Solution de la série théorème de Gauss. (1)

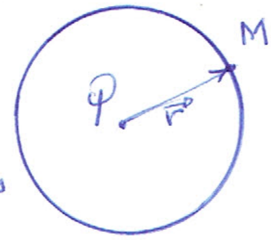
Ex1 : Nous avons vu le calcul d'un champ électrique crée par une charge φ en un point M. Ce calcul fait intervenir une constante K (elle caractérise le milieu), la charge φ positionnée en un point O (par exemple) et la distance qui sépare les points O et M, cette distance est designée généralement par la variable r : $\vec{E} = \frac{K\varphi}{OM^2}\hat{u}_{OM} = \frac{K\varphi}{r^2}\vec{u}_r$

le point M est quelconque dans l'espace et depend des choix imposé par l'exercice.

Ce champ $\vec{E}$ peut être calculé aussi par l'emploi du théorème de Gauss, seulement il faut rappeler les specifités de symetrie généralement utilisées ; Nous avons deux types de symetrie la symetrie axiale et sphérique. l'axiale car l'emploi dans les configurations plane (plan), cylindriques, filaire (fil). Sphérique (sphère).

Dans la résolution des exercices, on parle souvent des surfaces imaginaires placées aux endroits où on demande le calcul de champ. En résumé le flux à travers une surface fermée vaut $\frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$ (charges contenues dans la surface fermée.

Plaçons la surface imaginaire au point M quelconque. Comme la charge φ peut etre entourée d'une sphère de rayon aussi petit que l'on veut, donc nous sommes en symetrie sphérique.



$$\phi = \vec{E}.\vec{S} = ES\ (\vec{S} \parallel \vec{E})\ ,\ \phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\varphi}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{\varphi}{\varepsilon_0}\ ,\ E = \frac{\varphi}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$, la surface fermée imaginaire de rayon $\vec{OM} = \vec{r}$ vaut $4\pi r^2$

donc $E = \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{K\varphi}{r^2}$ $\forall$ la direction du vecteur r

Car nous sommes en symetrie spherique.

Pour le calcul du potentiel rappelons aussi le potentiel de la charge φ au point M

Comme nous l'avons vu lors du calcul du potentiel des charges ponctuelles, on écrit : $V = \frac{K\varphi}{r}$

Lorsqu'on applique le Théoreme de Gauss, on calcul le champ de la maniere déja évoquée puis on utilise la relation $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ pour calculer le potentiel

Comme $E = \frac{K\varphi}{r^2}$, $E = f(r) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$

$dV = -E dr$, $dV = -K\varphi \frac{dr}{r^2}$, $V = K\varphi \int r^{-2} dr + c$

$V(r) = -K\varphi\left(\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right) + c = \frac{K\varphi}{r} + c$

utilisons la continueté du potentiel

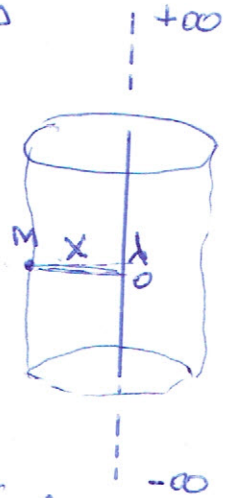
on sait que $V(0) = \infty$ $V(\infty) = 0$

$V(\infty) = 0 = \frac{K\varphi}{\infty} + c \Rightarrow c = 0$

$$V = \frac{K\varphi}{r}$$

Ex 2

Comme il s'agit d'un fil, donc nous sommes en presence d'une symetrie axiale. La surface fermeé de Gauss va etre un cylindre.



Prenons une longueur h du fil infini et passons un cylindre de rayon OM = X

Comme le fil et chargé, nous aurons 03 flux : le flux à travers la surface laterale S_L et les flux à travers les deux bases S_{bsup} et S_{binf}

le champ crée par le fil et perpendiculaire à celui-ci (au fil), donc parallele à la $\vec{S_L}$ et perendiculaire aux surfaces de base

$\phi_{bsup} = \vec{E}.\vec{S}_{bsup} = ES_{bsup}.\cos 90 = 0$ la meme chose pour le flux de base inférieur $\phi_{binf} = \vec{E}.\vec{S}_{binf} = 0$

il reste le flux à travers S_L

$\phi_{S_L} = \vec{E}.\vec{S_L} = ES_L.\cos 0 = ES_L$

$\phi_{total} = \phi_{S_L} + \phi_{S_{bsup}} + \phi_{bin} = \phi_{S_L} = ES_L$

la surface latérale d'un cylindre de hauteur h vaut $2\pi.OM.h = 2\pi X h$.

donc $\phi_{S_L} = 2\pi X h.E$, d'un autre coté $\phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$

les charges contenues dans la hauteur h vallent $\Sigma q_i = \lambda h$

$\phi = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$, $\frac{\lambda h}{\varepsilon_0} = 2\pi X h \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 X} = \frac{2k\lambda}{X}$ (V/m)

Ex3 : Pour le plan infini il s'agit aussi de la symetrie axiale c'st à dire la surface fermeé st cylindrique de hauteur négligeable. Donc Comme le plan infini porte une charge surfacique σ, le flux à travers la surface fermeé st Composé de trois flux : le flux de la base supérieure, celui de la base inferieure et celui de la surface latérale qui st négligeable $\phi_{total} = \phi_{S_{binf}} + \phi_{S_{bsup}} + \phi_{S_{lat}}$

la charge st portée par les surfaces de base donc

$\vec{E} \parallel \vec{S}_{binf} \parallel \vec{S}_{bsup}$ donc $\vec{E} \cdot \vec{S_b} = ES_{binf} = ES_{bsup}$

$\phi_{total} = 2ES_b$. , $\phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$, $\Sigma q_i = \sigma S_{binf} = \sigma S_{bsup} = \sigma S_b$

$$2ES_b = \frac{\sigma S_b}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \ (V/m)$$

S_b dans le cas du plan infini st quelconque et dépendra du rayon choisi que ce soit pour pour la surface fermée ou pour la surface reellement chargeé.

Pour le potentiel on utilise $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$

E st perpendiculaire au plan donc $E = -\frac{dV}{dz}$

$dV = -E\,dz \quad V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int dz + C \quad V = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + C$

$V = f(z)$, pour $z = 0$, $C = V(0)$

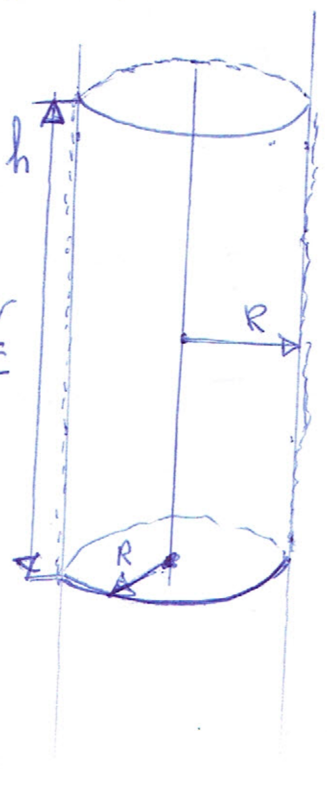
$V(0)$ st le premier plan sur lequel le potentiel st constant et vaut $V(0) = V_0$

pour $\mp z$ ..... ∓ 1, ∓ 2, ∓ 3 ce sont des plans parallèles sur lesquels le potentiels st constant ils representent des surface equipotentielles.

Ex 4

le cylindre infini est analogue au fil infini
la différence réside dans le rayon du cylindre
La symetrie est axiale, la surface fermée va être un cylindre. Comme notre cylindre possède un rayon R et porte une distribution en surface σ
Prenons une hauteur h du cylindre, la surface fermée va être $S_L + 2S_b$, $S_L = 2\pi r h$, les surfaces de base ne sont pas chargées et toute la charge se trouve sur la surface latérale.
Divisons l'espace en deux partie

(I) $0 < r < R$ (II) $r > R$



et appliquons le théorème de Gauss.

(I) Nous n'avons pas de charge à l'intérieur du cylindre $\Sigma q_i = 0$, $\phi = E_I S_L = 2\pi r h E$

$2\pi r h E_I = 0$, $E_I = 0$

II $r > R$ $\Sigma q_i = \sigma S_L = \sigma 2\pi R h$.

$$\phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi R \sigma h}{\varepsilon_0} = E_{II} \cdot 2\pi r h$$

$$E_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r} \quad (V/m).$$

$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$, $E = f(r)$, $E_{II} = -\frac{dV_I}{dr}$, $dV_{II} = -E_I dr$

$V_{II} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r} + c$ $\quad V_{II} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ln(r) + C_{II}$

$\frac{dV_I}{dr} = E_I = 0 \Rightarrow V_I = \text{Constante} = V_0$

Pour $r = R$ $\quad V_I(r)\Big|_{r=R} = V_{II}(r)\Big|_{R=r} \Rightarrow V_0 = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \ln(R) + C_{II}$

$C_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ln(R) + V_0$, $\quad V_{II}(r) = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \ln(r) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ln(R) + V_0$

Calcul dé $\vec{E}$ lorsque la distribution devient volumique ρ_0

$\phi_{total} = \phi_{S_L} + 2\phi_{S_b}$: Comme le champ st perpendiculaire à l'axe du cylindre le flux des bases st nul

$$\phi_{total} = \phi_{S_L} = E S_L = E \cdot 2\pi r h .$$

Pour $\sum q_i$ on va prendre 2 cas :

I $0 < r < R$ II $r > R$

le cylindre st chargé en volume $v = \pi r^2 h$.

$$\sum q_i = \rho_0 v = \rho_0 2\pi r^2 h .$$

I $0 < r < R$ $E_I \cdot 2\pi r h = \dfrac{\pi r^2 h \rho_0}{\varepsilon_0}$, $E_I = \dfrac{r \rho_0}{2\varepsilon_0}$ (V/m)

II $r > R$ $2\pi r h E_{II} = \dfrac{\pi R^2 h \rho_0}{\varepsilon_0}$; $E_{II} = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$