

Chapitre: Objets structurés

On peut construire des objets du type structurés :

- Séquence (exprseq).
- Listes (list).
- Chaines des caractères (string).
- Tableau (array).

Séquences

une séquence est une suite d'objets quelconque séparés par des vergules :

```
[> restart :  
=> S := 1, a, 2, x, 3;  
S := 1, a, 2, x, 3 (1)  
=> whattype(S);  
exprseq (2)  
=> S[2];  
a (3)
```

La séquence vide se note "**NULL**" :

```
[> T := NULL;  
T := (4)
```

Pour concatener des séquences c-à-d les just a poser les unes à côté

des autres: on les sépare par des virgules :

```
[> U := 4, 6, 8;
  U:=4, 6, 8 (5)
[> S, T, U;
  1, a, 2, x, 3, 4, 6, 8 (6)
```

On peut créer des séquences :

```
[> x$5;
  x, x, x, x, x (7)
[>
```

Grâce la commande "seq"(sequence) :

```
[> seq(1/n, n = 1 ..6);
  1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 (8)
[>
```

Listes

C'est une suite d'objets quelconque séparé par des virgules, et encadrée par des crochets "[]" :

```

[> restart :
[> L := [ 1, 5, a, 8 ];
[> L := [ 1, 5, a, 8 ] (9)
[> whattype( % );
[> list (10)

```

pour transformer une liste en séquence, il faut enlever les crochets par la commande "**op**" (<<**operands**>>) :

```

[> S := op(L);
[> S := 1, 5, a, 8 (11)
[> whattype(S);
[> exprseq (12)

```

Pour transformer une séquence en liste, il suffit ajouter les crochets ([]):

```

[> restart :
[> S := x, y, z, alpha;
[> S := x, y, z, α (13)
[> L := [S];
[> L := [ x, y, z, α ] (14)

```

La liste vide :

```
[>  $M := [ ];$   
=  
[>  $M := [ ]$  (15)
```

Le nombre d'éléments par la commande "**nops**" :

```
[>  $nops(L);$   
=  
[> 4 (16)
```

On selectionne le 2éme élément de la liste **L** :

```
[>  $L[2];$   
=  
[> 5 (17)
```

Ou bien On selectionne le 2éme élément de la liste L par la commande "**op**" :

```
[>  $op(2, L);$   
=  
[> 5 (18)
```

On peut trier une liste par ordre croissante grâce à la commande "**sort**" :

```
[> restart :
[> L := [2, 8, 4, 9, 1];
[> L := [2, 8, 4, 9, 1] (19)
[> sort(L);
[> [1, 2, 4, 8, 9] (20)
```

On peut trier une liste par ordre l'exicographique :

```
[> sort( ["e", "sa", "sz", "saa", "t", "b", "a"], lexorder);
[> ["a", "b", "e", "sa", "saa", "sz", "t"] (21)
```

On peut transformer une liste en somme ou produit, on utilise la commande "**convert**" :

```
[> restart :
[> M := [2, 8, 4, x, z2];
[> M := [2, 8, 4, x, z2] (22)
[> convert(M, `+`); # remarque on utilise enti-slache (alt + 7)
[> z2 + x + 14 (23)
```

```

[> convert(M, ``); # remarque on utilise enti—slache (alt+7)
                        64 x z2
[=
[>

```

(24)

On peut sélectionner ou supprimer certains éléments par les commandes "**select**" et "**remove**" :

```

[>                                restart :
[=
[>                                L := [seq(i, i = 5 ..30) ];
L := [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,
      22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]
[=
[>

```

(25)

On sélectionne les nombres premiers :

```

[>                                select(isprime, L);
[=                                [5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29]
[>

```

(26)

Pour supprimer les termes positifs, il faut créer une fonction booléenne :

```

[>                                restart :
[=
[>                                positif := x → evalb(x ≥ 0);
                                positif := x → evalb(0 ≤ x)
[=

```

(27)

```

>                                positif(4);
                                true                                (28)
=
>                                positif(-10);
                                false                               (29)
=
>                                L := [seq(i, i=-5..10)];
L := [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]      (30)
=
>                                remove(positif, L);
                                [-5, -4, -3, -2, -1]            (31)
=
>

```

Pour ajouter un élément à une liste, on convertit la liste en séquence par la commande "**op**", puis on concatène la séquence le nouvel élément grâce au symbole virgule (","). En fin, on convertit la séquence obtenue en liste grâce aux crochets ("[]").

```

>                                restart :
=
>                                L := [seq(i, i=1..9)];
                                L := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]      (32)
=
>                                L := [op(L), 10];
                                L := [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]  (33)
=
>

```

Ensembles

Un ensemble c'est une suite d'objets quelconques séparés par des virgules et encadrée par des accolades ("{ }").

Remarque : dans un ensemble il n'y a ni ordre ni répétition.

```

[> restart :
[> E := { a, b, a, c };
[> E := { a, b, c } (34)
[> whattype( % );
[> set (35)
[>

```

On transforme l'ensemble en séquence grâce à la commande "**op**" :

```

[> op( E );
[> a, b, c (36)
[> whattype( % );
[> exprseq (37)
[>

```

Pour transformer l'ensemble en liste, on utilise la commande "**convert**" avec l'option "**list**" :

```

[> convert( E, list );
[> [ a, b, c ] (38)
[>

```

l'ensemble vide "{ }" :

```

[> A := { };

```

```

[>
[
A := { }
(39)

```

l'union et l'intersection des ensembles :

```

[>
[
restart :
E := { a, b, c };
E := { a, b, c }
(40)

```

```

[>
[
F := { b, c, d, e, f };
F := { b, c, d, e, f }
(41)

```

```

[>
[
E union F; # l'union des ensembles.
{ a, b, c, d, e, f }
(42)

```

```

[>
[
E intersect F; # l'intersection des ensembles.
{ b, c }
(43)

```

Chaines des caractères

C'est une suite des caractères en cadrée par des guillemets << " " >>
:

```

[>
[
restart :
mot := "bonjour";
mot := "bonjour"
(44)

```

```

[>
[
whattype( % );
string
(45)

```

Pour extraire une sous chaine, on utilise les crochets << [] >> :

```
[> mot[ 2 ..5 ];
    "onjo"
[=
[>
```

(46)

On peut concaténer des chaines des caractères par la commande "cat" :

```
[> mot2 := cat(mot, " chez vous");
    mot2 := "bonjour chez vous"
[=
[>
```

(47)

```
length(mot2)    # le nombre des caractères.
                17
[=
[>
```

(48)

Chapitre: Les polynômes

Evaluation

Soit le polynôme : $P(x) = x^2 - 6$

```
[> restart :
[=
[> P := x^2 - 6;
    P := x^2 - 6
[=
[>
```

(49)

Il existe trois possibilites pour l'évaluation d'une expression.

1- Substitution de l'indéterminée x :

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} eval(P, x=2); \\ -2 \end{array} \quad (50)$$

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Où} \\ subs(x=2, P); \\ -2 \end{array} \quad (51)$$

2- Transformations en une fonction :

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} fp := unapply(P, x); \\ fp := x \rightarrow x^2 - 6 \end{array} \quad (52)$$

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} fp(2); \\ -2 \end{array} \quad (53)$$

3-Affectation de l'indéterminée :

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} x := 2; \\ x := 2 \end{array} \quad (54)$$

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} P; \\ -2 \end{array} \quad (55)$$

Développement

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} restart : \\ p := (x + 3 \cdot y^2)^5; \\ p := (3y^2 + x)^5 \end{array} \quad (56)$$

$$\begin{array}{l} \text{[>} \\ \text{[>} \end{array} \quad \begin{array}{l} expand(p); \\ 243y^{10} + 405xy^8 + 270x^2y^6 + 90x^3y^4 + 15x^4y^2 + x^5 \end{array} \quad (57)$$

Le regroupement des termes par la commande "**collect**" :

$$\begin{aligned} > q := (x + a)^4 + 2 \cdot (x - y)^2 - 7 \cdot y^5; \\ & \quad q := (x + a)^4 + 2 (x - y)^2 - 7 y^5 \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} > collect(q, y); \text{ \# rassemble tout les puissance de } y \\ & \quad -7 y^5 + 2 y^2 - 4 x y + (x + a)^4 + 2 x^2 \end{aligned} \quad (59)$$

>

exemple :

$$\begin{aligned} > \text{restart :} \\ > r := int(x^2 \cdot (\exp(x) - \exp(-x)), x); \\ & \quad r := x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + \frac{x^2}{e^x} + \frac{2 x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} > collect(r, \exp(x)); \\ & \quad (x^2 - 2 x + 2) e^x + \frac{x^2 + 2 x + 2}{e^x} \end{aligned} \quad (61)$$

>

le tri selon les degrés décroissants, grâce la commande "**sort**" :

$$\begin{aligned} > \text{restart :} \\ > s := x + x^4 - 5 \cdot x^2; \\ & \quad s := x^4 - 5 x^2 + x \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} > sort(s); \\ & \quad x^4 - 5 x^2 + x \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} > q := (x + a)^4 + 2 \cdot (x - y)^2 - 7 \cdot y^5; \end{aligned} \quad (64)$$

```

[>
=
>
<math display="block">q := (x + a)^4 + 2(x - y)^2 - 7y^5 \tag{64}>
=
>
<math display="block">\text{expand}(q);>
<math display="block">-7y^5 + a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 \tag{65}>
=
>
<math display="block">\text{sort}(\%, [x, y]);>
<math display="block">-7y^5 + x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 4a^3x + a^4 \tag{66}>
=
>

```

Degré

```

[>
=
>
<math display="block">\text{restart};>
>
<math display="block">p := 6 \cdot x^3 - 2 \cdot x;>
<math display="block">p := 6x^3 - 2x \tag{67}>
=
>
<math display="block">\text{degree}(p);>
<math display="block">3 \tag{68}>
=
>

```

La commande "**ldegree**"(<<LowerDEGREE>>) donner le plus bas degré :

```

[>
<math display="block">\text{ldegree}(p);>
<math display="block">1 \tag{69}>
=
>

```

exemple 1 :

```

[>
=
>
<math display="block">\text{restart};>
>
<math display="block">q := x^4 \cdot y^5 - 6 \cdot x^8 + 5 \cdot y^2 \cdot x;;>
<math display="block">q := x^4 y^5 - 6x^8 + 5xy^2 \tag{70}>
=
>
<math display="block">\text{sort}(\%, [x, y]);>

```

$$x^4 y^5 - 6x^8 + 5xy^2 \quad (71)$$

$$\text{degree}(q); \quad 9 \quad (72)$$

$$\text{degree}(q, x); \quad 8 \quad (73)$$

$$\text{degree}(q, y); \quad 5 \quad (74)$$

$$\text{ldegree}(q, x); \quad 1 \quad (75)$$

$$\text{ldegree}(q, y); \quad 0 \quad (76)$$

exemple 2 :

$$\text{restart};$$

$$r := \ln(x)^2 + 3 \cdot \ln(x) \cdot \sin(x);$$

$$r := \ln(x)^2 + 3 \ln(x) \sin(x) \quad (77)$$

$$\text{degree}(r, \ln(x)); \quad 0 \quad (78)$$

Coefficients

$$\text{restart};$$

$$p := (x^2 - 3 \cdot y)^3;$$

$$p := (x^2 - 3y)^3 \quad (79)$$

$$\text{expand}(p); \quad \# \text{ développer le polynôme}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3 \\ \text{coeff}(p, y^2) ; \text{ \# donner le Coefficient de } y^2 \\ 27x^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (80) \\ \\ (81) \end{array}$$

$$coeff(p, y^2) ; \# \text{ donner le Coefficient de } y^2$$

$$27x^2 \tag{81}$$

Le coefficient dominant est donné par la commande "**lcoeff**" (**<<Leading *Coefficients*>>**) :

$$lcoeff(p, y); \quad (82)$$

Le coefficient de plus bas degré donné par la commande "**tcoeff**" (**<<Trailing *Coefficients*>>**) :

$$\left[\begin{array}{l} \textcolor{red}{>} \text{tcoeff}(p, y); \\ \textcolor{blue}{x}^6 \\ \textcolor{red}{>} \end{array} \right] \quad (83)$$

- Soit les *le* polynômes suivants :

$$\begin{array}{l} \text{>} \quad \text{restart;} \\ \text{>} \quad a := 2 \cdot x^3 - 2; \\ \text{>} \quad a := 2x^3 - 2 \end{array} \quad (84)$$

$$\begin{array}{l} \text{=} \\ \text{>} \\ \text{=} \\ \text{>} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ b := x^2 - 1; \\ b := x^2 - 1 \\ \end{array} \quad (85)$$

Le PGCD : "gcd" (<<Greater Commun Division>>) :

$$\begin{aligned} & \text{gcd}(a, b); \\ & x - 1 \end{aligned} \quad (86)$$

Le PPCM : "lcm" (<<Least Commun Multiple>>) :

$$\begin{aligned} & lcm(a, b); \\ & (2x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1) \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} & expand(\%); \\ & 2x^4 + 2x^3 - 2x - 2 \end{aligned} \quad (88)$$

Le quotient et le reste de la division euclidienne donné par les commande "quo" (<<Quotient>>) et "rem" (<<Remander>>) :

$$\begin{aligned} & q := quo(a, b, x); \\ & q := 2x \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} & r := rem(a, b, x); \\ & r := 2x - 2 \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} & a = b \cdot q + r; \\ & 2x^3 - 2 = 2(x^2 - 1)x + 2x - 2 \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} & b \cdot q + r; \\ & 2(x^2 - 1)x + 2x - 2 \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} & a = expand(\%); \\ & 2x^3 - 2 = 2x^3 - 2 \end{aligned} \quad (93)$$

Racines

Pour le calcul formel des racines d'un polynôme en utilise la

commande "solve" :

$$\begin{aligned} & \text{restart;} \\ & p1 := a \cdot x + b; \\ & p1 := ax + b \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}(p1, x); \\ & -\frac{b}{a} \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} & p2 := a \cdot x^2 + b \cdot x + c; \\ & p2 := ax^2 + bx + c \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}(p2, x); \\ & \frac{1}{2} \frac{-b + \sqrt{-4ac + b^2}}{a}, -\frac{1}{2} \frac{b + \sqrt{-4ac + b^2}}{a} \end{aligned} \quad (97)$$

>

exemple :

$$\begin{aligned} & p := x^2 + 1; \\ & p := x^2 + 1 \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}(p, x); \\ & I, -I \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} & q := x^4 - x^2 + 1; \\ & q := x^4 - x^2 + 1 \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}(q, x); \\ & \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2I\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \sqrt{2 - 2I\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2I\sqrt{3}}, \\ & -\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2I\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} & \text{evalc}([\%]); \\ & \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I, -\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} I, \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} I, -\frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I \right] \end{aligned} \quad (102)$$

Pour chercher uniquement les racines entière d'un polynôme, on utilise la commande "**isolve**" (<<**Integer Solve**>>) :

$$\begin{aligned} & \text{restart}; \\ & r := x^2 - y^2 - 4569; \\ & r := x^2 - y^2 - 4569 \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} & \text{isolve}; \\ & \{x = -2285, y = -2284\}, \{x = -2285, y = 2284\}, \{x = -763, y = -760\}, \{x = -763, y = 760\}, \{x = 763, y = -760\}, \{x = 763, y = 760\}, \{x = 2285, y = -2284\}, \{x = 2285, y = 2284\} \end{aligned} \quad (104)$$

Pour chercher les valeurs approchées des racines d'un polynôme, on utilise la commande "**fsolve**" (<<**Float Solve**>>) :

$$\begin{aligned} & \text{restart}; \\ & s := x^6 - 6 \cdot x^5 + 3 \cdot x + 2; \\ & s := x^6 - 6x^5 + 3x + 2 \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} & \text{solve}(s, x); \\ & 1, \text{RootOf}(_Z^5 - 5_Z^4 - 5_Z^3 - 5_Z^2 - 5_Z - 2, \text{index} \\ & = 1), \text{RootOf}(_Z^5 - 5_Z^4 - 5_Z^3 - 5_Z^2 - 5_Z - 2, \\ & \text{index} = 2), \text{RootOf}(_Z^5 - 5_Z^4 - 5_Z^3 - 5_Z^2 - 5_Z \\ & - 2, \text{index} = 3), \text{RootOf}(_Z^5 - 5_Z^4 - 5_Z^3 - 5_Z^2 \\ & - 5_Z - 2, \text{index} = 4), \text{RootOf}(_Z^5 - 5_Z^4 - 5_Z^3 \end{aligned} \quad (106)$$

```

[ - 5 _Z^2 - 5 _Z - 2, index = 5 )
[ > fsolve(s, x);
[ 1., 5.997423450 (107)

```

```

[ > fsolve(s, x, complex);
[ -0.599001017604613 - 0.228724652774795 I, (108)
[ -0.599001017604613 + 0.228724652774795 I,
[ 0.100289292527915 - 0.895035873429153 I,
[ 0.100289292527915 + 0.895035873429153 I,
[ 1.000000000000000, 5.99742345015339
[ >

```

Factorisation

Par défaut, Maple factorise dans le **corps Q**.

```

[ > restart :
[ > factor(x^2 - 4);
[ (x - 2) (x + 2) (109)

```

```

[ > factor(x^2 - 2);
[ x^2 - 2 (110)

```

```

[ > factor(x^2 + 4);
[ x^2 + 4 (111)
[ >

```

On peut factoriser dans des extensions de corps de Q par exemple dans $\mathbb{Q}(i)$:

```

[ > factor(x^2 + 9, I);
[ - ( -x + 3 I) (x + 3 I) (112)
[ >

```

Où

$$\begin{array}{l} \text{[> } factor(x^2 + 9, complex); \\ \text{[> } (x + 3.0000000000 I) (x - 3.0000000000 I) \end{array} \quad (113)$$

Où bien dans l'extensions de corps $Q(\sqrt{5})$

$$\begin{array}{l} \text{[> } factor(x^2 - 5, sqrt(5)); \\ \text{[> } -(x + \sqrt{5}) (-x + \sqrt{5}) \end{array} \quad (114)$$

exemple :

$$\begin{array}{l} \text{[> } restart; \\ \text{[> } p := x^6 + 1; \\ \text{[> } p := x^6 + 1 \end{array} \quad (115)$$

$$\begin{array}{l} \text{[> } factor(p); \\ \text{[> } (x^2 + 1) (x^4 - x^2 + 1) \end{array} \quad (116)$$

On selectionne le second factor on utilise la commande "op" :

$$\begin{array}{l} \text{[> } p2 := op(2, \%); \\ \text{[> } p2 := x^4 - x^2 + 1 \end{array} \quad (117)$$

$$\begin{array}{l} \text{[> } solve(p2); \\ \text{[> } \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2I\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \sqrt{2 - 2I\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2I\sqrt{3}}, \end{array} \quad (118)$$

$$\begin{array}{l} \text{[> } -\frac{1}{2} \sqrt{2 + 2I\sqrt{3}} \\ \text{[> } evalc([\%]); \end{array} \quad (119)$$

$$\left[\left[\left[\frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I, -\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} I, \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} I, -\frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} I \right] \right] \right] \quad (119)$$

$$\begin{aligned} &> \quad factor(p, \{ \text{sqrt}(3), I \}); \\ &-\frac{1}{16} (-2x - \sqrt{3} + I) (-x + I) (2x + \sqrt{3} + I) (-2x + \sqrt{3} \\ &\quad + I) (2x - \sqrt{3} + I) (x + I) \end{aligned} \quad (120)$$

$$>$$

Factorisation en valeurs approchées

$$\begin{aligned} &> \quad factor(p, real); \\ &(x^2 + 1.73205080756888x + 1.000000000000000) (x^2 \\ &\quad + 1.000000000) (x^2 - 1.73205080756888x \\ &\quad + 1.000000000000000) \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} &> \quad factor(p, complex); \\ &(x + 0.866025403784439 + 0.500000000000000I) (x \\ &\quad + 0.866025403784439 - 0.500000000000000I) (x \\ &\quad + 1.000000000I) (x - 1.000000000I) (x \\ &\quad - 0.866025403784439 + 0.500000000000000I) (x \\ &\quad - 0.866025403784439 - 0.500000000000000I) \end{aligned} \quad (122)$$

$$>$$

Factorisations rationnelles

La réduction au même dénominateur et la simplification se font avec la commande "**normal**".

$$\begin{aligned} &> \quad restart : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{[> } f := \frac{(x^2 - y^2 + 1)}{(x - y)^2} - \frac{1}{(x + y)^2}; \\
 & \text{[> } f := \frac{x^2 - y^2 + 1}{(x - y)^2} - \frac{1}{(x + y)^2} \quad (123)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{[> } \quad \text{normal}(f); \\
 & \text{[> } \frac{x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 + 4xy}{(x - y)^2 (x + y)^2} \quad (124)
 \end{aligned}$$

On développe le denominateur :

$$\begin{aligned}
 & \text{[> } \quad \text{normal}(f, \text{expanded}); \\
 & \text{[> } \frac{x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 + 4xy}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} \quad (125)
 \end{aligned}$$

exemple :

$$\begin{aligned}
 & \text{[> } \quad \text{restart}; \\
 & \text{[> } g := x + \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)}; \\
 & \text{[> } g := x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \quad (126) \\
 & \text{[> } \quad \text{normal}(g); \\
 & \text{[> } \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 1} \quad (127)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{numer}(\%); \# \text{ le numérateur} \\ & \quad x(x^2 + 2) \end{aligned} \tag{128}$$

$$\begin{aligned} & \text{denom}(\%); \# \text{ le dénominateur} \\ & \quad x^2 + 1 \end{aligned} \tag{129}$$

Décomposition en éléments simples

exemple 1 :

$$\begin{aligned} & \text{restart :} \\ & f := \frac{(x^2 + 2)}{(x^4 - 1)} \\ & f := \frac{x^2 + 2}{x^4 - 1} \end{aligned} \tag{130}$$

il ya la commande "**convert(...,parfrac,...)**" (<<Convert To Partial Fractions>>) :

$$\begin{aligned} & \text{convert}(f, \text{parfrac}, x) \\ & \quad -\frac{3}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned} & \text{convert}(f, \text{parfrac}, x, I) \\ & \quad -\frac{\frac{1}{4}I}{-x+I} - \frac{3}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{\frac{1}{4}I}{x+I} \end{aligned} \tag{132}$$

exemple 2 :

$$\text{restart :}$$

$$\begin{aligned}
 &g := \frac{(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 2)}{x^4 - 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x + 4}; \\
 &g := \frac{4x^3 - 6x^2 - 2}{x^4 - 2x^3 - 2x + 4}
 \end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{convert}(g, \text{parfrac}, x); \\
 &\frac{3x^2}{x^3 - 2} + \frac{1}{x - 2}
 \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{solve}(x^3 - 2); \\
 &2^{1/3}, -\frac{1}{2} 2^{1/3} + \frac{1}{2} I \sqrt{3} 2^{1/3}, -\frac{1}{2} 2^{1/3} - \frac{1}{2} I \sqrt{3} 2^{1/3}
 \end{aligned} \tag{135}$$

Décomposition en valeurs approchées

$$\begin{aligned}
 &\text{convert}(g, \text{parfrac}, x, \text{real}); \\
 &\frac{1.0000000000000000}{x - 2.} + \frac{1.0000000000000000}{x - 1.25992104989487} \\
 &+ \frac{2.x + 1.25992104989487}{x^2 + 1.25992104989487x + 1.58740105196820}
 \end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{convert}(g, \text{parfrac}, x, \text{complex}) \\
 &\frac{1.0000000000000000 + 1.28868884147498 \cdot 10^{-16} I}{x + 0.629960524947437 + 1.09112363597172 I} \\
 &+ \frac{1. - 1.20931296393162 \cdot 10^{-16} I}{x + 0.629960524947437 - 1.09112363597172 I} \\
 &+ \frac{1.0000000000000000 + 4.44089209850062 \cdot 10^{-16} I}{x - 2.}
 \end{aligned} \tag{137}$$

$$+ \frac{0.9999999999999999 - 4.52026797604398 \cdot 10^{-16} I}{x - 1.25992104989487}$$

Chapitre: *Les Matrices*

Pour manipuler des matrices, des vecteurs, des polynôme d'algebre linéaire, on introduit le paquetage <<*package*>> "*LinearAlgebra*".

```
> restart :
> with( LinearAlgebra );
[ &x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis,      (138)
  BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE,
  CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column,
  ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace,
  CompanionMatrix, CompressedSparseForm,
  ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy,
  CreatePermutation, CrossProduct, DARE, DeleteColumn,
  DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix,
  Dimension, Dimensions, DotProduct,
  EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal,
  ForwardSubstitute, FrobeniusForm,
  FromCompressedSparseForm, FromSplitForm,
  GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix,
  Generic, GetResultDataType, GetResultShape,
  GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix,
```

HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm,
HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix,
IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar,
IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm,
KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition,
LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2,
MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction,
MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm,
MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply,
MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply,
NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace,
OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm,
ProjectionMatrix, QRDecomposition, RandomMatrix,
RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm,
ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension,
RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply,
ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm,
SplitForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix,
SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve,
ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm,
UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle,
VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply,
ZeroMatrix, ZeroVector, Zip]



Pour construire une matrice où une colonne, on utilise les séparateurs.

<< | >> pour séparer les colonnes.

<< , >> pour séparer les lignes.

Evaluation

Saisie d'une matrice par colonnes :

$$\begin{array}{l} \text{[> A := } \langle \langle 1, 2 \rangle | \langle 3, 4 \rangle | \langle 5, 6 \rangle \rangle; \\ \qquad \qquad \qquad A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\ \text{[} \end{array} \quad (139)$$

saisie d'un vecteur colonnes :

$$\begin{array}{l} \text{[> V := } \langle 0, 1 \rangle; \\ \qquad \qquad \qquad V := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{[} \end{array} \quad (140)$$

Saisie d'une matrice par lignes :

$$\begin{array}{l} \text{[> B := } \langle \langle 1|2|3 \rangle, \langle 4|5|6 \rangle \rangle; \\ \qquad \qquad \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \text{[} \end{array} \quad (141)$$

saisie d'un vecteur lignes :

$$\begin{array}{l} \text{[> W := } \langle 0|1|2 \rangle; \\ \qquad \qquad \qquad W := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{[} \end{array} \quad (142)$$

Concaténation de matrice et de vecteurs :

$$\begin{array}{l} \text{[> } \langle A|V \rangle; \\ \text{[} \end{array} \quad \dots$$


```

> A[ 2, 3 ]; # Afficher l'élément de la ligne 2 et colonne 3
6
(149)

```

```

> V[ 1 ];
0
(150)

```

```

>

```

Modification

```

> A[ 2, 3 ] := -10;
A2,3 := -10
(151)

```

```

> A;

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

(152)

```

```

> V[ 1 ] := -8;
V1 := -8
(153)

```

```

> V;

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(154)

```

```

>

```

Matrice particulières

-Matrice constante :

```

> ConstantMatrix( 1, 3, 3 );
# ConstantMatrix(expression algébrique, nombre des lignes,
# nombre des colonnes)
(155)

```

```

[
[
[
[
1 1 1
1 1 1
1 1 1
]
]
]
]
>

```

(155)

-Matrice identité :

```

[
> IdentityMatrix( 3 );
[
[
1 0 0
0 1 0
0 0 1
]
]
]
>

```

(156)

-Matrice diagonale :

```

[
> DiagonalMatrix( [ 1, 2, 7 ] );
[
[
1 0 0
0 2 0
0 0 7
]
]
]
>

```

(157)

Opérations Algébriques

```

[
> restart :
[
> with( LinearAlgebra ) :
[
> E := <<1, 2, 3>|<4, 5, 6>>;

```

(158)

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (158)$$

> F := <<7, 8, 9>|<10, 11, 12>>;

$$F := \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \quad (159)$$

> G := <<0, 1, 1>|<3, -1, 0>|<-1, 2, 1>>;

$$G := \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (160)$$

> V := <1, 2>;

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (161)$$

> W := <3|4|5>;

$$W := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (162)$$

> E + F;

$$\begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 10 & 16 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} \quad (163)$$

> 2·E;

(164)

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{array} \right] \quad (164)$$

> G.E;

$$\left[\begin{array}{cc} 3 & 9 \\ 5 & 11 \\ 4 & 10 \end{array} \right] \quad (165)$$

> E.V;

$$\left[\begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ 15 \end{array} \right] \quad (166)$$

> W.F;

$$\left[\begin{array}{cc} 98 & 134 \end{array} \right] \quad (167)$$

> G³;

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 9 & -3 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{array} \right] \quad (168)$$

>

-Matrice inverse :

> G⁻¹;

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(169)

> Où bien

> MatrixInverse(G);

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

(170)

>

-le déterminant d'une matrice :

> M := <<1, 1, 0><1, 2, 3><9, 8, 7>>;

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(171)

> Determinant(M);

10

(172)

>

-Lorsqu'on veut appliquer une fonction à chaque élément d'une

matrice, on utilise la commande "**map**".

$$\begin{aligned} > P := \langle \langle 1, 2 \rangle | \langle 3, 4 \rangle \rangle; \\ & P := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} > \text{carre} := x \rightarrow x^2; \\ & \text{carre} := x \rightarrow x^2 \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} > \text{map}(\text{carre}, P); \\ & \quad \# \text{ le carré de chaque élément de la matrice } P \\ & \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (175)$$

>

Ce qui est différent de

$$\begin{aligned} > \text{carre}(P); \quad \# \text{ le carré de la matrice } P \\ & \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (176)$$

>

exemple :

$$\begin{aligned} > Q := \langle \langle \sin(x), x^2 + x + 3 \rangle | \langle \exp(x), \cos(x^2) \rangle \rangle; \\ & Q := \begin{bmatrix} \sin(x) & e^x \\ x^2 + x + 3 & \cos(x^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (177)$$

$$\begin{aligned} > \text{map}(\text{diff}, Q, x); \\ & \quad \# \text{ la dérivé de chaque élément de la matrice } Q \end{aligned} \quad (178)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \cos(x) & e^x \\ 2x + 1 & -2 \sin(x^2) x \end{array} \right]$$

(178)

-Transposé d'une matrice :

> M := <<18, 3, -9><42, -9, -21><12, 6, -6>>;

$$M := \begin{bmatrix} 18 & 42 & 12 \\ 3 & -9 & 6 \\ -9 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

(179)

> Transpose(M);

$$\begin{bmatrix} 18 & 3 & -9 \\ 42 & -9 & -21 \\ 12 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

(180)

-La trace d'une matrice :

> Trace(M);

3

(181)

-Le rang d'une matrice :

> Rank(M);

2

(182)

>

> Determinant(M);

(183)

$$\left[\begin{array}{c} 0 \end{array} \right] \quad (183)$$

-Le ker d'une matrice :

$$\left[\begin{array}{l} > \text{NullSpace}(M); \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{array} \right] \right\} \end{array} \right] \quad (184)$$

-polynôme caractéristique d'une matrice :

$$\left[\begin{array}{l} > N := \langle \langle 0, 1, 1 \rangle | \langle 3, -1, 0 \rangle | \langle -1, 2, 1 \rangle \rangle; \\ N := \left[\begin{array}{ccc} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (185)$$

$$\left[\begin{array}{l} > p := \text{CharacteristicPolynomial}(N, x); \\ p := x^3 - 3x - 2 \end{array} \right] \quad (186)$$

$$\left[\begin{array}{l} > \text{factor}(p); \\ (x - 2) (x + 1)^2 \end{array} \right] \quad (187)$$

>

-Les valeurs propres d'une matrice :

$$\left[\begin{array}{l} > \text{Eigenvalues}(N); \\ \left[\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (188)$$

>

-Les vecteurs et valeurs propres d'une matrice :

$$\begin{aligned} &> (\text{val}, \text{vec}) := \text{Eigenvectors}(\text{N}); \\ &\text{val}, \text{vec} := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} &> \text{Eigenvectors}(\text{N}, \text{output} = \text{list}); \\ &\left[\left[-1, 2, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[2, 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \right] \end{aligned} \quad (190)$$

-Le polynôme minimale d'une matrice :

$$\begin{aligned} &> \text{Z} := \langle \langle -2, 7, 7 \rangle | \langle 42, -9, -21 \rangle | \langle -28, 14, 26 \rangle \rangle; \\ &\text{Z} := \begin{bmatrix} -2 & 42 & -28 \\ 7 & -9 & 14 \\ 7 & -21 & 26 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (191)$$

$$\begin{aligned} &> \text{MinimalPolynomial}(\text{Z}, \text{x}); \\ &\text{x}^2 - 3 \text{x} - 108 \end{aligned} \quad (192)$$

$$\begin{aligned} &> \text{factor}(\%); \\ &(\text{x} + 9) (\text{x} - 12) \end{aligned} \quad (193)$$

$$\begin{aligned} &> \text{Eigenvectors}(\text{Z}, \text{output} = \text{'list'}); \\ &\left[\left[-9, 1, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right], \left[12, 2, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right] \right] \end{aligned} \quad (194)$$

Réduction de Jordan

c'est la matrice J telle que $Z = Q \cdot J \cdot Q^{-1}$

Q : Matrice de passage.

J : Matrice de jordan.

$$\begin{aligned} & \text{[> J := JordanForm(Z);} \\ & \qquad J := \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \\ & \text{[>}] \end{aligned} \tag{195}$$

La matrice de passage

$$\begin{aligned} & \text{[> Q := JordanForm(Z, output='Q');} \\ & \qquad Q := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \\ & \text{[>}] \end{aligned} \tag{196}$$

On peut verifie que :

$$Z = Q \cdot J \cdot Q^{-1};$$

$$\begin{aligned} & \text{[> Z = Q.J.Q}^{-1}\text{;} \\ & \qquad \begin{bmatrix} -2 & 42 & -28 \\ 7 & -9 & 14 \\ 7 & -21 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 42 & -28 \\ 7 & -9 & 14 \\ 7 & -21 & 26 \end{bmatrix} \\ & \text{[>}] \end{aligned} \tag{197}$$

Systèmes linéaires

Soit le système $A \cdot x = b$

A : est matrice carré.

b : est un vecteur colonne.

On cherche x, on utilise la commande "**LinearSolve**" :

$$\begin{aligned} &> A := \langle \langle 1, 1, 1, 4 \rangle | \langle 1, 1, -2, 1 \rangle | \langle 3, 1, 1, 8 \rangle | \langle -1, 1, -1, -1 \rangle \rangle; \\ &A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (198)$$

$$\begin{aligned} &> b := \langle 0, 1, 1, 0 \rangle; \\ &b := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (199)$$

$$\begin{aligned} &> x := \text{LinearSolve}(A, b, \text{free}='lambda'); \\ &x := \begin{bmatrix} \frac{25}{6} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (200)$$

example 1 :

```
[>
[restart :
[>
[with( LinearAlgebra) :
[>
A := <<1, 0, 0>|<2, 1, 0>|<1, 0, 0>|<-1,-1,-3>>;
A := 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$
 (201)
[>
b := <2,-1,-9>;
b := 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix}$$
 (202)
[>
x := LinearSolve( A, b, free='lambda');
x := 
$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_3 \\ 2 \\ \lambda_3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
 (203)
```

example 2 :

```
[>
[restart :
[>
[with( LinearAlgebra) :
[>
A := <<2,-1>|<1, 4>>
A := 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
 (204)
```

$$\begin{aligned}
 & \text{J} := \text{JordanForm}(\text{A}); \\
 & \text{J} := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{205}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{P} := \langle \langle a[1], a[3] \rangle | \langle a[2], a[4] \rangle \rangle; \\
 & \quad \# \text{ On cherche la matrice P} \\
 & \text{P} := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{206}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{c} := \text{A.P} - \text{P.J} \\
 & \text{c} := \begin{bmatrix} -a_1 + a_3 & -a_2 + a_4 - a_1 \\ -a_1 + a_3 & -a_2 + a_4 - a_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{207}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{solve}(\{c(1, 1) = 0, c(1, 2) = 0, c(2, 1) = 0, c(2, 2) = 0\}, \\
 & \quad \{a[1], a[2], a[3], a[4]\}) ; \\
 & \quad \{a_1 = a_3, a_2 = a_4 - a_3, a_3 = a_3, a_4 = a_4\}
 \end{aligned} \tag{208}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{P} := \text{subs}(\%, \text{P}) \\
 & \text{P} := \begin{bmatrix} a_3 & a_4 - a_3 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{209}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{P} := \text{subs}(a[3] = 1, a[4] = 0, \text{P}) \\
 & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{210}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{A} = \text{P.J.P}^{-1} \\
 & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{211}$$

Chapitre: Les équations différentielles

La commande "**dsolve**" (<<Diffrential equation>>) permet de résoudre les equations différentielles.

$$\begin{aligned} > eq1 := diff(y(x), x) = a \cdot y(x); \\ &eq1 := \frac{d}{dx} y(x) = a y(x) \end{aligned} \quad (212)$$

$$\begin{aligned} > dsolve(eq1, y(x)); \\ &y(x) = _C1 e^{ax} \end{aligned} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} > eq2 := diff(y(x), x^2) - \omega^2 \cdot y(x) = 0; \\ &eq2 := \frac{d^2}{dx^2} y(x) - \omega^2 y(x) = 0 \end{aligned} \quad (214)$$

$$\begin{aligned} > dsolve(eq2, y(x)); \\ &y(x) = _C1 e^{\omega x} + _C2 e^{-\omega x} \end{aligned} \quad (215)$$

>

Conditions initiales :

On doit donner à la commande "**dsolve**" un ensemble contenant l'equations et les conditions initiales.

$$\begin{aligned} > restart : \\ > eq1 := diff(y(x), x) = y(x)^3; \\ &eq1 := \frac{d}{dx} y(x) = y(x)^3 \end{aligned} \quad (216)$$

$$\begin{aligned} > dsolve(\{eq1, y(0) = 1\}, y(x)); \\ &y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x + 1}} \end{aligned} \quad (217)$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{eq2} := \text{diff}(y(x), x^2) + 5 \cdot \text{diff}(y(x), x) + 4 \cdot y(x) \\
 &\quad = \cos(x); \\
 &\quad \text{eq2} := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 5 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 4 y(x) = \cos(x) \quad (218)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{dsolve}(\{ \text{eq2}, y(0) = 1, D(y)(0) = 1 \}, y(x)); \\
 &\quad y(x) = \frac{3}{2} e^{-x} - \frac{10}{17} e^{-4x} + \frac{3}{34} \cos(x) + \frac{5}{34} \sin(x) \quad (219)
 \end{aligned}$$

>

Système différentiel :

Pour résoudre un système différentiel, on place ces équations dans un ensemble et on crée également un ensemble pour les fonctions inconnues.

$$\begin{aligned}
 &> \text{eq1} := \text{diff}(x(t), t) = y(t) - \sin(t); \\
 &\quad \text{eq1} := \frac{d}{dt} x(t) = y(t) - \sin(t) \quad (220)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{eq2} := \text{diff}(y(t), t) = -x(t) + \sin(t); \\
 &\quad \text{eq2} := \frac{d}{dt} y(t) = -x(t) + \sin(t) \quad (221)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{dsolve}(\{ \text{eq1}, \text{eq2} \}, \{ x(t), y(t) \}) \\
 &\quad \left\{ x(t) = \sin(t) _C2 + \cos(t) _C1 - \frac{1}{2} \cos(t) t - \frac{1}{2} \cos(t) \right. \quad (222) \\
 &\quad \quad \left. - \frac{1}{2} \sin(t) t, y(t) = \cos(t) _C2 - \frac{1}{2} \cos(t) t \right. \\
 &\quad \quad \left. - \sin(t) _C1 + \frac{1}{2} \sin(t) t - \frac{1}{2} \cos(t) + \sin(t) \right\}
 \end{aligned}$$

>

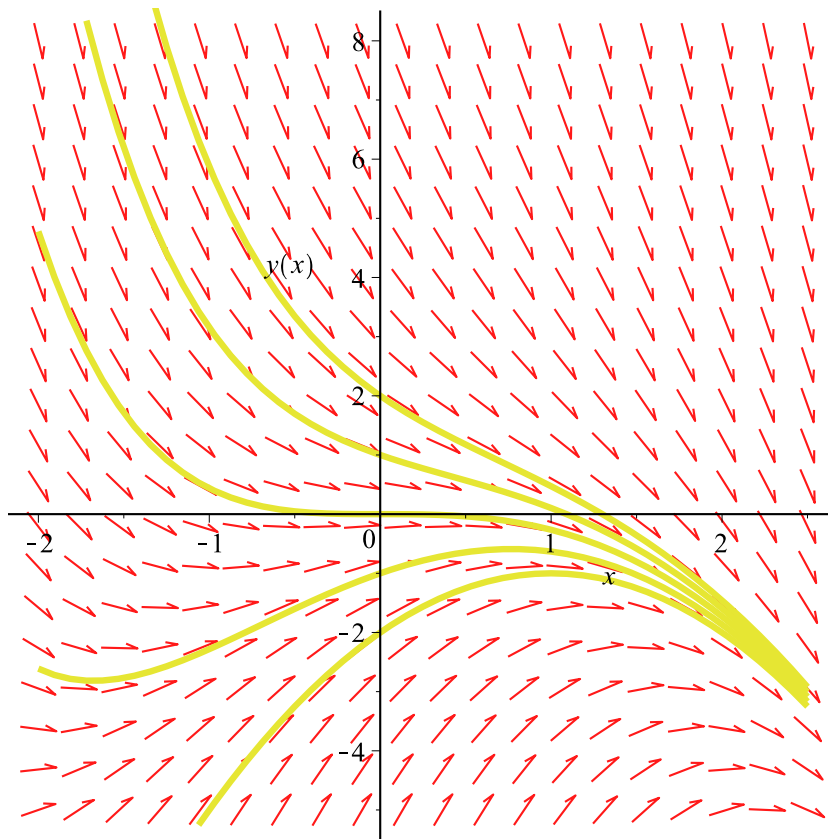
avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
 & \text{dsolve}(\{eq1, eq2, x(0) = 2, y(0) = -2\}, \{x(t), y(t)\}) \\
 & \left\{ \begin{aligned} x(t) &= -\frac{3}{2} \sin(t) + 2 \cos(t) - \frac{1}{2} \cos(t) t - \frac{1}{2} \sin(t) t, \\ y(t) &= -2 \cos(t) - \frac{1}{2} \cos(t) t - \frac{3}{2} \sin(t) + \frac{1}{2} \sin(t) t \end{aligned} \right\} \quad (223)
 \end{aligned}$$

Paquetage "**DETools**" (<<**Differential equationss Tools**>>) ce paquetage contient des commandes très efficaces pour la manipulation des équations différentielles et de leurs solutions, Résolution formelle ou numérique, tracé d'un ou plusieurs solution, tracé de portrait de phase et de champs de vecteurs dans le cas des systèmes différentiels

-La commande la plus utilisée est "**DEplot**". elle trace une ou plusieurs solutions d'une équation différentielle pour différentes conditions initiales. Elle dessine en outre le champ de vecteur des tangentes aux courbes intégrales c-à-d au graphes des solutions.

$$\begin{aligned}
 & \text{with}(\text{DETools}) : \\
 & eq1 := \text{diff}(y(x), x) = -y(x) - x^2; \\
 & \quad \quad \quad eq1 := \frac{d}{dx} y(x) = -y(x) - x^2 \quad (224) \\
 & \text{DEplot}(eq1, y(x), x = -2 .. 2.5, y = -5 .. 8, [[y(0) = -2], [y(0) = -1], [y(0) = 0], [y(0) = 1], [y(0) = 2]]);
 \end{aligned}$$



>

-Pour un système de deux équations différentielles, la commande **"DEplot"** trace le portrait de phase de chaque solution. Si le système est autonome, le champ de vecteur définissant le système est également tracé.

> *restart* :

> *with(DETools)* :

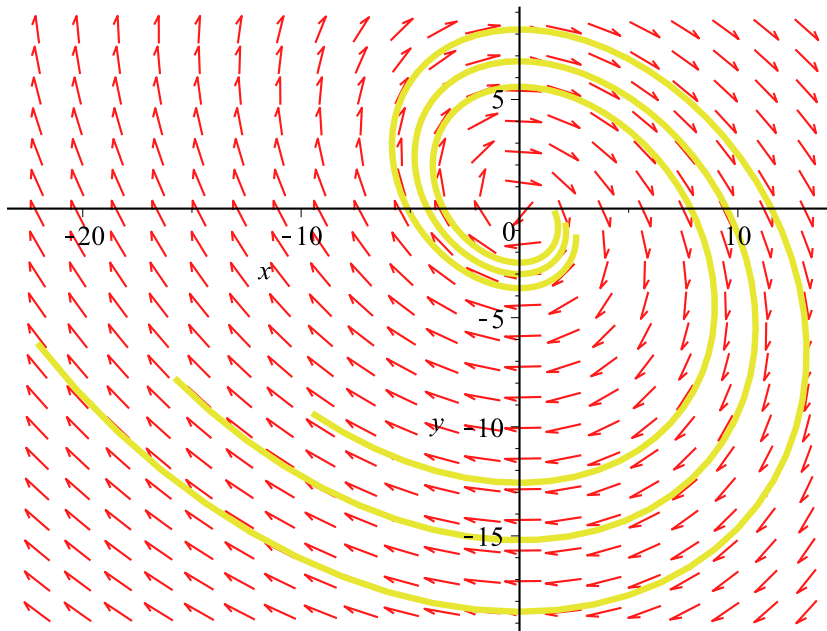
> $eq1 := \text{diff}(x(t), t) = y(t) + \frac{x(t)}{2}$

$$eq1 := \frac{d}{dt} x(t) = y(t) + \frac{1}{2} x(t) \quad (225)$$

> $eq2 := \text{diff}(y(t), t) = -x(t)$

$$eq2 := \frac{d}{dt} y(t) = -x(t) \quad (226)$$

> $DEplot([eq1, eq2], [x(t), y(t)], t = 1..10, [[x(0) = 1, y(0) = 1], [x(0) = 1.5, y(0) = 1], [x(0) = 0.5, y(0) = 1]], \text{stepsize} = 0.1, \text{scaling} = \text{constrained})$



>

-Dans le cas d'un système de 3 équations différentielles, on utilise la commande "**DEplot3d**".

> restart :

> with(DETools) :

> eq1 := diff(x(t), t) = y(t) - z(t);

$$eq1 := \frac{d}{dt} x(t) = y(t) - z(t) \quad (227)$$

> eq1 := diff(x(t), t) = y(t) - z(t);

$$eq1 := \frac{d}{dt} x(t) = y(t) - z(t) \quad (228)$$

> eq3 := diff(z(t), t) = x(t) - y(t) + 1 + $\frac{1}{5} \cdot t$;

$$eq3 := \frac{d}{dt} z(t) = x(t) - y(t) + 1 + \frac{1}{5} t \quad (229)$$

> DEplot3d([eq1, eq2, eq3], [x(t), y(t), z(t)], t=-5..10, [[x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 2]], stepsize = 0.1, linecolor = blue);

