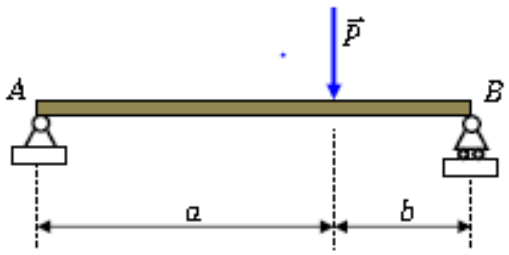
# FLEXION

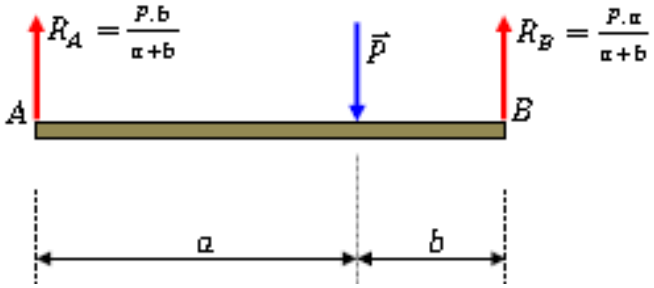
***Définition:***

La flexion est un mode de charge tel qu'il apparait dans les sections droites de la barre des moments fléchissons.

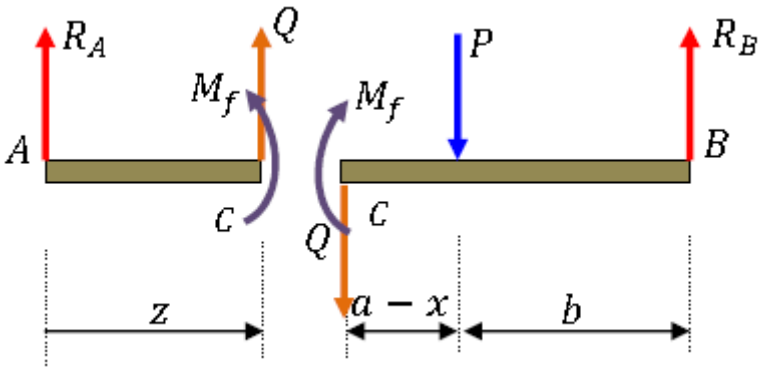
a) Considérons une barre sollicitée à un mode de charge extérieure.




b) Déterminons les réactions aux appuis:




c) Etudions les facteurs de forces intérieurs de la barre à une distance _, dans une section droite C, il apparait:




Si le moment fléchissant dans la section droite de la barre est l'unique facteur de force, les efforts tranchants et les forces normales n'existent pas, la flexion est dite pure. Le plus souvent, il apparait dans les sections droites de la barre en même temps des moments fléchissant et des efforts tranchants, on dit qu'on a une flexion simple.

**Remarque:** Une barre travaillant principalement en flexion est appelée poutre.

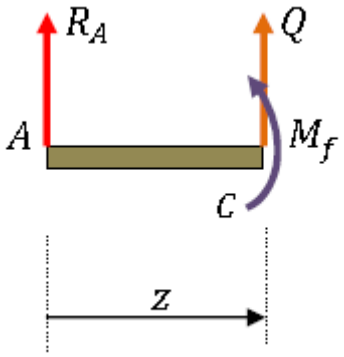
- Analysons l'exemple précédent plus en détail pour déterminer les lois de variations des facteurs de forces intérieurs, puis nous construisons les diagrammes des moments fléchissant et des efforts tranchants.
- L'analyse de forces intérieures commence habituellement par la détermination du système de forces extérieures.
- Il faut déterminer les réactions aux appuis conformément aux lois de la statique.

$$\sum MFext_B = 0 \quad ==> \quad R_A = \frac{P.b}{a+b}$$

$$\sum MFext_A = 0 \quad ==> \quad R_B = \frac{P.a}{a+b}$$

- Coupons par la pensée la poutre en deux parties au point G à la distance Z de l'appui gauche pour que chacune des deux parties soit en équilibre, il faut appliquer a la distance G une force Q et un moment fléchissant $M_f$.

Ces facteurs de forces sont déterminés des conditions d'équilibre d'une partie de la poutre. On démontre que la grandeur de forces intérieures ne dépend pas du choix de la partie gauche.

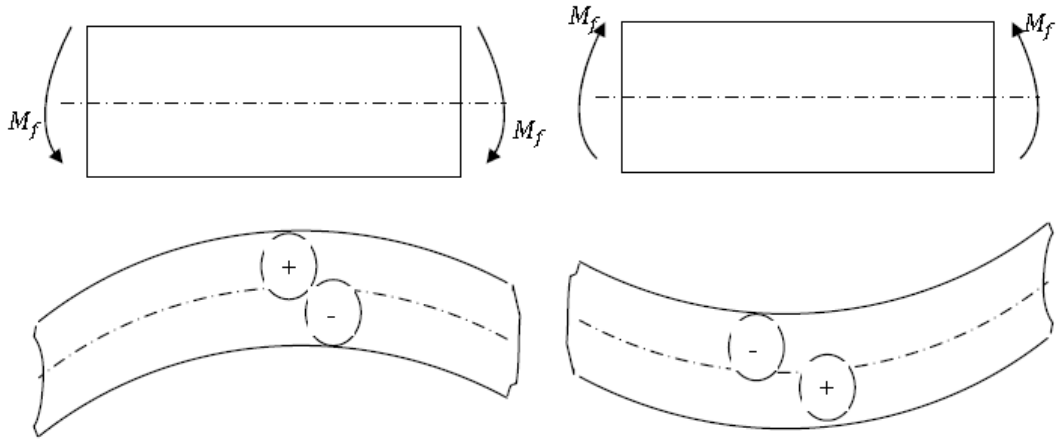



Si l'on prend la somme des moments de toutes les forces agissant sur la partie gauche de la barre par rapport à l'axe central transversal dans la section G, on obtient:

$$M_f = R_A.z$$

**Convention de signes:**

a) Signe du moment fléchissant:



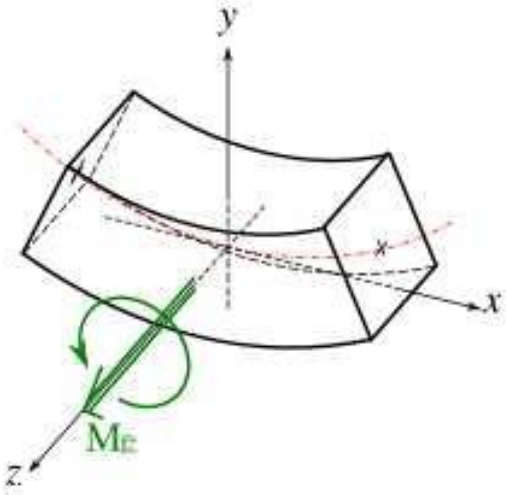

Après déformation, les fibres supérieures sont tendues et les fibres inferieures sont comprimées.

$M_f < 0$

Après déformation, les fibres supérieures sont comprimées et les fibres inferieures sont tendues.

$M_f > 0$

b) Signe de l'effort tranchant:




Nous considérerons ici la convention des efforts à droite. On remarque que la valeur de l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à la position *x* du point considéré:

$$\boldsymbol{Q = T = -\frac{dM_{fz}}{dx}}$$

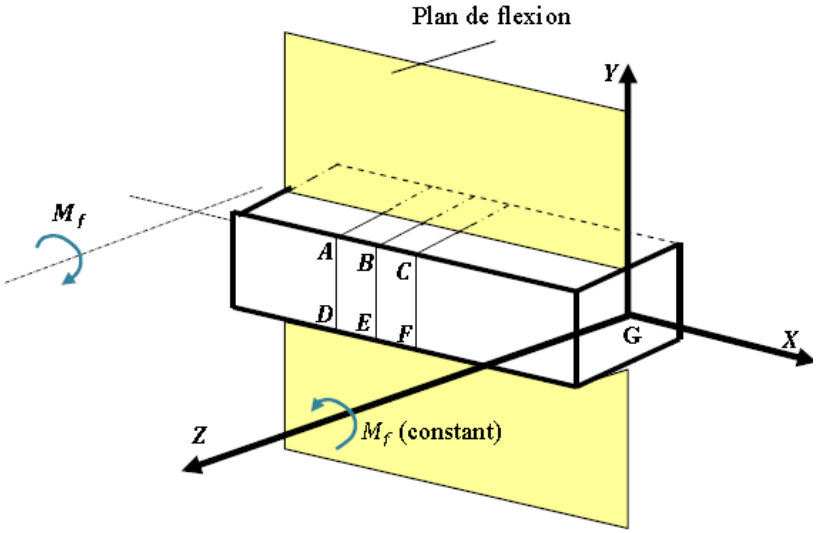
## Contraintes dans les poutres en flexion :

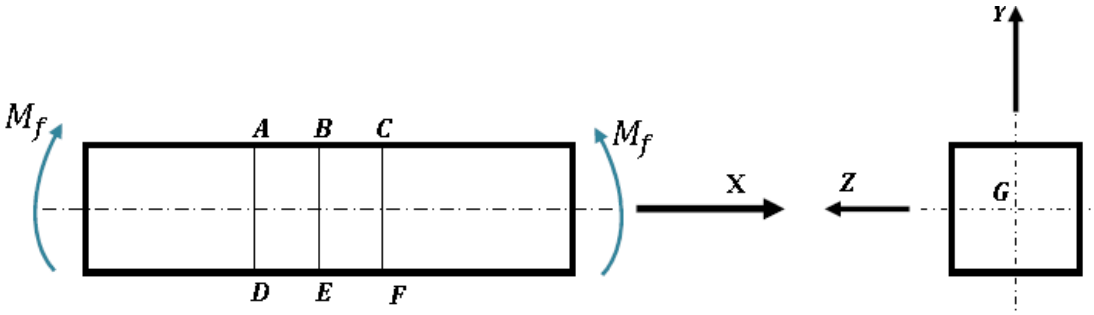
Pour établir les relations, nous nous appuyons sur les hypothèses suivantes:

- La poutre est droite avant le chargement.
- Le matériau est élastique et ses propriétés sont les mêmes en tension et encompression.
- Le matériau est homogène tout le log de la poutre.
- La flexion se produit dans un seul plan qui coïncide avec l'un des axes principal de la section droite de la poutre.

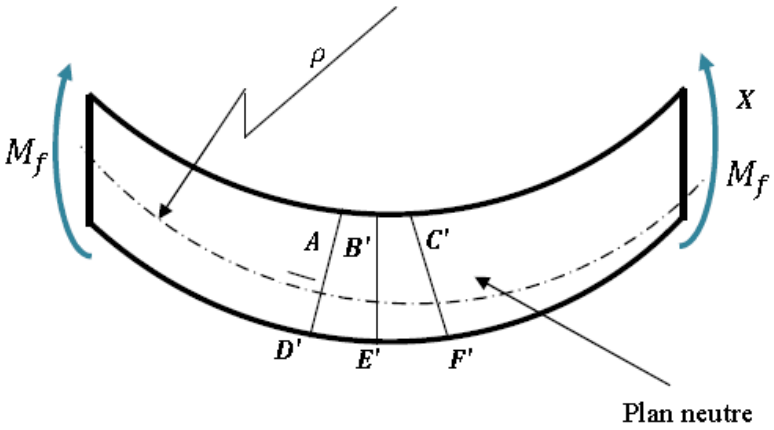
*Contraintes dues au moment fléchissant constant*: (flexion pure)

Considérons une poutre qui satisfait les hypothèses précédentes soumise à un moment fléchissant constant et positif.



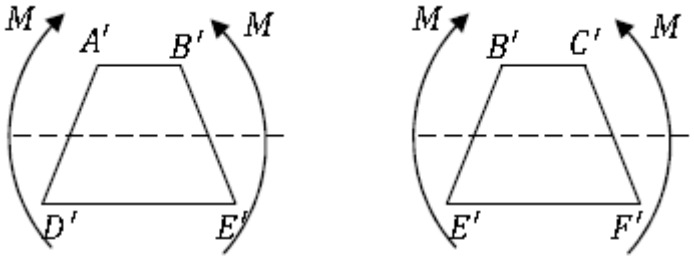




Géométrie de poutre en flexion pure $(M_f > 0)$ avant de la déformation




Géométrie de poutre en flexion pure $(M_f > 0)$ après de la déformation

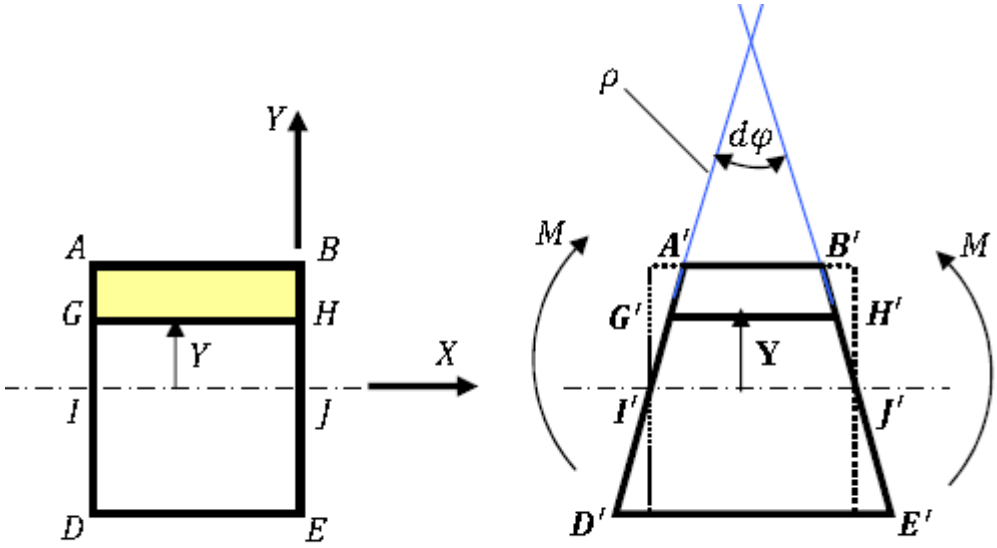
Considérons deux éléments adjacents:




**Sections planes après déformation**

a) Tous les éléments de longueur se déforment de la même façon, leurs assemblage donnent a la poutre une courbure constante, ou un rayon de courbure constant.
b) Pour ce moment M positif, les fibres supérieures se rétrécissent et les fibres inférieure s'allonge. Il existe donc un plan transversal dont lequel les fibres ne changent pas de longueur. (Par définition ce plan est appelé Plan neutre.

L'axe horizontal formé par l'intersection du plan neutre et du plan de flexion (ou plan de chargement) est appelé axe neutre. Le rayon de courbure 2 est par définition celui de l'axe neutre.




**Avant chargement** **Après chargement**

Examinant maintenant les déformations longitudinales de diverses fibres de l'élément ***ABDE*** dans le plan de flexion. Après l'effet imputable du moment $M_f$, une fibre quelconque ***GH*** situé à une distance ***Y*** au dessus de l'axe neutre (fibre ***IJ***) devient ***G'H'***, sa déformation normale $\varepsilon_x$ est donnée par l'équation suivante:

$$\varepsilon_x = \frac{G'H' - GH}{GH}$$

or initialement ***GH = IJ***; et par définition ***IJ = I'J'***, alors:

$$\varepsilon_x = \frac{G'H' - I'J'}{I'J'} = \frac{(\rho - y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}$$

D'où

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \qquad (1)$$

Cette équation (1) révèle que:

- La déformation $\boldsymbol{\varepsilon_x}$ normale varie linéairement en fonction de $\boldsymbol{Y}$ **,** ce qui est dû au fait que les sections planes demeurent planes après déformation.
- Pour un moment fléchissant $\boldsymbol{M}$ positif, les fibres supérieures ($\boldsymbol{Y} > 0$) se rétrécissent (déformation négatif " compression ") et les fibres inférieures s'allongent (déformation positif " tension ").

**Relation contrainte/déformation:**

Selon les hypothèses de base, la poutre est faite d'un seul matériau élastique, dont le module d'élastique $\boldsymbol{E}$ est le même en tous points. D'après la loi de Hooke:

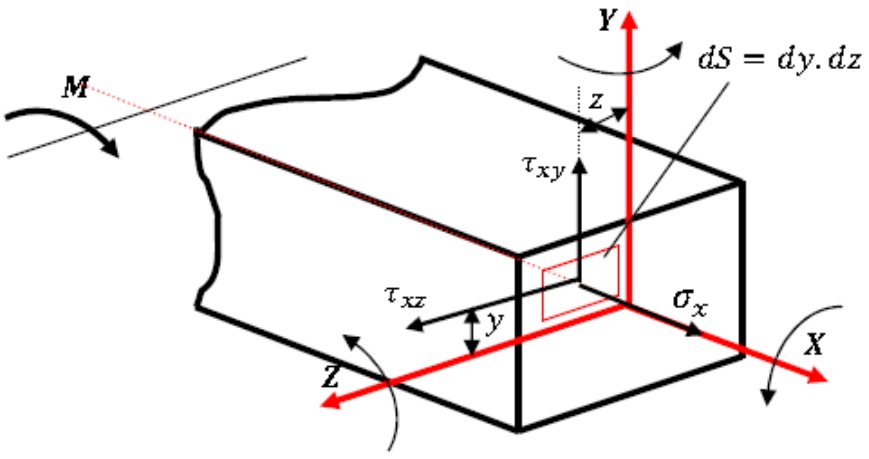
$$\boldsymbol{\sigma_x = E\ \varepsilon_x = -\frac{E}{\rho} \cdot Y} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ainsi en flexion pure les contraintes dans une section droite varient selon une loi linéaire.

$$\boldsymbol{\sigma_y = \sigma_z = 0}$$

On peut avoir trois composantes de contraintes lesquelles contribuent éventuellement à équilibrer le moment fléchissant $\boldsymbol{M_f}$.

Ces composantes de contraintes sont $\boldsymbol{(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})}$, agissant sur l'élément de surface $\boldsymbol{dS}$.



a: $\sum Fext_x = 0 \quad ==> \quad \int_S \sigma_x . dS = 0$

b: $\sum Fext_y = 0 \quad ==> \quad \int_S \tau_{xy} . dS = 0$

c: $\sum Fext_z = 0 \quad ==> \quad \int_S \tau_{xz} . dS = 0$

d: $\sum MFext/_x = 0 \quad ==> \quad \int_S \tau_{xz} . y . dS - \int_S \tau_{xy} . z . dS = 0$

e: $\sum MFext/_y = 0 \quad ==> \quad \int_S \sigma_x . z . dS = 0$

f: $\sum MFext/_z = 0 \quad ==> \quad \int_S \sigma_x . y . dS = 0$

Examinons les conditions d'équilibres qui nous mènent a la solution recherchée, c'est à dire à une relation permettant de calculer les contraintes en fonction du moment fléchissant et de la géométrie de la poutre et tenir compte des propriétés élastiques du matériau.

1) L'équation (a) d'équilibre combiné avec l'équation (2)

$$\iint -\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{\rho}}\, \boldsymbol{y\, dS} = \boldsymbol{0} = -\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{\rho}} \iint \boldsymbol{y\, dS}$$

Or $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{\rho}} \neq \boldsymbol{0}$, il en résulte que l'équation :

$$\iint \boldsymbol{y\, dS} = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(3)}$$

Cela implique que le moment statique de la section par rapport à l'axe $\boldsymbol{Z}$ doit être nul pour satisfaire l'équation d'équilibre (a); il faut donc que l'axe passe par le centroide de la section.

2) L'équation (b) est satisfaite puisque dans ce cas il n'existe aucun effort tranchant Q et que $\iint \boldsymbol{\tau_{xy}\, dS}$ à comme résultante une force de cisaillement (effort tranchant) qui agit sur la direction $\boldsymbol{Y}$.
3) ) même raisonnement que pour l'équation (b)
4) L'équation d'équilibre (d) traduit la différence des moments dus aux efforts tranchants qui agissent sur les directions $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$. L'équation est donc satisfaite encore une fois puisque $\boldsymbol{\tau_{xy}}$ **et** $\boldsymbol{\tau_{xz} = 0}$.
5) L'équation d'équilibre (e) combiné avec l'équation (2) donne $\iint (-\frac{E}{\rho}\, y \cdot Z) dS = 0$, comme $-\frac{E}{\rho} \neq 0$, il en résulte que $\iint (\, y \cdot Z) dS = 0$ (Produit de moment d'inertie). Puisque le plan de flexion ($\boldsymbol{Y,Z}$) coïncide avec un axe principal de la section, la condition est satisfaite.
6) L'équation d'équilibre (f) combiné avec l'équation (2) donne :

$$\boldsymbol{M_f = \frac{E}{\rho} \iint y^2\, dS} \qquad \boldsymbol{d'ou} \qquad \boldsymbol{M_f = \frac{E}{\rho} I_z}$$

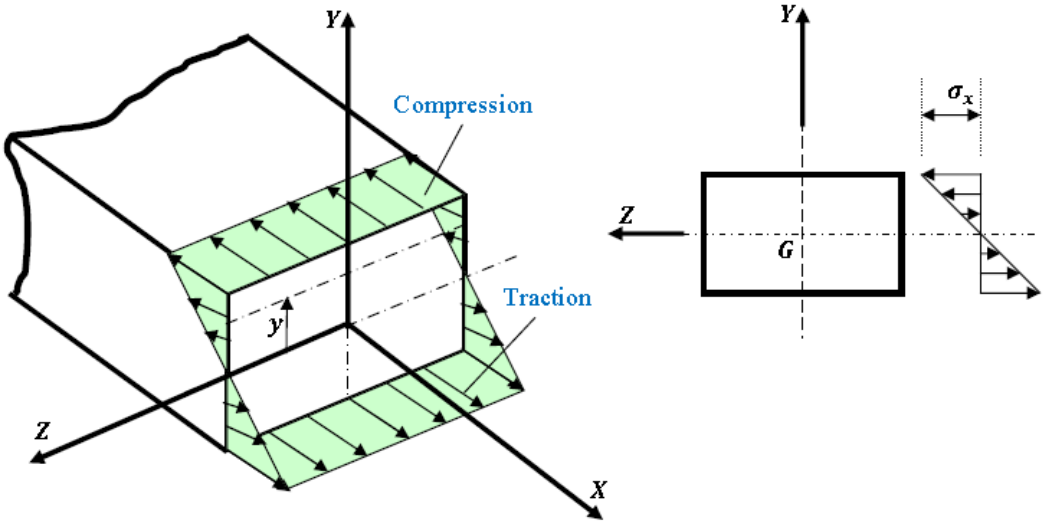
Soit

$$\boldsymbol{\frac{1}{\rho} = \frac{M_f}{E I_z}} \qquad \textbf{(4)}$$

L'équation (4), nous permet d'évaluer la déformation (flèche) d'une poutre, puisqu'elle relie le rayon de courbure ($\boldsymbol{\rho}$) au moment fléchissant $\boldsymbol{M_f}$ appliqué, au module d'élasticité du matériau $\boldsymbol{E}$ et le moment d'inertie $\boldsymbol{I_z}$.

Pour déterminer la contrainte normale, on combine l'équation (4) avec l'équation (2), ce qui donne:

$$\sigma_x = -\frac{M_f \cdot Y}{I_z} \qquad (5)$$

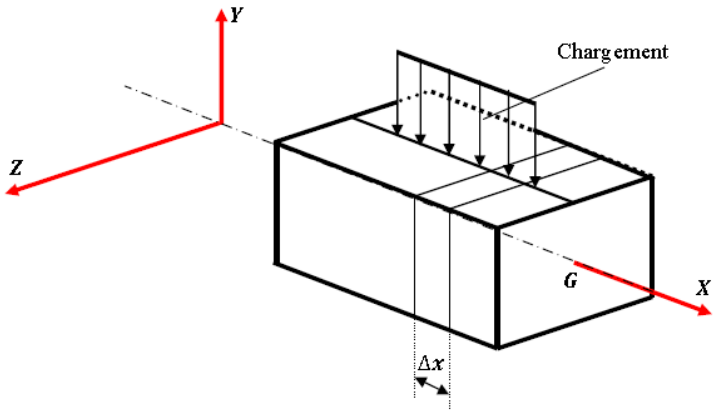


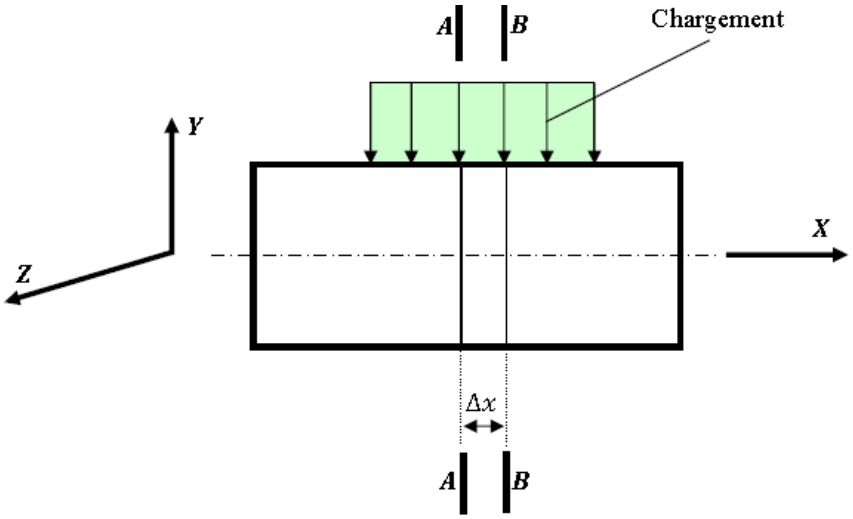

$$|\sigma_{max}| = -\frac{M_f \cdot Y}{I_z}$$

$W_z$ : module de résistance de la section

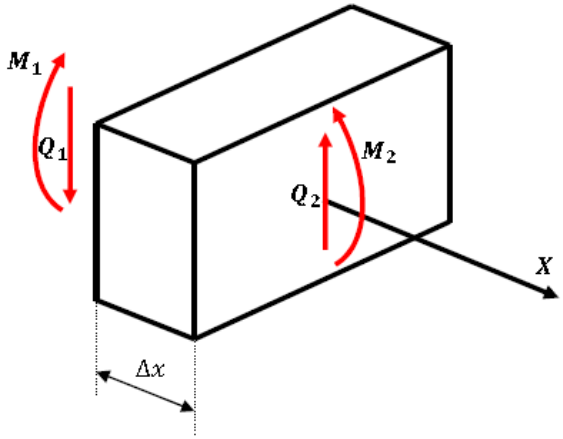
$W_z = I_z / y$

**Contraintes dues à un effort tranchant**: (Flexion simple $Q \neq 0$)






Considérons un élément de poutre de longueur Δ***x*** découpé par deux plans transversaux A-A et B-B.




Comme nous l'avons vu, l'effort tranchant et le moment fléchissant varient tout le long de la poutre et prennent des valeurs ***M1, Q1 et M2, Q2***.

**Équation d'équilibre :**

$$\sum MFext/_A = 0 \qquad \boldsymbol{M_2 = M_1 - Q \cdot \Delta X}$$

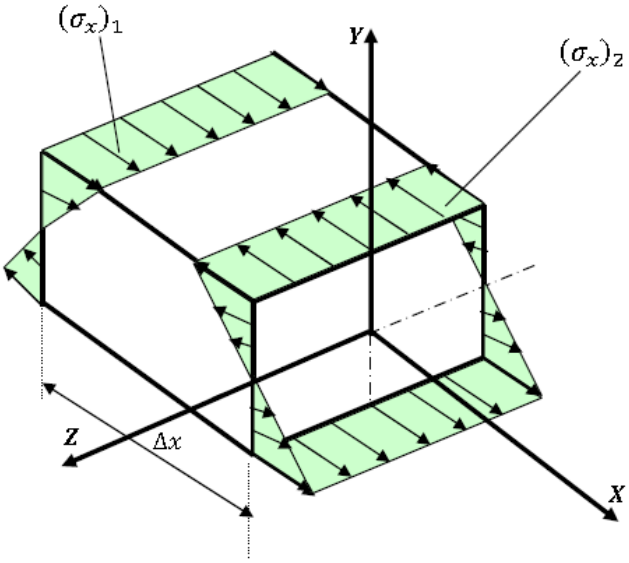
D'après l'équation (5), on tire:

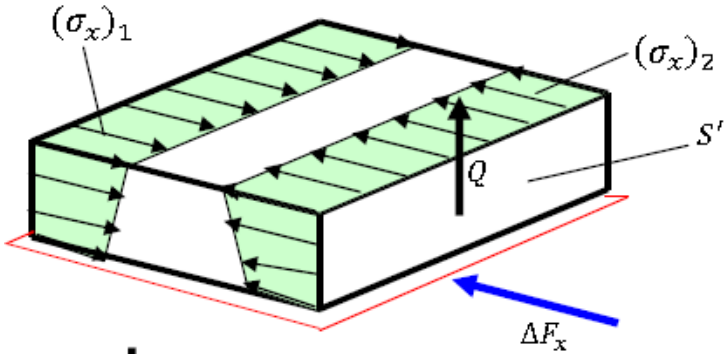
$$(\sigma_x)_1 = -\frac{M_1 . y}{I_z} \qquad (6)$$

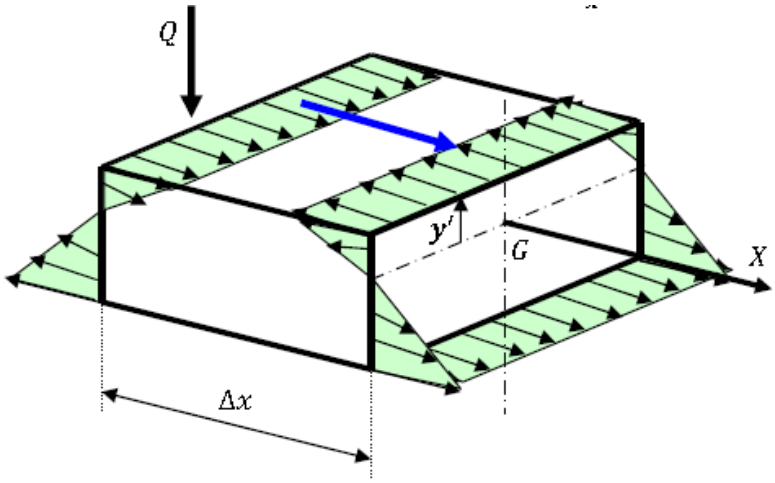
$$(\sigma_x)_2 = -\frac{M_2 . y}{I_z} = -\frac{(M_1 - Q.\Delta x) y}{I_z} \qquad (7)$$

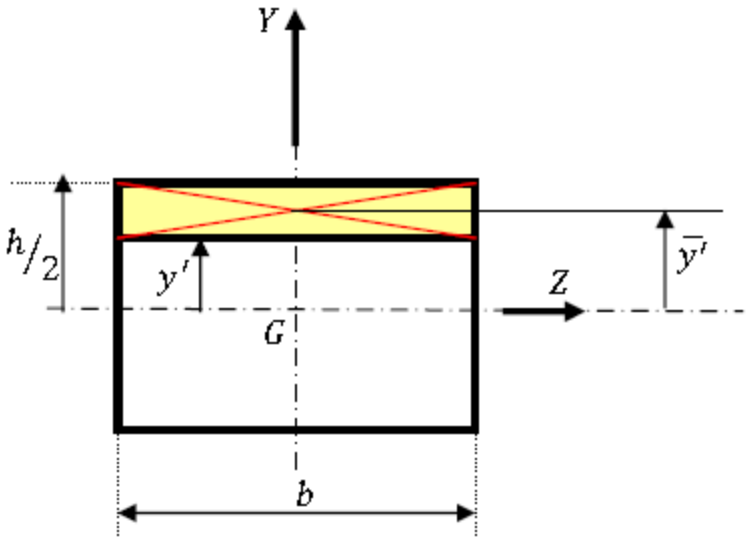
Effectuons une coupe longitudinale à un niveau quelconque (***Y = Y'***), puisque les contraintes normales sont différentes sur les faces opposées. Les deux sous éléments ne peuvent être en équilibre que s'il existe une force interne $\Delta F_x$ agissant dans la direction longitudinale à leurs interfaces.

Considérons l'équilibre des forces selon l'axe des X pour le sous élément supérieur de section S.






$$\int_{S'} (\sigma_x)_1 . dS - \int_{S'} (\sigma_x)_2 . dS - \Delta F_x = 0 \qquad (8)$$

En combinons les équations (6) et (7) avec l'équation (8) et en sachant que $M_1$ et $M_2$ et $I_Z$ ne sont pas en fonction des coordonnées de la section transversale, nous obtenons:

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x} = \frac{Q}{I_z} \int_{S'} y . dS \qquad (9)$$

Dans l'équation (9), l'intégrale représente le moment statique $S_z$ de la section $S$ par rapport à l'axe $Z$. D'une façon général, on peut évaluer la distance $\bar{Y}'$ entre le centroide de la sous section $S'$ et l'axe neutre, et calculer le moment statique S*.

$$S^* = \int y . dS = S' . \bar{y}' \qquad (10)$$

Le rapport $\frac{\Delta F_x}{\Delta x}$ qui représente la force de cisaillement moyenne par unité de longueur au plan de coupe est appelé flux de cisaillement $q_{yx}$. Les indices impliquent qu'il s'agit d'un flux de cisaillement agissant sur une face normale à $Y$ dan la direction $X$.

$$q_{yx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta x} = \frac{Q.S^*}{I_z} \qquad (11)$$

On peut également calcul la contrainte de cisaillement moyenne qui agit au plan de coupe.

$$\boldsymbol{\tau_{yx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta S_y} = \frac{\Delta F_x}{b \cdot \Delta x} = \frac{q_{yx}}{b} = \frac{QS^*}{b \cdot I_z}} \qquad \mathbf{(12)}$$

Ou $b$ est la largeur au plan de coupe considéré.

Il est important de remarquer que le flux de cisaillement $q_{yx}$ et la contrainte de cisaillement $\tau_{yx}$ (ou $\tau_{xy}$) dépendent de la coordonné $Y'$ du plan de coupe et que leurs intensités varient d'un point à l'autre de la poutre.