Table des matières

1 RECHERCHES LINEAIRES INEXACTES **2**

1.1 RECHERCHES LINEAIRES . . . 2

1.1.1 Type de recherches linéaires . . . 4

1.2 Recherches linéaires inexactes . . . 4

1.2.1 Recherches linéaires inexactes d'Armijo . . . 4

1.2.2 Recherches linéaires inexactes de Goldstein . . . 7

Chapitre 1

RECHERCHES LINEAIRES INEXACTES

1.1 RECHERCHES LINEAIRES

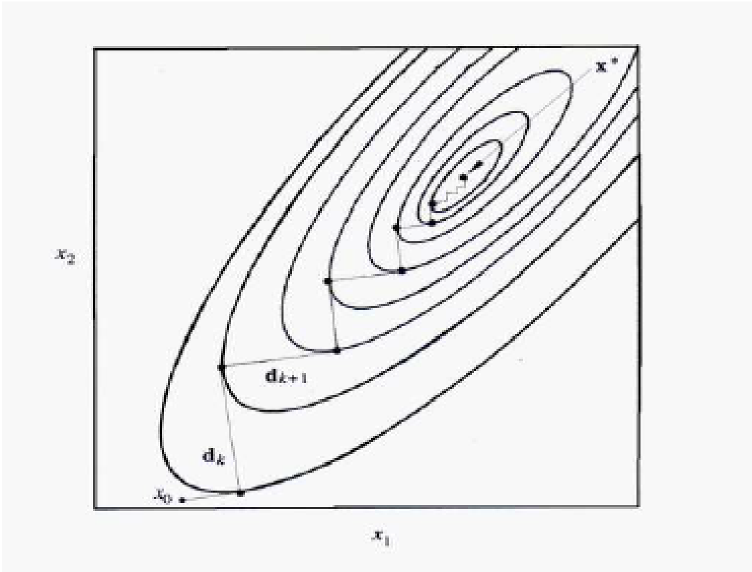
La recherche linéaire consiste à trouver α_k de façon à diminuer la fonction f suffisamment le long d'une direction d_k. Ce " suffisamment " sera quantifié dans la suite dans la description des conditions dites d 'Armijo, Goldstein, Wolfe(recherches linéaires inexactes).

Le principe d'une méthode de descente consiste à faire les itérations suivantes :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \alpha_k > 0, \tag{1.1}$$

en assurant $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, est la direction de descente en x_k et α_k est appelé le pas de la méthode à l'itération k.

Dans la méthode (4.1), le choix de α_k est lié à la fonction $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$. Nous avons vu dans les chapitres précédents que la trajectoire de la solution suit un modèle de zigzag i.e. $d_{k+1} .d_k = 0$, comme il est indiqué dans la figure suivante :



Pour définir une direction de descente, il faut spécifier deux choses :

-Dire comment la direction d_k est calculée.Cela influe directement dans la nomination de l'algorithme.

-Dire comment on détermine le pas α_k ce qu'on appelle la recherche linéaire.Comme on a vu dans le chapitre précédent que le choix de α_k nous ramène à résoudre le problème d'optimisation à une seule variable i.e.

$$\min_{\alpha>0} \varphi(\alpha). \tag{1.2}$$

Objectifs

Il s'agit de réaliser deux objectifs 1- faire décrître f suffisamment et cele se traduit le plus souvent par la réalisation d'une inégalité de la forme :

$$f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k) + \text{"un terme négative"}. \tag{1.3}$$

Le terme négatif, disons v_k, joue un rôle important dans la convergence de l'algorithme utilisant cette recherche linéaire.En particulier, il ne su¢ t pas d'imposer $f(x_k + \alpha_k d_k) < f(x_k)$.

2-Consiste d'empicher le pas $\alpha_k > 0$ d'être trop petit, et trop proche de zéro.

1.1.1 Type de recherches linéaires

Il existe deux grandes classes de méthodes qui s'intéressent à l'optimisation unidimensionnelle :

-Les recherches linéaires exactes et Les recherches linéaires inexactes.Le mot exact prend sa signification dans le fait que si f est quadratique la solution de la recherche

linéaire s'obtient d'une façon exacte est dans un nombre fini d'itérations.

1.2 Recherches linéaires inexactes

L'objectif de cette section consiste à présenter les principaux tests.D'abord présentons le schéma d'une recherche linéaire inexacte, la règle d ' Armijo, la règle de Goldstein et la règle de Wolfe.

1.2.1 Recherches linéaires inexactes d'Armijo

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_k \in \mathbb{R}^n, d_k \in \mathbb{R}^n$ telque $\nabla^\top f(x_k)d_k < 0$. Définissons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k), \alpha > 0$. Donc $\varphi'(\alpha) = \nabla^\top f(x_k + \alpha d_k)d_k, \varphi'(0) = \nabla^\top f(x_k)d_k < 0, \varphi(0) = f(x_k)$.

On dit que le pas $\alpha_k > 0$ vérifie le pas d' Armijo si on a

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \alpha_k B_1 \nabla^\top f(x_k)d_k,\ 0 < B_1 < 1. \tag{1.4}$$

Donc, on aura

$$\varphi(\alpha_k) \leq \varphi(0) + \alpha_k B_1 \varphi'(0). \tag{1.5}$$

Interprétation graphique de la régle d' Armijo

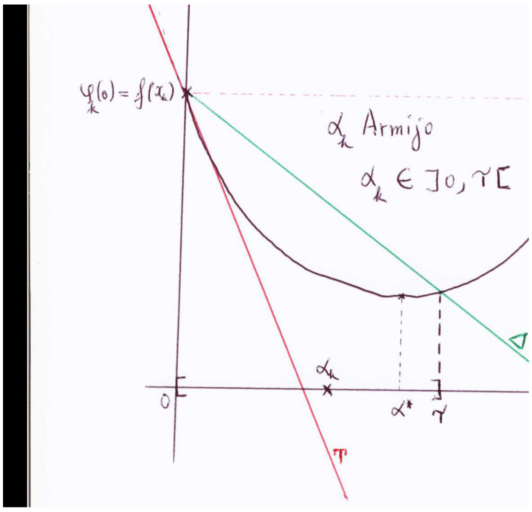
Calculons l'équation de la tangente T_{M_0} au graphe de la fonction qui passe par $M(0, \varphi(0))$.Donc

$$T_{M_0} = \left\{(\alpha, y) : y = f(x_k) + \alpha_k \nabla^\top f(x_k) d_k\right\}.$$

Calculons maintenant l'équation de la droite notée Δ_{M_0} de coefficient directeur $B_1\varphi'(0)$ et qui passe par $M(0, \varphi(0))$, on aura

$$\Delta_{M_0} = \left\{(\alpha, y) : y = f(x_k) + \alpha_k B_1 \nabla^\top f(x_k) d_k\right\}.$$

Les deux droites passent par le même point M. Il est facile de comparer la poistion de la tangante T_{M_0} par rapport à la droite Δ_{M_0} et cela est indiqué dans la figure suivante :



En général, on s'assure dans la règle d' Armijo que α_k ne soit pas trop petit car cela va nuire la convergence de l'algorithme qui pourrait converger prématurement vers un point qui n 'est pas stationnaire, cela verra explicitement dans l'algorithme suivant :

Algorithme de la règle d' Armijo Initialisation : choisir $\overline{\alpha} \in]0, +\infty[$ et $0 < B_1 < 1$, calculer $\varphi(\overline{\alpha})$, $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et aller à l'étape principale.

Etape principale

Si $\varphi(\overline{\alpha}) \leq \varphi(0) + B_1\overline{\alpha}\varphi'(0)$, choisir le plus grand entier $n_0 \geq 0$ telque $\varphi(2^{n_0}\overline{\alpha}) \leq \varphi(0) + 2^{n_0}\overline{\alpha}B_1\varphi'(0)$ et prendre $\overline{\alpha_k} = 2^{n_0}\overline{\alpha}$,

si non choisir le plus petit entier $n_0 \geq 0$ telque $\varphi(\frac{\overline{\alpha}}{2^{n_0}}) \leq \varphi(0) + \frac{\overline{\alpha}}{2^{n_0}}B_1\varphi'(0)$ et prendre $\overline{\alpha_k} = \frac{\overline{\alpha}}{2^{n_0}}$.

Fin.

Théorème 1.1 *Si $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ est continue et bornée inférieurement où d_k est une direction de descente en x_k et si $\beta_1 \in]0, 1[$, alors líensemble*

des pas vérifiant la règle díArmijo est non vide.

Preuve. (voir td) ■

Remarque 1.1 *La condition d'Armijo nous permet une diminution suffisante de la fonction en s'assurant que la décroissance de la fonction f, en passant du point x_k vers x_{k+1} soit au moins proportionnelle au pas α_k, mais si ce pas est très petit , cette décroissance devenir petite ce qui pose un problème.L'exemple suivant montre l'incovinient du pas petit.*

Exemple 1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^2$, $x_0 = 2, \alpha_k = \frac{1}{2^{k+1}}, d_k = -1$.*

Il est clair que $x_k = 1 + \frac{1}{2^k}, k = 0, 1, 2....$ donc $x_{k+1} < x_k$ et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on peut déduire que $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ ce qui montre qu'il s'agit d'une direction de descente et on $\lim_{k\to+\infty} x_k = 1$. Pourtant que le point $\overline{x} = 0$ est une solution optimale du problème $\min f(x) = x^2$.

Conclusion 1.1 *malgré que la suite x_k vérifie la condition de descente mais cette suite ne converge pas vers la solution optimale (même pas vers un point stationnaire) causé du pas petit car $f(x_{k+1}) - f(x_k) \to 0$.*

1.2.2 Recherches linéaires inexactes de Goldstein

On a vu dans l'exemple précédent que la méthode ne peut progresser en raison des petits pas, on va donc rajouter une deuxième condition à la condition d 'Armijo qui éliminerait les pas trop petits.

Principe

On cherche le pas $\alpha_k > 0$ de Goldstein vérifiant les deux conditions suivante :

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + B_1 \alpha_k \nabla^\top f(x_k) d_k, 0 < B_1 < \frac{1}{2}. \tag{Gold1}$$

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \geq f(x_k) + (1 - B_1) \alpha_k \nabla^\top f(x_k) d_k, 0 < B_1 < \frac{1}{2}. \tag{Gold 2}$$

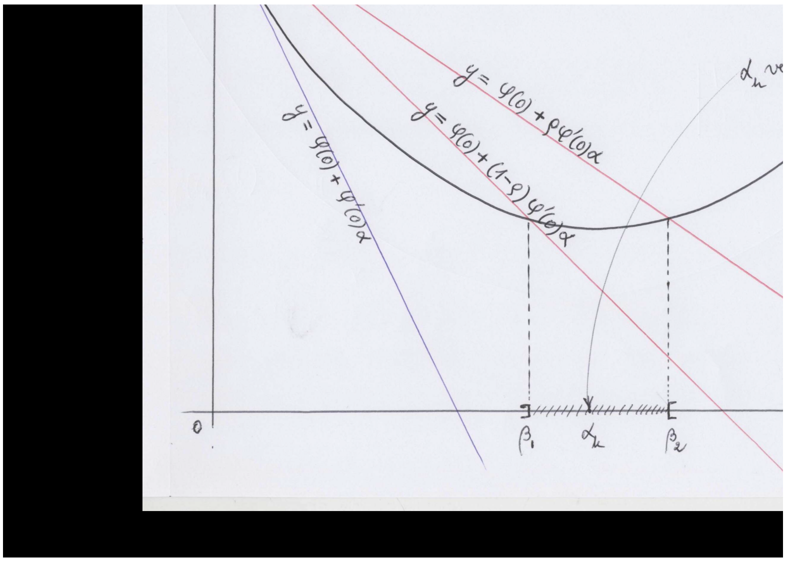
Donc, Gold1 et Gold 2 deviennent

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_k) &\leq \varphi(0) + B_1 \alpha_k \varphi'(0), \\ \varphi(\alpha_k) &\geq \varphi(0) + (1 - B_1) \alpha_k \varphi'(0). \end{aligned}$$

Comme on a vu que la condition Gold 1 assure une décroissance suffisante de f nous signalons que la condition Gold 2 éliminent le pas trop petit.

Interpretation graphique

Il est facile d'étudier la position des deux droites : $y = \varphi(0) + B_1 \alpha_k \varphi'(0)$ et $y = \varphi(0) + (1 - B_1) \alpha_k \varphi'(0)$, qui est indiquée par le schéma suivant :



Algorithme de la règle de Goldstein **Etape 1** (Initialisation) choisir $\alpha_0 \in [0, 10^{100}]$ et $0 < B_1 < \frac{1}{2}$, poser $a_0 = 0, b_0 = 10^{100}$,calculer $\varphi(\overline{\alpha})$, $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, poser $k = 0$ et aller à l'étape 2.

Etape 2 (test de Gold1)

à l'itération k, on a $[a_k, b_k]$ et α_k

Si $\varphi(\alpha) \leq \varphi(0) + B_1\alpha_k\varphi'(0)$ aller à Etape 3.

Si non, poser $b_{k+1} = \alpha_k$, $a_{k+1} = a_k$ et aller à Etape 4.

Etape 3 (test de Gold 2)

Si $\varphi(\alpha) \geq \varphi(0) + (1 - B_1)\alpha_k\varphi'(0)$,stop $\overline{\alpha} = \alpha_k$.

Si non poser $a_{k+1} = \alpha_k$, $b_{k+1} = b_k$ et aller à Etape 4.

Etape 4

Poser $\alpha_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$

Poser $k = k + 1$ et aller à Etape 2.

Théorème 1.2 *Si $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ est continue et bornée inférieurement où d_k est une direction de descente en x_k et si $\beta_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, alors l'ensemble*

des pas vérifiant la règle de Goldstein est non vide.

Preuve. **(voir td)** ■

Remarque 1.2 *Si on veut calculer l'intervale de Goldstein, on cherche d'abord* β_2 *l 'abcisse du point d'intersection de la deuxième droite et* β_1 *l 'abcisse du point d'intersection de la première droite.*

Recherches linéaires inexactes de Wolfe Le pas α_k est acceptable par la recherche linéaire inexacte de Wolfe si α_k vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_k) &\leq \varphi(0) + B_1\alpha_k\varphi'(0), 0 < \beta_1 < \frac{1}{2}, && \text{(Wolfe 1)} \\ \varphi'(\alpha_k) &\geq \sigma\varphi'(0),\ 0 < \sigma < 1, \sigma > \beta_1. && \text{(Wolfe 2)} \end{aligned}$$

Recherches linéaires inexactes de Wolfe-forte Le pas α_k vérifie les conditions de Wolfe -forte si

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_k) &\leq \varphi(0) + B_1\alpha_k\varphi'(0), 0 < \beta_1 < \frac{1}{2}, && \text{(Wolfe-forte 1)} \\ |\varphi'(\alpha_k)| &\leq -\sigma\varphi'(0),\ 0 < \sigma < 1, \sigma > \beta_1. \end{aligned}$$

2 (1.1)

Théorème 1.3 *Si* α_k *vérifie les conditions de Wolfe-forte 1 et 2, alors il vérifie les conditions de Wolfe 1 et 2.*

Preuve. (voir td) ■

Utilité des recherches linéaires inexactes de Wolfe-forte Supposons que α_k vérifie les conditions de Wolfe-forte, donc on a

$$\sigma\varphi'(0) \leq \varphi'(\alpha_k) \leq -\sigma\varphi'(0), \tag{1.6}$$

si on choisit σ très petit, par exemple ($\sigma = 10^{-6}$), alors d'après (4.6) $\varphi'(\alpha_k)$ sera très proche de zéro.De plus si φ' est continuie α_k serait très proche de $\overline{\alpha}$ vérifiant $\varphi'(\overline{\alpha}) = 0$.

Comme conclusion, si σ est très petit, on a beaucoup de chance de tomber sur $\overline{\alpha}$, mais il nous faut beaucoup d'itérations pour trouver α_k vérifiant Wolfe-forte1 et 2**.**

Remarque

La condition de Wolfe 2, n 'entraîne pas toujours que $\varphi'(\alpha_k)$ soit très proche de zéro lorsque σ est très proche de zéro.

Algorithme de la règle de Wolfe et Wolfe-forte Etape d'initialisation

Prendre $\alpha_0 \in [0, 10^{99}]$ et $0 < B_1 < \frac{1}{2}$, poser $a_0 = 0, b_0 = 10^{100}$,calculer $\varphi(\overline{\alpha})$, $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, prendre $\beta_1 = 0.1$ ou $(0.01$ ou $0.001), \sigma = 0.9$ ou plus petit , poser $a_0 = 0, b_0 = 10^{99}, k = 0$ et alle r à Etape 2.

Etape 2(test de Wolfe 1)

Si $\varphi(\alpha_k) \leq \varphi(0) + B_1\alpha_k\varphi'(0)$ aller à Etape 3,

Si non poser $b_{k+1} = \alpha_k$, $a_{k+1} = a_k$ et aller à Etape 4,

Etape 3 (test de Wolfe 2 ou Wolfe-forte 2)

Si $\varphi'(\alpha_k) \geq \sigma\varphi'(0)$ ($|\varphi'(\alpha_k)| \leq -\sigma\varphi'(0)$) stop.

Prendre $\overline{\alpha} = \alpha_k$.

Si non poser $a_{k+1} = \alpha_k$, $b_{k+1} = b_k$ et aller à Etape 4.

Etape 4 (calcul de α_{k+1})

Poser $k = k + 1$ et aller à Etape 2.

Bibliographie

[1] Amir Beck.IntroductIon to nonlInear optImIzatIon

[2] BENZINE RACHID. COURS OPTIMISATION SANS CONTRAINTES TOME1.sur internet.

[3] Stéphane Mottelet. Optimisation non-linéaire.RO04/TI07.

Université Badji-Mokhtar, Annaba Département de Mathématiques

Master 1 Système Dynamique

Optimisation non linéaire

Série N 01

Exercice 1

– Considèrons la fonction $f \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défine par $f(x,y) = x^2 + y^4$

On prend $(x_k, y_k)^\top = (1,1)^\top$ et $d_k = -\nabla f(x_k, y_k)$.

1. Calculer $\varphi(\alpha) = f((x_k, y_k) + \alpha d_k)$ et $\varphi^{'}(\alpha), \varphi(0), \varphi^{'}(0)$.
2. Calculer le pas d' Armijo quí'on note α_{Armijo} avec les données initiales suivantes : $\overline{\alpha} = 1, \beta_1 = 0.9$.

Exercice 2

– Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ continue et bornée inférieurement où d_k est une direction de descente en x_k et soit $\beta_1 \in]0,1[$.

1. Montrer que l'ensemble des pas vérifiant la règle d'Armijo est non vide.

Exercice 3

– Considérons la fonction définie dans l'exercice 1 avec les données initiales suivantes $a_0 = 0, b_0 = 10^{100}, \beta_1 = 0.1, \alpha_0 = 1$.

1. Calculez le pas de Goldstein quí'on note α_{Gold}.
2. Trouver l'intervalle de Goldstein .

Exercice 4

– Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ continue et bornée inférieurement où d_k est une direction de descente en x_k et soit $\beta_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

1. Montrer que l'ensemble des pas vérifiant la règle de Goldstein est non vide.

Exercice 5

– Considérons la fonction définie dans l'exercice 1 avec les données initiales suivantes : $a_0 = 0, b_0 = 10^{99}, \beta_1 = 0.1, \sigma = 0.3, \alpha_0 = 1.$

1. Calculez le pas de Wolfe quí'on note α_{Wolfe}.
2. Calculez le pas de Wolfe-forte qu'on note $\alpha_{Wolfe-forte}$ avec les données initiales suivantes : $a_0 = 0, b_0 = 0.4,\ \beta_1 = 0.01, \sigma = 0.02, \alpha_0 = 0.3.$

Exercice 6

1. Montrer que si α_k vérifie Wolfe-forte1 et 2 alors α_k vérifie Wolfe1 et 2.