Module : Analyse fonctionnelle appliquée mars 2020
Master 1 de Mathématiques Appliquées

Série 2
Espaces de Sobolev

Excercice 1.
Soit $f(x) = x^\alpha$, discuter suivant le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'appartenance de f à $H^1(0,1)$.

Excercice 2.
Soit $f(x) = \log(x)$, $x \neq 0$.
a) Montrer que $f \in L^2(]0,1[)$.
b) Montrer que f n'appartient pas à $H^1(]0,1[)$.

Excercice 3.
Supposons que $N \geq 3$, posons $u(x) = |x|^{-\beta}$, Montrer que $u \in H^1(B)$ pour $0 < \beta < \frac{N-2}{2}$ (B désigne la boule unité de centre à l'origine).

Excercice 4.
Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 / \;\; r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$, posons $u(x,y) = (-\log r)^\alpha$.
Montrer que $u \in H^1(\Omega)$ si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. (remarquer que u n'est pas bornée sur la boule unité Ω).

Excercice 5.
On note χ_I la fonction caractéristique de l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Les fonctions

$$u(x) = \chi_{]0,1[}(x) + (2-x)\chi_{]1,2[}(x), \quad u(x) = a\chi_{]0,1[}(x) + b\chi_{]1,2[}(x)$$

appartiennent-elles à $H^1(]0,2[)$?

Excercice 6.
On note χ_Ω la fonction caractéristique de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Soit Ω un ouvert borné tel que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ avec Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints. On note $\Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ la frontière commune (supposée régulière). On considère une fonction $u \in C^0(\bar{\Omega})$ telle que $u = u_1\chi_{\Omega_1} + u_2\chi_{\Omega_2}$ avec $u_i \in H^1(\Omega_i)$ pour $i = 1,2$. Calculer $\nabla u \in D'(\Omega)$. La fonction u appartient-elle à $H^1(\Omega)$?

Excercice 7.
Soit u une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$, Ω ouvert borné régulier. Montrer que u est une solution du problème de Neumann

$$(N) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & dans \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

si et seulement si u et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} f v ds \quad \text{pour toute fonction } v \in C^1(\bar{\Omega})$$

En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans $C^2(\bar{\Omega})$ de (N) est que $\int_\Omega f(x)dx = 0$.