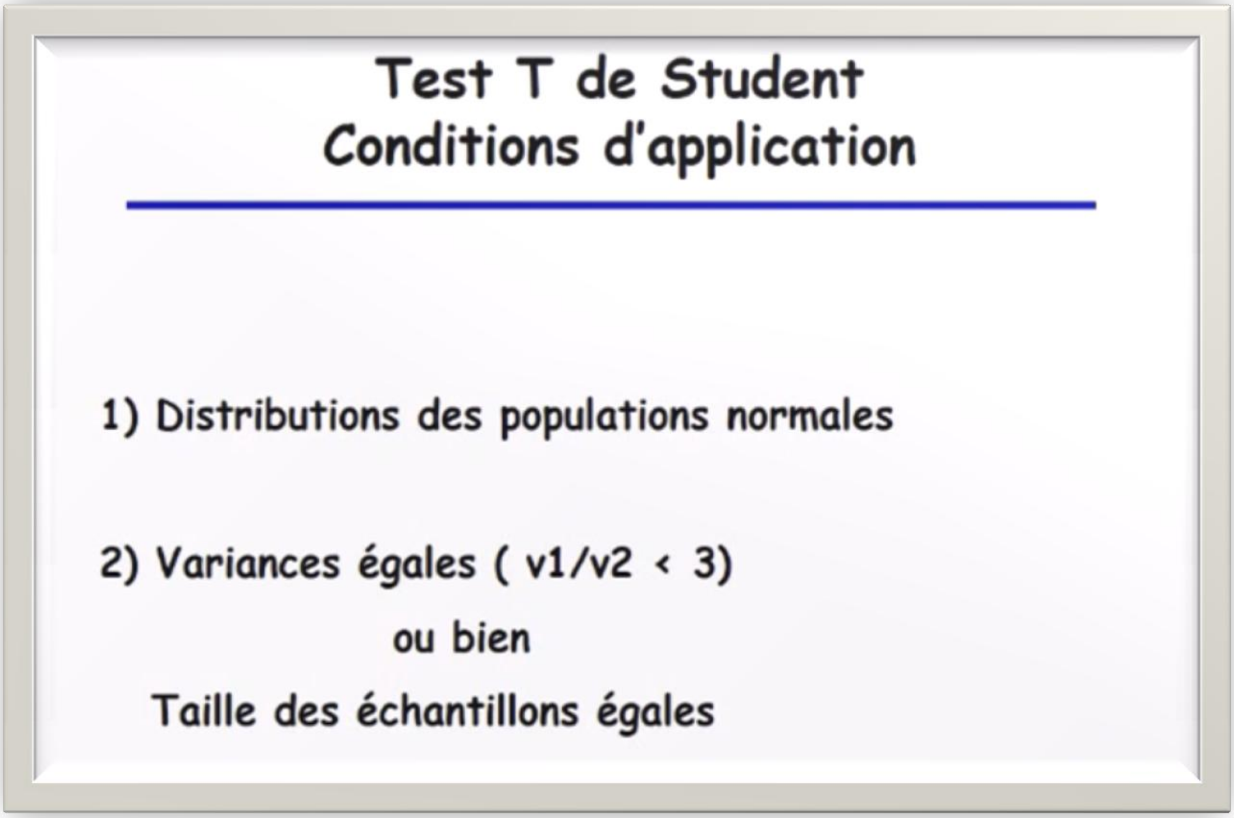
Table de la loi T de Student

t = 2,27 ; ddl=25

ddl										
5	4,77	4,03	3,36	3,00	2,76	2,57	2,02	1,48	0,73	0,13
10	3,58	3,17	2,76	2,53	2,36	2,23	1,81	1,37	0,70	0,13
15	3,29	2,95	2,60	2,40	2,25	2,13	1,75	1,34	0,69	0,13
20	3,15	2,85	2,53	2,34	2,20	2,09	1,72	1,33	0,69	0,13
25	3,08	2,79	2,49	2,30	2,17	2,06	1,71	1,32	0,68	0,13
30	3,03	2,75	2,46	2,28	2,15	2,04	1,70	1,31	0,68	0,13
∞	2,81	2,58	2,33	2,17	2,05	1,96	1,64	1,28	0,67	0,13
α	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,2	0,5	0,9

$p < 0{,}04$


Exemple 2
Taux de cholestérol LDL (g/L)
Non-Traités m_1 = 1,81
Traités m_2 = 1,41
Il existe une différence significative du taux de LDL entre les groupes traités et non-traités
$p < 0,04$


Test T de Student
Conditions d'application
1) Distributions des populations normales
2) Variances égales (v1/v2 < 3)
ou bien
Taille des échantillons égales