Chapitre 3 : Dynamique des fluides parfaits

Voici les points essentiels à retenir :

(1) Le fluide est supposé parfait. Il est soumis aux seules forces de pression et de pesanteur. Par application de la relation fondamentale de la dynamique à un élément de fluide de masse dm, on aboutit à l'équation d'Euler :

$$\mathrm{dm}\,\vec{a} = \rho \mathrm{dV}\,\vec{a} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P\,\mathrm{dV} + \rho\vec{g}\,\mathrm{dV}$$

où :

- $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$: Accélération particulaire (voir chapitre 2).
- $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P\,\mathrm{dV}$: Force de pression
- $+\rho\vec{g}\,\mathrm{dV}$: Force de pesanteur

(2) Lorsque la masse volumique du fluide ρ reste constante au cours du mouvement de la particule de fluide (fluide incompressible), l'équation d'Euler prend la forme suivante :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)v = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}(gz) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\rho} + gz\right)$$

z représente la hauteur de la particule de fluide définie sur un axe vertical ascendant $O\vec{k}$ conduisant à $\vec{g} = -g\vec{k}$.

(3) <u>Ecoulements unidirectionnels (cas général, voir Chapitre 2) :</u>

Par projection de l'équation d'Euler ci-dessus sur un axe horizontal $O\vec{x}$, on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dP}{dx}$$

(4) <u>Ecoulements permanents unidirectionnels (voir Chapitre 2) :</u>

Par projection de l'équation d'Euler ci-dessus sur un axe horizontal $O\vec{x}$, on obtient :

$$v\,\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dP}{dx}$$

(5) <u>Ecoulements uniformes unidirectionnels (voir Chapitre 2) :</u>

Par projection de l'équation d'Euler ci-dessus sur un axe horizontal $O\vec{x}$, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{dP}{dx}$$

(6) La relation de Bernoulli est la traduction énergétique de l'équation d'Euler, lorsque le fluide est parfait, incompressible en écoulement permanent soumis aux seules forces de pesanteur et de pression :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = Cte$$

Où :

• $\frac{v^2}{2}$ représente l'énergie cinétique massique.

• gz représente l'énergie potentielle de pesanteur par unité de masse.

• $\frac{P}{\rho}$ représente l'énergie de pression par unité de masse.

Comme le fluide est parfait donc exempt de forces de frottement (forces de viscosité), l'énergie mécanique, somme de ces trois énergies, se conserve au cours du mouvement du fluide. Cette relation, valable le long d'une ligne de courant, se généralise à tout le volume si l'écoulement est irrotationnel. En multipliant la relation de Bernoulli par ρ (Cte), on voit apparaître des termes homogènes à une pression (qui s'expriment donc en Pa) :

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + P = Cte$$

• $\frac{\rho v^2}{2}$ représente la pression dynamique (énergie cinétique par unité de volume)

• ρgz représente la pression hydrostatique en un point du fluide de côte z (énergie potentielle par unité de volume).

• P représente la pression proprement dite (travail des forces de pression par unité de volume).

La somme de ces trois pressions est constante. Elle désigne la charge de l'écoulement qui est conservée. En divisant la relation de Bernoulli par g, on voit apparaître des termes homogènes à une hauteur (énergie par unité de poids) qui s'expriment donc en m :

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = Cte$$

Où :

• $\frac{v^2}{2g} = h_v$ représente la hauteur cinétique d'où tombe dans le vide (par opposition à l'eau) une particule de fluide pour acquérir la vitesse $v = \sqrt{2gh_v}$.

• z est la côte du point considéré. Dans le cas d'un tube cylindrique de section variable et de forme courbe, z indique sa ligne médiane.

• $\frac{P}{\rho g} = h_P$ représente la hauteur d'une colonne de fluide incompressible qui produit la pression P telle que $P = \rho g h_P \Rightarrow h_P = \frac{P}{\rho g}$.

• $h_z = h_P + z$ est la hauteur piézométrique et sa ligne représentative, la ligne piézométrique
La somme des trois hauteurs, z, h_v et h_P, donne la ligne de charge qui est conservée bien que les valeurs de ces hauteurs varient d'un point à un autre du tube.

(7) <u>Exemples d'application de la relation de Bernoulli</u> :

• <u>Expérience de Torricelli</u> : Soit un réservoir cylindrique de surface libre S_A en z_A muni d'un petit orifice à sa base de côte z_B et de section S_B telle que $S_B << S_A$. Une ligne de courant part du point A de la surface libre du réservoir, arrive à l'orifice au point B avant de s'écouler vers l'extérieur. Par application de la relation de Bernoulli entre les points A et B et sachant que les pressions aux niveaux de la surface du réservoir P_A et de l'orifice P_B sont égales à la pression atmosphérique (surfaces en contact avec l'air) et que la vitesse v_A est négligeable devant la vitesse v_B car $S_B << S_A$, on aboutit à $v_B = \sqrt{2gh}$ où $h = z_A - z_B$. Cette formule montre que deux liquides de masses volumiques différentes s'écoulent à travers cet orifice à la même vitesse (car v_B est indépendant de ρ). Une autre conséquence de cette formule est que plus la hauteur de liquide h est importante, plus la vitesse d'éjection v_B est élevée. Application : vase de Mariotte à débit constant …

• <u>Effet Venturi</u> : Un tuyau cylindrique de section d'entrée S_A subit un étranglement en B où sa section devient S_B ($S_B < S_A$). La vitesse d'un fluide incompressible qui circule de A vers B augmente dans l'étranglement ($v_B > v_A$) provoquant une dépression en B ($P_B < P_A$) (les particules de fluide sont accélérées en B pour permettre à la même quantité de matière transportée par le fluide de passer de A en B pendant le même laps de temps). Par application de la relation de Bernoulli entre des points A et B et en tenant compte des inégalités mentionnées ci-dessus et de l'équation $v_A S_A = v_B S_B$ (voir Chapitre 2), on aboutit à :

$$P_A - P_B = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right) D_V^2 = k\, D_V^2$$

Cette expression montre que la différence de pression aux points A et B du tube est proportionnelle au carré du débit. Application : mesure des débits, trompe à eau pour faire le vide dans une enceinte fermée ...

• <u>Tube de Pitot</u> : Le tube de Pitot est un dispositif qui permet de déduire la vitesse v_B du fluide à partir de la différence de pression entre deux points A et B où sont installées deux prises de pression, une prise de pression en A (cylindre vertical de petit diamètre) dont l'orifice est face au courant ($v_A = 0$) et une seconde en B dont est l'orifice est le long des lignes de courant. Par application de la relation de Bernoulli entre des points A et B, on aboutit à :

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,(P_A - P_B)}{\rho}}$$

La différence de pression $P_B - P_A$ est déterminée par la mesure de la dénivellation h du liquide dans les deux prises de pression (différence de niveaux de montée du fluide). Application : aéronautique …

Bon courage
Prof. S. KHENE