«Interaction électrostatique»

Remarque: Afin d'alléger l'écriture, toutes les lettres représentant des entités vectorielles sont en gras.

<u>Les distributions de charges et le calcul direct du Champ et du Potentiel électriques</u>

Nous avons vu le champ et le potentiel des charges ponctuelles. Voyons qu'en est-il du cas d'un grand nombre de charges distribuées soit en ligne, soit en surface ou en volume. Définissons trois distributions afinde pouvoir calculer de nouveau E et V de celles-ci.On intègre respectivement sur un contour$\mathscr{C}$, une surface S et un volume$\mathscr{V}$.λ est la distribution linéique, σ surfacique et ρ volumique, elles traduisent le nombre de charges contenues dans un élément de longueur dl,un élément de surface dS ou un élément de volumed$\mathscr{V}$.

λ = dq/dl l'unité de λ est [C/m] σ = dq/dS l'unité de σ est [C/m^2]

ρ = dq/d$\mathscr{V}$l'unité de ρ est[C/m^3]

dq= λdl dE =(kdq/r^2)u = $(k\,\lambda dl / r^2)$ uE= $\int(k\,\lambda dl / r^2)$ udV=$\int k\,\lambda dl / r$ V= $\int k\,\lambda dl / r$

dq= σ dS dE =(kdq/r^2)u = $(k\,\sigma dS / r^2)$uE= $\iint(k\,\sigma dS / r^2)$u dV=$\iint k\,\sigma dS / r$ V=$\iint k\,\sigma dS / r$

dq= ρ d$\mathscr{V}$dE =(kdq/r^2)u = $(k\,\rho d\mathscr{V} / r^2)$uE= $\iiint(k\,\rho d\mathscr{V} / r^2)$u dV=$\iiint k\,\rho d\mathscr{V}/r$ V= $\iiint k\,\rho d\mathscr{V} / r$

Applications(le fil infini pour la distribution linéique et le disque mince chargé en surface).

Application 01

Un fil infini porte une charge positive de distribution linéaire λ constante .

<u>1</u>°) Exprimer la variation de charge contenue dans un élément de longueur dl

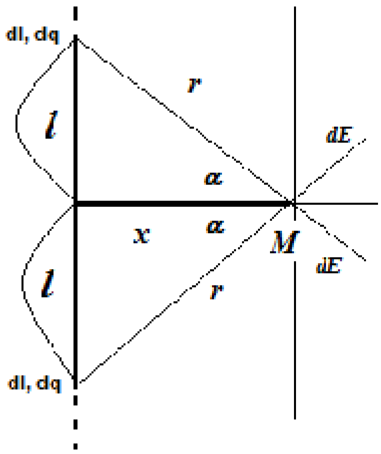
<u>2</u>°) Evaluez la charge totale Q d'une portion de longueur L de ce fil.

<u>3</u>°) Ecrire la variation de champ d**E** générée par la variation de charge dq contenue dans un élément de longueur dl.

<u>4</u>°) faire le schéma et calculer champ électrostatique **E** crée au point M éloigné du fil considéré d'une distance x

<u>5</u>°) Déduire le potentiel à une constante près au même point.

<u>Solution</u>



<u>1</u>°) dq = λdl.

<u>2</u>°) dq = λdl$\int_0^Q dq = \lambda \int_0^L dl\ ,\ Q = \lambda L$.

<u>3</u>°) dE = k dq/ r^2 ,

dE = kλdl/r^2

<u>4</u>°) Voir le schéma en face

cos (α) = x/r,

tg (α) = l /x,

$1/r^2 = \cos^2(\alpha)/x^2$

dl = x d α / $\cos^2(\alpha)$.

Le champ élémentaire dE peut-être décomposé suivant ox et oy .

Les projections dE_y suivant oy [dEsin(α) -dE sin(α)] s'annulent et celles de ox dE_x s'ajoutent [dE cos(α)] .

dE_x = dE cos(α)$\int_0^{Ex} dEx = k\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x\cos(\alpha).\frac{\cos(\alpha)d\alpha}{x}\cos(\alpha)$

$$\int_0^{Ex} dEx = k\lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\alpha)d\alpha/x\ ,$$

E_M =Ex =2kλ/x**.**

5°) E - dV_M/dx, V_M= $-\int(2k\lambda\ dx/x) + C$ V_M = - 2kλ ln(x) +C

Application 02

On considère un disque chargé de rayon R, de centre O et d'axe de symétrie YOY'. Il porte une charge surfacique positive et constante σ.

1°) En utilisant la méthode directe, calculez au point M d'ordonnée « y » : Le champ E(y) et le potentiel V(y)

2°) vérifiez que la relation entre le champ et le potentiel est donnée par la relation **E** = -**grad** V

Solution

1°) dq = σ ds. On sait que si on provoque une variation dx sur un cercle de rayon x concentrique au disque de rayon R, on crée une couronne dont chaque ds provoque au point M un champ dE.

Pour un cercle de rayon x donc de surface π x^2 il aura une différentielle de 2π xdx.

Sur la couronne chaque élément ds crée au point M un champ d**E** et l'ensemble de la couronne crée au point M un cône de sommet M et d'axe OY. La génératrice de ce cône n'est autre que le champ dE. Ces génératrices (dE) se projettent suivant OY par adition et s'annulent algébriquement suivant un axe perpendiculaire à Y'Y

Pour un cercle élémentaire de surface ds = 2π xdx on a :

dE = k σ ds / r^2 , cos (α) = y/r, $r^2 = x^2+y^2$

Le champ résultant sera suivant OY

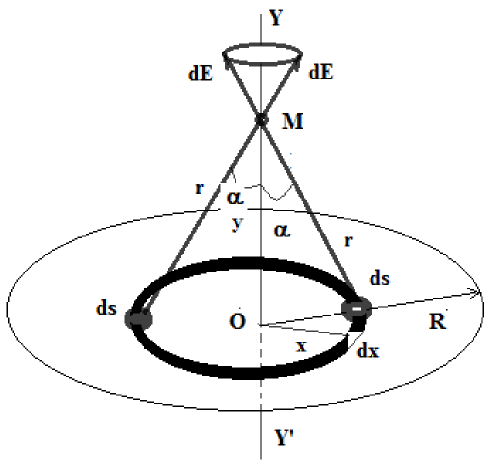
dE(y)=dE cos (α)=k σ ds cos (α) / r^2 =2π k σ yxdx / r .r^2

dE(y)=2π k σ yxdx / $(x^2+y^2)^{3/2}$

$\int_0^{E(y)} \mathrm{dE(y)} = 2\pi\, \mathrm{k}\, \sigma\, \mathrm{y} \int_0^R \mathrm{xdx} / (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)^{3/2}$.

$\mathrm{E(y)} = -\pi\, \mathrm{k}\, \sigma\, \mathrm{y}(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)^{-1/2}$

Avec les bornes ça donne $\mathrm{E(R)} - (-\mathrm{E(0)}$



$\mathrm{E(y)} = \mathrm{E(0)} - \mathrm{E(R)} = 2\pi\, \mathrm{k}\, \sigma[\ 1 - (\mathrm{y}/\ (\mathrm{R}^2 + \mathrm{y}^2)^{1/2})\ ]$, Pour le potentiel on aura :

$dV = k\,\sigma\, ds/r$, $dV=2\pi\, k\, \sigma\, xdx/r$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$$\int_0^{V(y)} dV(y) = \int_0^R 2\pi\, k\, \sigma\, xdx/(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad V(y) = 2\pi\, k\, \sigma[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}] \,,$$

Avec les bornes ça donne $V(y) = V(R) - V(0) = 2\pi\, k\, \sigma[\,(\,(R^2 + y^2)^{1/2}) - y],$

2°) **Remarque importante** : E(y) et V(y) sont maintenant des variable de y

Si on dérive l'expression de V(y) on retrouve E(y) et si on intègre l'expression du champ E(y) on retrouve le potentiel V(y) et de ce fait on vérifie **E** = -**grad** V

Angle plan et angle solide

D'un point O on trace un arc dl de rayon r. L'angle plan dθ limité par deux rayons r qui délimitent l'arc dl est appelé angle plan, donné par dθ= dl/r (dl = rdθ). De la même manièrele point O à partir duquel on voit un élément de surface dS définit l'angle solide donné par $d\Omega = dS/r^2$. Soit unélément de surface dS suffisamment petit pour l'assimiler à une surface plane et un point O situé à la distance r de celle-ci. Par définition on appelle angle solide dΩ, l'angle vu à partir du point O, à travers la surface dS et on écrit:
$d\Omega = d\mathbf{S}/r^{\mathbf{2}}$**.** Soit dS**'** un élément de surface de vecteur unitaire**u** parallèle à l'axe du cône (d**S'** = dS**'u**). Prenons un autre élément de surface dS de vecteur unitaire quelconque **n** (d**S** = dS **n**). Si nous projetons le vecteur surface d**S** sur d**S'** on aura [proj (**A/ B)** =$\mathbf{A}.\mathbf{u}_B$],
proj $(d\mathbf{S}_{(M)}/\, d\mathbf{S'}_{(M)}) = d\mathbf{S}_{(M)}.\mathbf{u}_{dS'} = dS_{(M)}\mathbf{n}_{dS}.\mathbf{u}_{dS'} = dS_{(M)}\cos\alpha$ donc $dS'_{(M)} = dS_{(M)}\cos\alpha$ α étant l'angle entre $d\mathbf{S}_{(M)}$ et$d\mathbf{S}_{(M)}$**'.** Finalement un élément d'angle solide s'écrit :
$d\Omega = dS_{(M)}\cos\alpha/r^2$ (voir **Fig 6**).

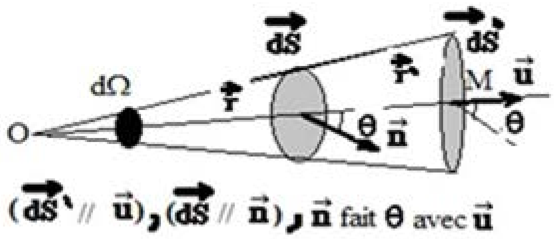


Fig 6

Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Définition. Soient un élément de vecteur surface d**S** et un point M lui appartenant. Le flux élémentaire à travers une surface infinitésimale d'aire $d\mathbf{S}_{(M)}$ muni d'un contour sur lequel s'appuie $d\mathbf{S}_{(M)}$, (surface fermée).
Le flux élémentaire engendré par le champ $\mathbf{E}_{(M)}$ à travers $d\mathbf{S}_{(M)}$ s'écrit
$d\Phi = \mathbf{E}_{(M)}.d\mathbf{S}_{(M)} = E_{(M)}.dS_{(M)}\mathbf{n}_E.\mathbf{n}_S$
Dans une surface fermée un flux est dit sortant si la normale **n** est dirigée vers l'extérieur. Il est dit entrant si la normale **n** est dirigée vers l'intérieur. $d\Phi = \mathbf{E}.d\mathbf{S} = E\mathbf{n}.dS\mathbf{n} = EdS\mathbf{n}_E.\mathbf{n}_S$

$d\Phi = E_{(M)}.dS_{(M)}$

$\Rightarrow\Phi = \iint_S E(M)dS(M)\mathbf{n_E}.\mathbf{n_S} = E_{(M)}.S_{(M)}\cos(\alpha)$,

Après intégration sur une surface fermée S. Le flux obéit à une loi linaire :

$\Phi = ES \Rightarrow \Phi = (E_1+E_2+E_3+...)\, S = S\sum E_i$(variation sur E)

$\Phi = ES \Rightarrow \Phi = (S_1+S_2+S_3+...)\, E = E\sum S_i$(variation sur S)

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrostatique *E*, créé par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition. $d\Phi = \mathbf{E}.d\mathbf{S} = E\mathbf{n}.dS\mathbf{n} = EdS\mathbf{n}_E.\mathbf{n}_S$

THEROME DE GAUSS

On considère une surface **S** fermée, délimitant un volume *V* qui contient une charge q_i. Toute surface fermée vaut $4\pi r^2$ donc d'angle solide 4π

Le flux à travers une surface fermée : $\iint_S E(M).dS(M)\mathbf{n_E}.\mathbf{n_S}$

$$d\Phi = \int_S \frac{K\,\mathbf{q_i}}{r^2} dS\cos\alpha = \int_S K\,\mathbf{q_i}\, d\Omega \Rightarrow \Phi_1 = K\, q_i\, 4\pi = q_i/\varepsilon_0$$

$$\Phi_2 = \iint_S E_{(M)}.dS_{(M)} = \mathbf{E}_{(M)}.\mathbf{S}_{(fermée)}$$

Conclusion $\Phi_1 = Kq_i 4\pi = q_i\, 4\pi/4\pi\varepsilon_0 = q_i/\varepsilon_0$ et $\Phi_2 = E_{(M)}.S_{(fermée)}$

Les surfaces fermées sont de deux types : à symétrie axiale (cylindre fil et plan) et symétrie sphérique (sphère). Pour les premiers c'est toujours un cylindre de surface latérale S_L fermée par deux surfaces de base S_B.

$S_{axiale} = S_L+2S_B$, $\Phi_2 = E_{(M)}.S_{(fermée)} = E_{(M)}.(S_L+2S_B)$.

Pour la symétrie sphérique $S_{fermée}$ est toujours une sphère $\Phi_2 = E_{(M)}S_{sphère}$ ($E_{(M)}$ et $S_{sphère}$ sont toujours parallèles).

Dans les situations de symétrie, le théorème de Gauss permet ainsi un calcul simple de **E.**

Le champ ainsi obtenu est, généralement, dépendant d'une variable triviale qui facilite le calcul du potentiel à partir de la relation **E**= **-grad**(V)

Application <u>03</u>

Une sphère de rayon R et de densité volumique de charge ρ_0 uniforme et constante. Calculer le champ et le potentiel dans tout l'espace. En appliquant le théorème de Gauss. Représenter le champ obtenu en fonction de la variable dont il dépend.

<u>Solution</u>

Le champ est radial pour tout point de la surface de sphère donc $\mathbf{E}_{(M)}$ est parallèle à $\mathbf{S}_{(M)}$ et on écrit $\mathbf{E}(M).\mathbf{S} = \Phi_2$

<u>Pour 0<r<R</u> $q_i = \rho_0\mathcal{V} \Rightarrow q_i = \rho_0\, (4/3)\pi r^3$ $\mathcal{V} = (4/3)\pi r^3$ $d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$,

$dq = \rho_0 d\mathcal{V} = \rho_0 4\pi r^2 dr$, $\mathbf{q}_i = 4\rho_0\pi r^3/3$,

$\Phi_1 = Kq_i/\varepsilon_0$ $\Phi_2 = E4\pi r^2$

$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow E = (4\pi r^3\rho_0/3\varepsilon_0).(1/4\pi r^2) \Rightarrow E = \rho_0 r/3\varepsilon_0$

<u>Pour r>R</u>. $dq = \rho_0 dV \Rightarrow q_i = 4\pi R^3\rho_0\,(1/3)$ $\Phi_1 = 4\pi\rho_0 R^3(1/3\varepsilon_0)$

$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow E = 4\pi R^3\rho_0(1/3\varepsilon_0).(1/4\pi r^2) \Rightarrow E = \rho_0 R^3/3\varepsilon_0 r^2$

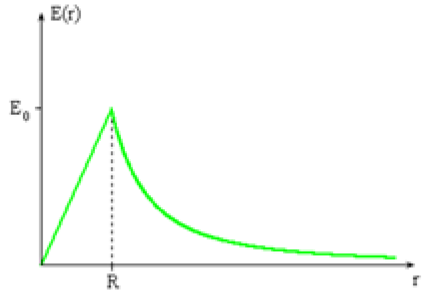
Pour le calcul du potentiel on utilise E = - $\frac{dV}{dr}$⇒ ou $\vec{E}$= -$\overrightarrow{\mathbf{grad}}$V

<u>Pour 0<r<R</u> **dV = -Edr** ⇒ **V_I**= -$\int \boldsymbol{Edr}+\boldsymbol{C}$⇒**$V_I$**= - $\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\int rdr+C$⇒ **$V_I$** = - $\frac{\rho_0}{3x2\varepsilon_0}\boldsymbol{r^2}+\boldsymbol{C_I}$

<u>Pour r>R</u> **dV = -Edr** ⇒ **V_{II}** = -$\int \boldsymbol{Edr}+\boldsymbol{C}$⇒**$V_{II}$** = - $\frac{\rho_{0R^3}}{3\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r^2}}dr+\boldsymbol{C_{II}}$⇒ **$V_{II}$** = $\frac{\rho_{0R^3}}{3\varepsilon_0}\frac{\mathbf{1}}{r}$ + $\boldsymbol{C_{II}}$

Pour déterminer les constantes C_i on utilise les conditions aux limites : par définition on a V_{II} (∞) = 0⇒ **C_{II} = 0** ⇒V_{II} = $\frac{\rho_{0\,R^3}}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$ **C_I** s'obtient par l'idée d'égaliser les potentiels à la frontière entre I et II, V_I (r =R) = V_{II} (r =R) ⇒ - $\frac{\rho_0}{3x2\varepsilon_0}R^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C_I}$ =$\frac{\rho_{0R^3}}{3\varepsilon_0}\frac{\mathbf{1}}{R}$⇒

C_I =$\frac{\rho_0}{3x2\varepsilon_0}R^{\mathbf{2}}$+ $\frac{\mathbf{2}\rho_{0R^3}}{2x3\varepsilon_0}\frac{\mathbf{1}}{R}$ = $\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R^{\mathbf{2}}$⇒ **$V_I$** = - $\frac{\rho_0}{3x2\varepsilon_0}\boldsymbol{r^2}+\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R^{\mathbf{2}}$



Soit un élément de surface d**S** exposé à un champ **E** tel que leur interaction produit un élément de flux dΦ du vecteur **E** à travers un élément de surface d**S** et on écrit :
dΦ = **E.**d**S** =E.dScosα. Finalement cosα signalé dans dΩ n'est autre que l'angle entre **E** et **S** dans le calcul du flux par théorème de circulation.
dΩ = d**S**'.**n**/$r^{\mathbf{2}}$ **=** dS cosα/r^2 dΦ = **E**.d**S** **=** E.dScosα =KqdS cosα/r^2= Kq dΩ
Évanlions la circulation de **E** entre deux points M (départ), N (arrivée) repérés par $r_1$et r_2.
Nous avons **E.dr** = -dV⇒**(**K q_1/r^2) dr =-dV⇒∫**(**K q_1/r^2) dr
=-∫dV⇒Kq_1[(-1/r_2)+(1/r_1)]=-[V_2-V_1]
⇒Kq_1[(1/r_1)-(1/r_2)]=[V_1-V_2].
Si on place l'origine du potentiel à V_2 on aura Kq_1/r_1)=V_1
⇒E_p =-q_2[V(r_2)-V(r_2)]⇒E_p =q_2[V(r)]
($\mathbf{u_E}$.$\mathbf{u_r}$ =-1),
∫dE_p= q_2K q_1∫dr/ r^2⇒Ep(∝) -E_p(r) = q_2 kq_1[(-1/ ∝)+1/r]
⇒ -Ep(r)= q_2K q_1[1/r] ⇒
E_p(r)=-q_2Kq_1(1/r) ⇒E_p(r)=-q_2Kq_1(1/r) = -q_2V⇒V = K$q_1$1/r
Si nous réévaluons de nouveaux entre les points ∝ et r nous aurons
E_p(r)=q_2Kq_1/r =q_2V⇒V = Kq_1/r
si nous prenons cette intégrale comme impropre ∫dEp= q_2∫dV