Série 1

Exercice 1.

Lorsque les assertions suivantes sont vraies, les démontrer, sinon donner un contre exemple :

1. Toute fonction de $L^2(]-1; 1[)$ est bornée.
2. Il existe $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.
3. Toute fonction u de $L^2(\mathbb{R}_+)$ vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$.
4. Soit $B(0; 1)$ la boule de centre 0 est de rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$. La fonction $u : x \in B(0; 1) \mapsto |x|^\alpha$ est dans $L^p(B(0; 1))$ si et seulement si $\alpha > -N/p$.

Exercice 2.

Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$ qui satisfait les propriétés

- 1- $\varphi \geq 0$,
- 2- $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$

Exercice 3. :

Montrer que si $f \in L_{loc}^1(I)$ et Df sa dérivée au sens de D' est une fonction $g \in L_{loc}^1(I)$ (ie. $Df = g$) alors f est une fonction absolument continue, donc dérivable presque partout et $f'(x) = g(x)$ presque partout.

Exercice 4.

Montrer que si f est continue et D^2f (la dérivée seconde au sens des distributions) est une fonction continue sur $I =]a, b[$, alors $f \in C^2(I)$.

Exercice 5.

Montrer qu'une fonction continue f et C^1 - par morceaux sur $\bar{I} = [a, b]$, appartient à $H^1(I)$.

Exercice 6.

Soit $V = \{u \in C^1[-1, 1]; u(-1) = u(1) = 0\}$ muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 u'v' dx$. Le but de cet exercice est de montrer que V n'est pas complet. Considérer la suite $u_n \in V$, $n = 1, 2, \dots$ définie par :

$$u_n(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 < x < -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{2n} & \text{si } |x| < \frac{1}{n} \\ x - 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$$

Exercice 7. (Principe de Dirichlet)

Soient Ω un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 , f et g deux fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. Soit $u \in C^2(\bar{\Omega})$ qui réalise le minimum de la fonctionnelle d'énergie

$$I[w] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 - wf \right) dx, \quad w \in A = \{w \in C^2(\bar{\Omega}), w = g \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Montrer alors que

$$\Delta u = f \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = g$$