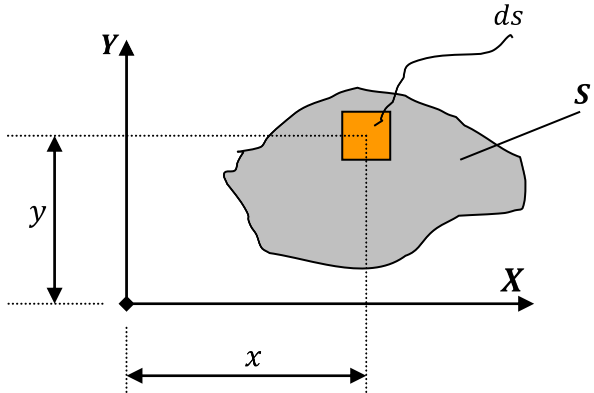
CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES D'UNE BARRE

I. **Moments statiques d'une section:**

Considérons une section droite d'une barre, on l'a rapporte à un système de coordonnées (X, Y) et considérons les deux intégrales suivantes:

$$S_x = \int_S y \, dS$$

$$S_y = \int_S x \, dS$$



L'indice " S " dont est affecté le signe d'intégration signifiant que l'intégrale est étendue à toute la section.
Chacune des intégrales est une somme de produits d'aires élémentaires " dS " par la distance à l'axe correspondant (X ou Y).
La première intégrale s'appelle **moment statique** de la section relativement à l'axe X et la seconde relativement à l'axe Y. L'unité du moment statique est le : $(m^3,\ cm^3, mm^3, \ldots)$

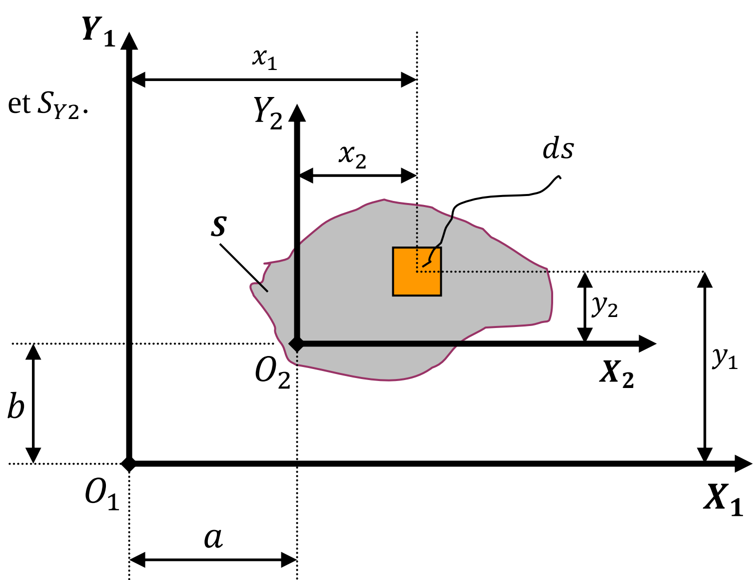
Remarque: Lorsqu'on transporte parallèlement les axes, les grandeurs des moments statiques varient.
Considérons deux couples d'axes parallèles (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2), soit " b " la distance entre les axes (X_1, X_2) et " a " la distance entre les axes (Y_1, Y_2) est b
Supposons connu l'aire de la section S, et les moments statiques par rapport aux axes X_1 et Y_1, (S_{X1} et S_{X2}) sont connus.

Déterminer les moments statiques S_{X2} et S_{Y2}.
Les moments statiques cherchés:

$$S_{X2} = \int_S y_2 dS = \int_S (y_1 - b) dS$$

$$S_{Y2} = \int_S x_2 dS = \int_S (x_1 - a) dS$$

D'ou:



$$\begin{cases} \boldsymbol{S_{X2} = S_{X1} - bS} \\ \boldsymbol{S_{Y2} = S_{Y1} - aS} \end{cases}$$

Remarque: Lorsqu'on transporte parallèlement les axes, le moment statique varie d'une quantité égale au produit de l'aire S par la distance entre les axes.

Considérons la première expression, La quantité b peut être quelconque, positif comme négatif. Aussi, peut être choisie de telle sorte que le produit bS soit égal a S_{x1}. Alors pour ce cas particulier, le moment statique S_{x2} par rapport à l'axe X_2 s'annule.($S_{x2} = 0$).

Définition: Un axe par rapport auquel le moment statique est nul est appelé **axe central.** Il est unique dans une famille d'axes parallèles, et la distance à cet axe d'un certain axe x_1 arbitraire est:

$$\boldsymbol{b = Y_c = \frac{S_{X1}}{S}}$$

D'une manière analogue pour $S_{Y2} = 0$ et $S_{Y1} = aS$, d'où

$$\boldsymbol{a = X_c = \frac{S_{Y1}}{S}}$$

Remarque: Le point d'intersection des axes centraux s'appelle le centre de gravité de la section. Par rotation des axes, on peut montrer que le moment statique relativement à n'importe quel axe passant par le centre de gravité est nul.

<u>Pour une figure composée</u>: Les moments statiques par rapport aux axes:

$$\boldsymbol{\begin{cases} S_{X1} = S_1.Y_{C1} + S_2.Y_{C2} + S_3.Y_{C3} + \cdots.. + S_i.Y_{Ci} \\ S_{Y1} = S_1.X_{C1} + S_2.X_{C2} + S_3.X_{C3} + \cdots.. + S_i.X_{Ci} \end{cases}}$$

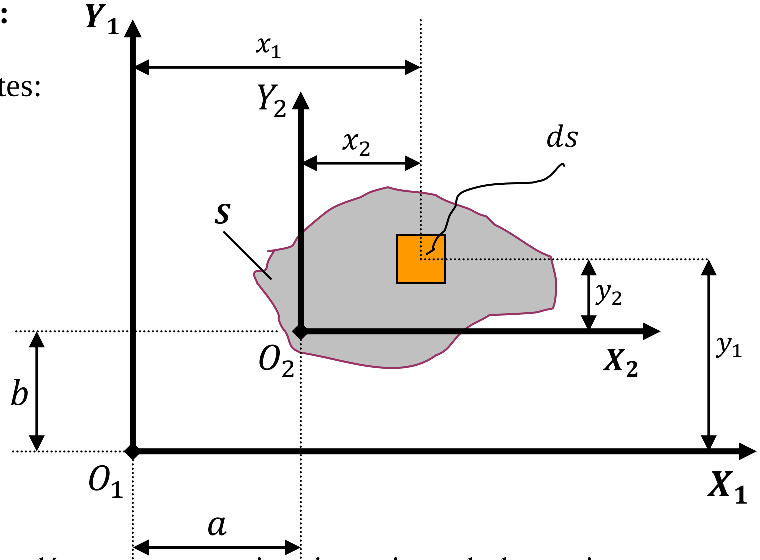
Le centre de gravité dans le système d'axe (X_C, Y_C):

$$\boldsymbol{X_C = \frac{S_{Yi}}{S_{Tot}}} \qquad \boldsymbol{Y_C = \frac{S_{Xi}}{S_{Tot}}} \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{S_{Tot} = S_1 + S_2 + \cdots.. + S_i}$$

II. Moments d'inerties d'une section:

Considérons les trois intégrales suivantes:

$$\begin{cases} I_{X1} = \int_S y_1^2 dS \\ I_{Y1} = \int_S x_1^2 dS \\ I_{X1Y1} = \int_S x_1 y_1 dS \end{cases}$$



Les deux premières intégrales sont appelées moments d'inerties axiaux de la section par rapport aux axes X_1 et Y_1. La troisième intégrale est le produit d'inertie de la section par rapport aux axes X_1 et Y_1. (L'unité du moment d'inertie est le $(m^4,\ cm^4, mm^4, \ldots)$).

Remarque:
Les moments d'inerties axiaux sont toujours **positifs.** Par contre le produit d'inertie peut être positif comme négatif selon la disposition de la section par rapport aux axes X_1 et Y_1.

Etablissons les formules de transformations des moments d'inerties lorsqu'on transporte les axes parallèles: (Substituant ici: $\begin{cases} \boldsymbol{x_2 = (x_1 - a)} \\ \boldsymbol{y_2 = (y_1 - b)} \end{cases}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{I_{X2} = \int_S y_2^2 dS = (y_1 - b)^2 dS = I_{X1} + b^2 S + 2bS_{X1}} \\ \boldsymbol{I_{Y2} = \int_S x_2^2 dS = (x_1 - a)^2 dS = I_{Y1} + a^2 S + 2aS_{Y1}} \\ \boldsymbol{I_{X2Y2} = \int_S x_2 y_2 dS = (x_1 - a)(y_1 - b) dS = I_{X1Y1} + abS - bS_{Y1} - aS_{X1}} \end{cases}$$

Si les axes X_1 et Y_1 sont centraux, on à $S_{X1} = S_{Y1} = 0$, les expressions déduites se simplifient considérablement.

$$\begin{cases} \boldsymbol{I_{X2} = I_{X1} + b^2 S} \\ \boldsymbol{I_{Y2} = I_{Y1} + a^2 S} \\ \boldsymbol{I_{X2Y2} = I_{X1Y1} + abS} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{I_{X2} = I_{XG} + b^2 S} \\ \boldsymbol{I_{Y2} = I_{YG} + a^2 S} \\ \boldsymbol{I_{X2Y2} = I_{XGYG} + abS} \end{cases}$$

Par conséquent lors du déplacement parallèle des axes (un des deux axes étant central), les moments d'inerties axiaux varient d'une quantité égale au produit de l'aire $\boldsymbol{S}$ par le carré de la distance $\boldsymbol{d}$ entre les axes.

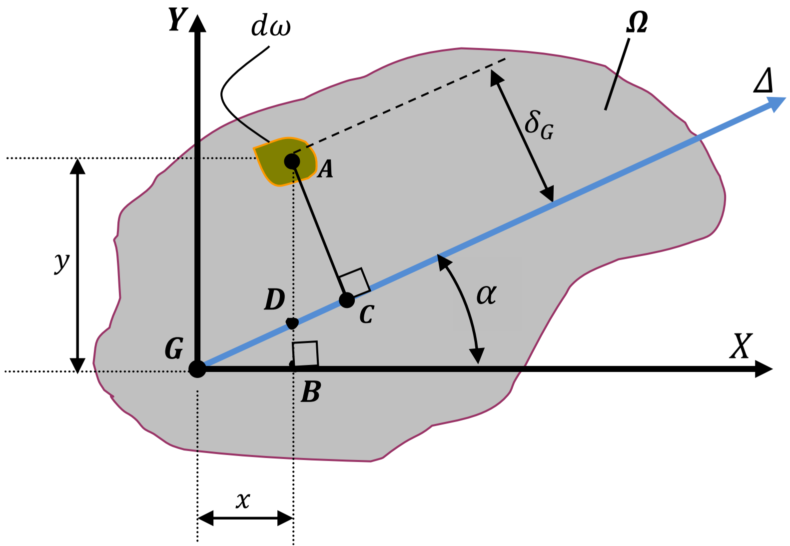
$$\boldsymbol{I_{OX} = I_{GX} + d^2 S}$$

Théorème de Huygens: le moment d'inertie d'une section droite par rapport à un axe donné est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au premier et passant par le centre d'inertie de la section augmenté du produit de l'aire total de la section par le carré de la distance entre les axes.

Remarque: Il résulte de la formule précédente que $\boldsymbol{I_{OX} > I_{GX}}$, par conséquent si l'on prend tous les axes ayant une même direction, le moment d'inertie sera minimum par rapport à l'axe passant par le centre de gravité $(\boldsymbol{d = 0})$.

III. Variation du moment d'inertie par rapport à des axes passant par le centre de gravité de la section droite:

Nous allons étudier la variation du moment d'inertie par rapport à un axe qui tourne autour du centre de gravité G.
Rapportons l'aire Ω à deux axes de coordonnées fixes G_X et G_Y, l'axe $\Delta\,(G_\Delta)$ axe par rapport auquel on veut déterminer le moment d'inertie.



Considérons un point A et un élément d'aire infiniment petit $d\omega$; abaissant les perpendiculaires AB sur G_X et AC sur $G\Delta$. On remarque sur la figure que les segments $BD + DA = BA$; des triangles GBD et DAC, on tire:

$$\begin{cases} \boldsymbol{BD = GB \tan\alpha} \\ \boldsymbol{DA = AC/\cos\alpha} \end{cases} \quad ==> \boldsymbol{GB\tan\alpha + AC/\cos\alpha = BA}$$

Si l'on remarque que $GB = x$ et $BA = y$ (coordonnées du point A) et $AC = \delta_G$ (distance du point A à l'axe Δ).La relation devient : $x\tan\alpha + \delta_G/\cos\alpha = y$
On multiplie par $\cos\alpha$, on tire:

$$\boldsymbol{\delta_G = y\cos\alpha - x\sin\alpha}$$

Calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe G_Δ:

$$\boldsymbol{I_\Delta = \int_\Omega {\delta_G}^2 d\omega = \int_\Omega (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 d\omega}$$

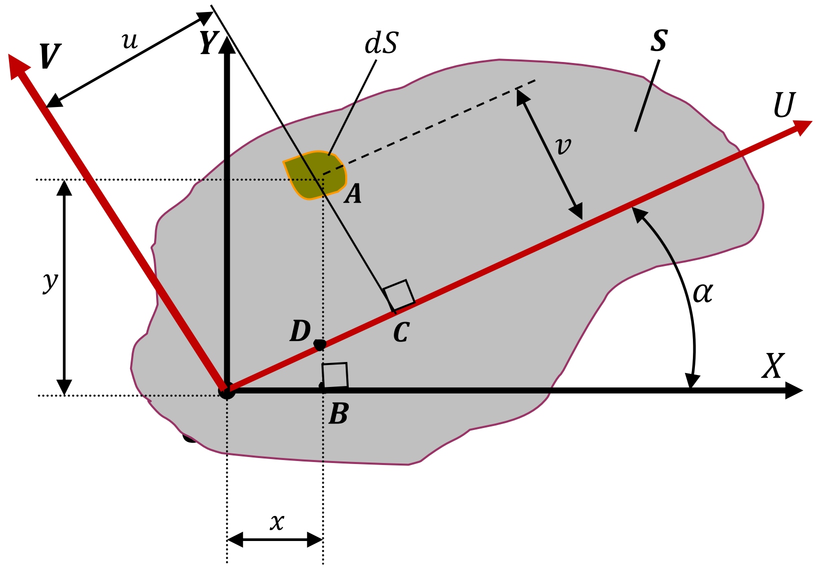
$$\boldsymbol{I_\Delta = \int_\Omega y^2 cos^2\alpha\, d\omega + \int_\Omega x^2 sin^2\alpha\, d\omega - \int_\Omega 2xy\sin\alpha\cos\alpha\, d\omega}$$

$$\boldsymbol{I_\Delta = I_x\, cos^2\alpha + I_y\, sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha}$$

On remarque que $\boldsymbol{I_\Delta}$dépend de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ c'est à dire de l'angle que fait l'axe Δ avec l'axe X. Si $\boldsymbol{\alpha}$ varie, $\boldsymbol{I_\Delta}$varie. Si l'on suppose que l'axe Δ est tout d'abord confondue avec l'axe X, puis on le fait tourner autour de G de façons à revenir s'appliquer sur l'axe X après une rotation de 2π, (Puisque $\boldsymbol{sin^2\alpha}$, $\boldsymbol{cos^2\alpha}$ et $\boldsymbol{\sin 2\alpha}$) sont compris entre$(-1, +1)$.

Le moment d'inertie $\boldsymbol{I_\Delta}$varie de façon *continue*. Au cours de cette variation $\boldsymbol{I_\Delta}$ passera donc par deux valeurs l'une maximum et l'autre minimum.
Il existe deux valeurs de $\boldsymbol{\alpha}$ différentes de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est à dire deux positions rectangulaires de l'axe Δ, l'une est un maximum et l'autre est un minimum. Ces positions de l'axe Δ s'appellent **axes principaux d'inertie.**

Définition: Tous les axes passant par le centre de gravité d'une surface, il existe deux axes perpendiculaires l'un par rapport à l'autre appelés **axes d'inerties principaux**, et les moments d'inerties correspondants sont appelés **moments d'inerties principaux** dont l'un est maxi et l'autre est mini.



$$v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$
$$u = y\sin\alpha - x\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{I_U = \int_S v^2 dS = (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dS = I_X\, cos^2\alpha + I_Y\, sin^2\alpha - I_{XY}\, \sin 2\alpha} \\ \boldsymbol{I_V = \int_S u^2 dS = (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2 dS = I_X\, sin^2\alpha + I_Y\, cos^2\alpha + I_{XY}\, \sin 2\alpha} \\ \boldsymbol{I_{UV} = \int_S uvdS = (y\cos\alpha - x\sin\alpha)(y\sin\alpha - x\cos\alpha)dS = I_{XY}\, \cos 2\alpha + \frac{I_X - I_Y}{2}\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Pour que les axes U et Vsoit principaux, il faut que $(\boldsymbol{I_{UV} = 0})$. Ceci nous permet d'obtenir cette expression qui permet de trouver la position de l'axe principal.

$$\boldsymbol{\tan 2\alpha = -\frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}}$$

Pour cette valeur de l'angle α, l'un des moments axiaux est maximum et l'autre est minimum.

Définition: Les axes par rapport auxquels le produit d'inertie est nul, les moments axiaux prennent leurs valeurs extrémales et sont appelés **axes principaux**. S'ils sont en outre **centraux** les moments d'inerties sont appelés alors **axes centraux principaux.**

Les moments d'inerties axiaux par rapport aux axes principaux sont appelés **moments d'inerties principaux.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{I_U = \dfrac{I_X + I_Y}{2} - \dfrac{I_Y - I_X}{2}\cos 2\alpha - I_{XY}\sin 2\alpha} \\ \boldsymbol{I_V = \dfrac{I_X + I_Y}{2} + \dfrac{I_Y - I_X}{2}\cos 2\alpha + I_{XY}\sin 2\alpha} \end{cases}$$

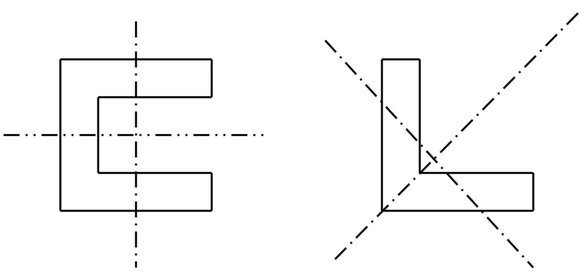
Eliminant l'angle α à l'aide de l'expression $\tan 2\alpha = \frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}$

$$\boldsymbol{I_{\substack{max \\ min}} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_X}{2}\right)^2 + {I_{XY}}^2}}$$

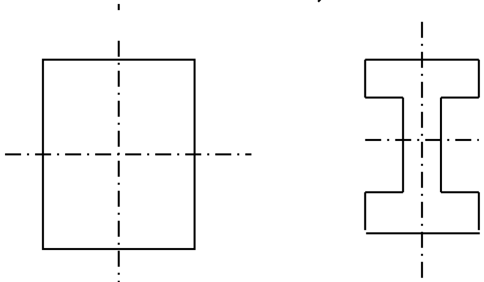
<u>Formules pour calculer les moments d'inerties centraux principaux</u>

$$\boldsymbol{\tan 2\alpha = -\frac{2I_{GXGY}}{I_{GY} - I_{GX}}}$$

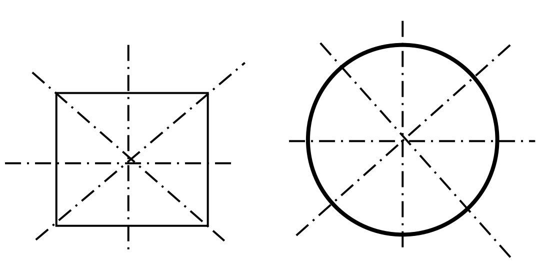
$$\boldsymbol{I_{\substack{Gmax \\ Gmin}} = \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{GY} - I_{GX}}{2}\right)^2 + {I_{GXGY}}^2}}$$



a- Si une aire plane représente un axe de symétrie, cet axe est un axe principal d'inertie.



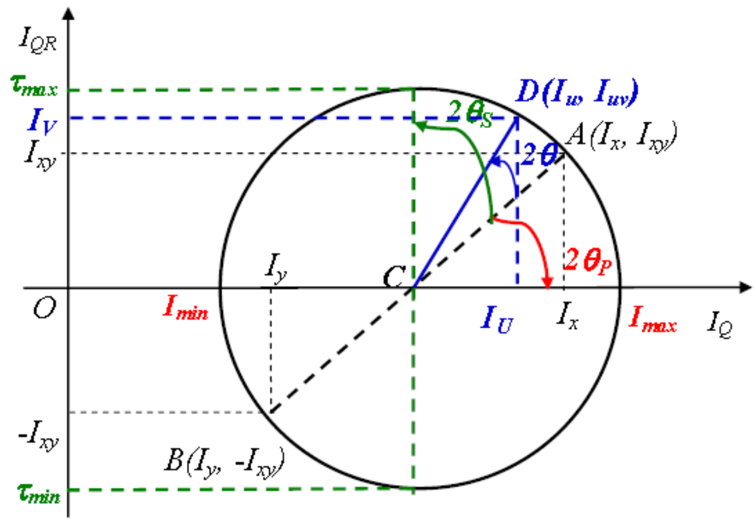
b- Si une aire plane représente deux axes de symétries, ces axes sont des axes principaux d'inerties.



c- Si une aire plane représente plus de deux axes de symétrie, tous les axes passant par le centre de gravité sont des axes principaux d'inerties et leur moments d'inerties par rapport à ces axes sont égaux.

Pour déterminer (I_{max}) et (I_{min}), on peut utiliser le cercle de ***Mohr***. Pour tracer le cercle de ***Mohr***, on suit les étapes suivantes:

1- tracer un repère orthogonal et orthonormé (*O, I_Q, I_{QR}*)
2- placer les points *A(Ix, Ixy) et B(Iy, -Ixy) dans ce repère*
3- déduire le point *C, point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses*
4- déduire du cercle de *Mohr Imax (I_1) et Imin (I_2):*



$$I_{max} = I_1 = \overline{OC} + R$$

$$I_{min} = I_2 = \overline{OC} - R$$

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + \left(I_{xy}\right)^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + \left(I_{xy}\right)^2}$$