

Identification des Systèmes

Professeur Belkacem OULD BOUAMAMA

Recherche : Responsable de l'équipe de recherche MOCIS

Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal de Lille (LAGIS -UMR CNRS 8219)

Enseignement: Professeur et Directeur de la recherche à Poltech' lille

Coordonnées

Polytech Lille . Avenue Paul Langevin, F59655 Villeneuve d'Ascq cedex

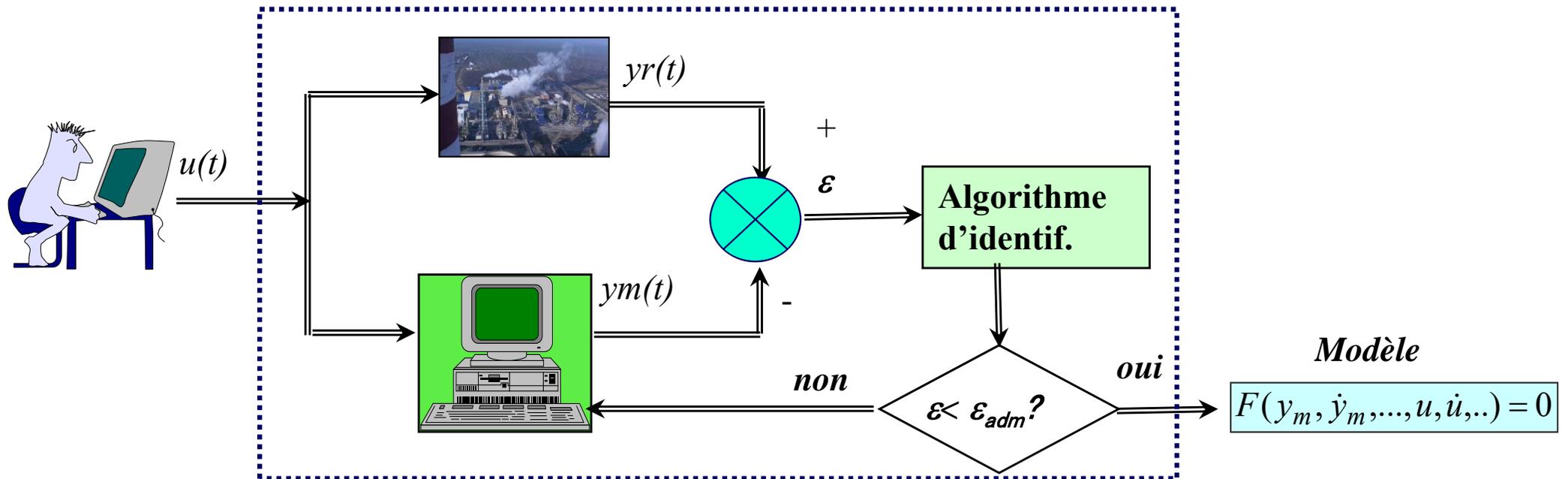
Tél : (00) 328767397, GSM (00)667123020

Mèl : Belkacem.ouldbouamama@polytech-lille.fr,

Page personnelle : <http://www.mocis-lagis.fr/membres/belkacem-ould-bouamama/>

- *Ce cours est dispensé aux élèves de niveau ingénieurs 5^{ème} année.*
- *Toutes vos remarques pour l'amélioration de ce cours sont les bienvenues.*

IDENTIFICATION



Prof. Belkacem OULD BOUAMAMA
LAGIS UMR CNRS 8146

Tél : (33) 03 28 76 73 97 - Fax : (33) 03 20 33 71 89

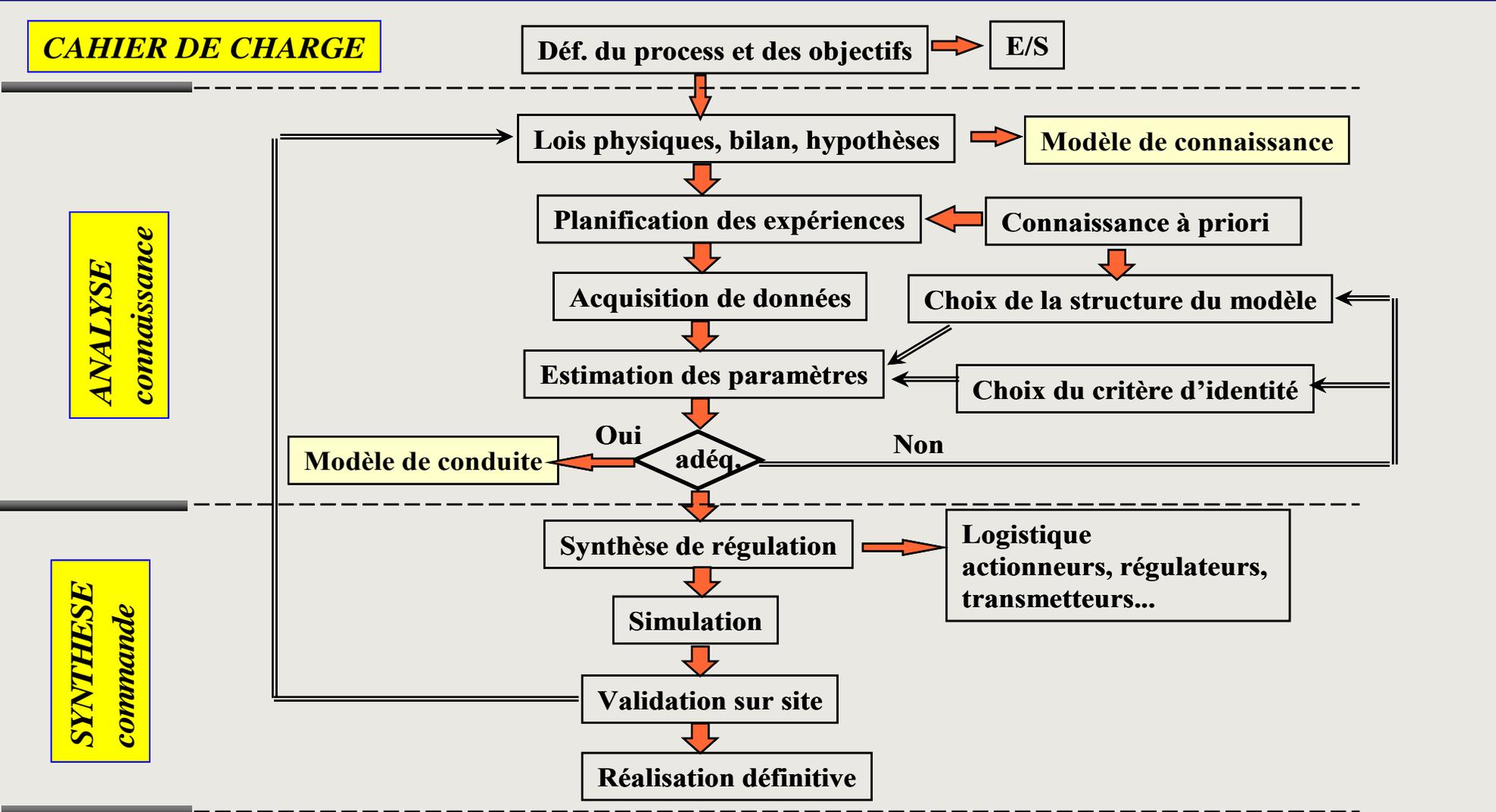
E mail : Belkacem.bouamama@univ-lille1.fr

Chapitre 1

INTRODUCTION

DEFINITIONS ET BUT DE L' IDENTIFICATION

👉 Positionnement



Modélisation ?

Définitions

- ✓ Modélisation ? : Ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle
- ✓ Modéliser un système = capable de prédire le comportement du système
- ✓ Subjectivisme de la modélisation : modèle = intersection du système et du modélisateur
- ✓ Modèle jamais "exact"?

Importance

- ✓ Outil d'aide à la décision., Support de la simulation,
- ✓ Représente 50 % d'un projet de commande
- ✓ Perspectives grâce à l'informatisation

Un modèle pourquoi faire ?

- ✓ Concevoir, Comprendre, Prévoir, Commander (décider).

Un modèle comment faire ?

1. MODELE DE CONNAISSANCE

- ✓ **Obtenu sur la base des lois physiques, économiques etc..**
- ✓ **Difficultés de décrire fidèlement les phénomènes complexes;**
- ✓ **Hypothèses simplificatrices;**
- ✓ **Dilemme- précision-simplicité**
- ✓ **Un modèle simple est faux, un modèle compliqué est inutilisable.**
- ✓ **Les paramètres ont un sens physique donc modèle commode pour l'analyse.**

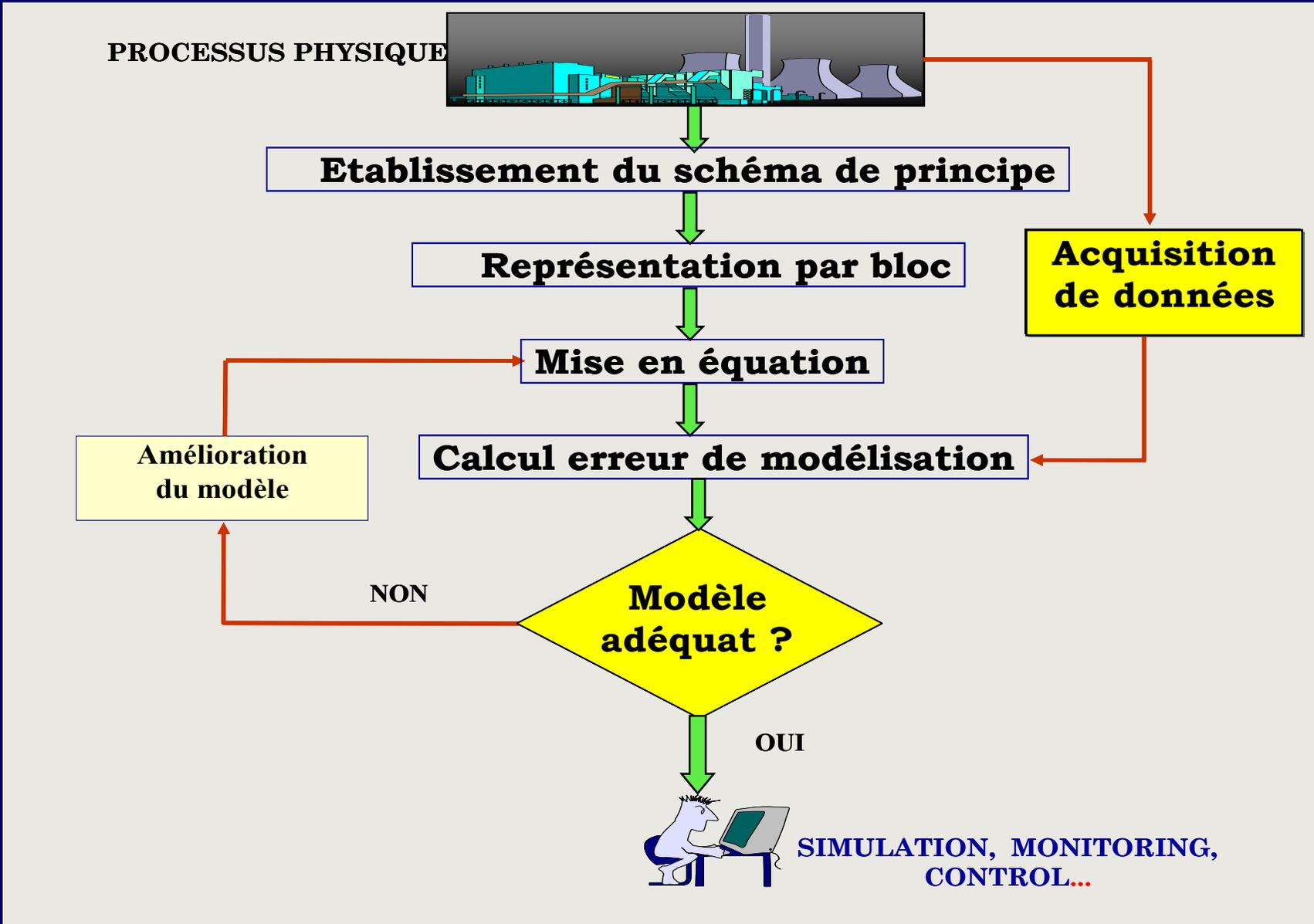
2. MODELE DE REPRESENTATION

- ✓ **Système "boite noire";**
- ✓ **Expérience active (système dérangé) ou passive (aléatoire);**
- ✓ **Etape qualitative (connaissances a priori) et quantitative;**
- ✓ **Paramètres du modèle n'ont aucun sens physique;**
- ✓ **Modèle de conduite (modèle E/S) utile pour la commande;**
- ✓ **Complément du modèle de représentation.**

Classification des modèles

- ☞ selon le caractère des régimes de fonctionnement
 - statique et dynamique
- ☞ selon la description mathématique
 - *linéaire, non linéaire*
- ☞ selon les propriétés dynamiques
 - *à paramètres localisés, à paramètres distribués*
- ☞ selon l'évolution des paramètres :
 - *stochastique, déterministe*
- ☞ selon le nombre de variables :
 - *monovariable (SISO), multivariable (MIMO)*

Étapes de modélisation



GENERALITES SUR L' IDENTIFICATION

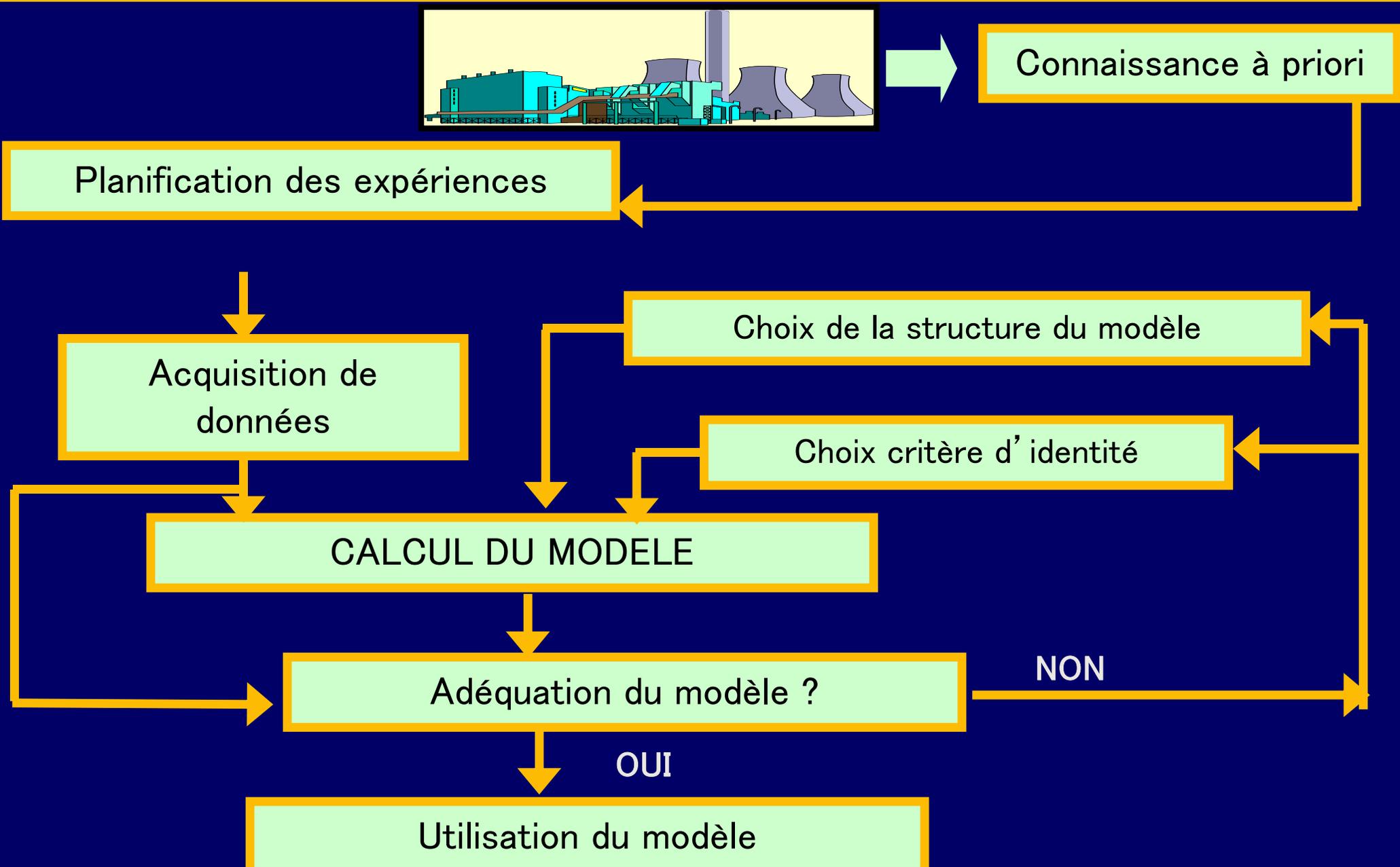
Définitions de l'identification

Définition au sens de Zadeh (1962) :

- ✓ *L'identification d'un procédé est définie comme la détermination, basée sur la connaissance des entrées et des sorties du procédé, d'un modèle appartenant à une classe spécifiée, équivalente au procédé.*
- ✓ **L'identification d'un système c'est la détermination de son modèle mathématique sur la base des observations expérimentales entrées-sorties. Le traitement mathématique des réponses graphiques du système est appelé IDENTIFICATION. Le modèle obtenu est dit de conduite ou de représentation**

Pourquoi l'identification : importance

Méthodologie de l'identification



Principe de l'identification

👉 Base de l'identification : Expérience

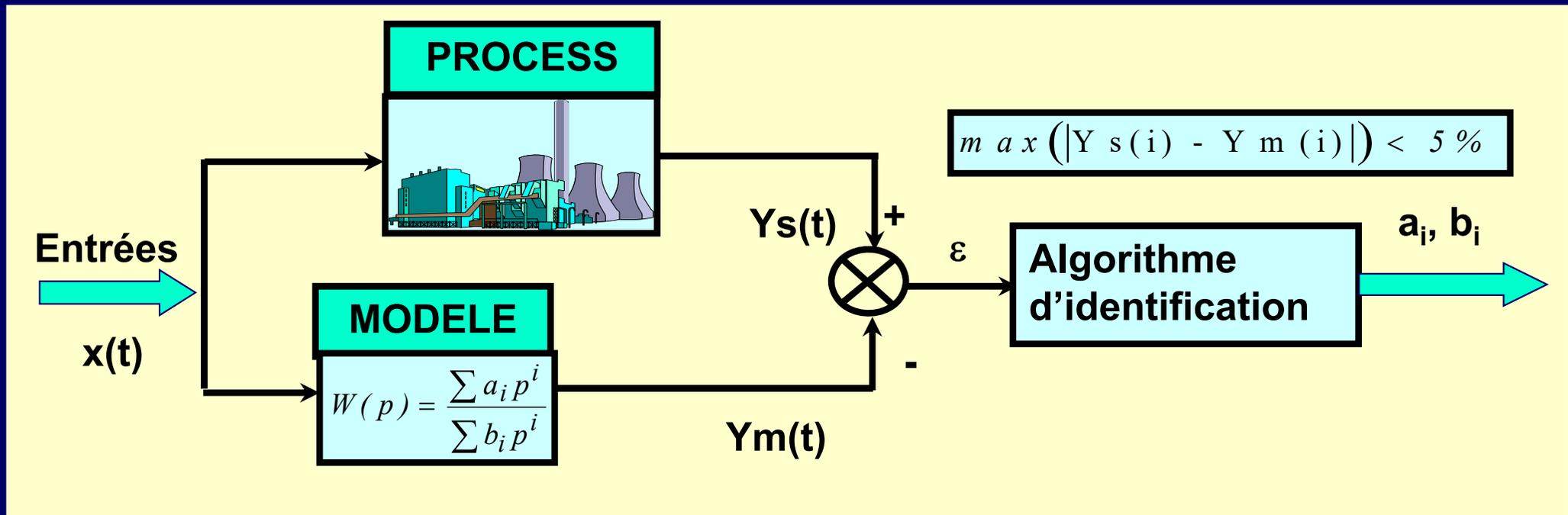
- ✓ Expérience active
- ✓ Expérience passive

👉 Principe

1. **Étape qualitative** : Sur la base d'une connaissance à priori du système à identifier, on fixe une structure du modèle comportant des coefficients inconnus. : **Boite « grise » et « boîte noire »**
2. **Étape quantitative** : Elle consiste à la détermination des coefficients inconnus du modèle de façon que la différence entre les N sorties réelles du système et celles du modèle soit minimale selon un critère donné qu'on résout par un algorithme d'identification

Estimation des paramètres du modèle

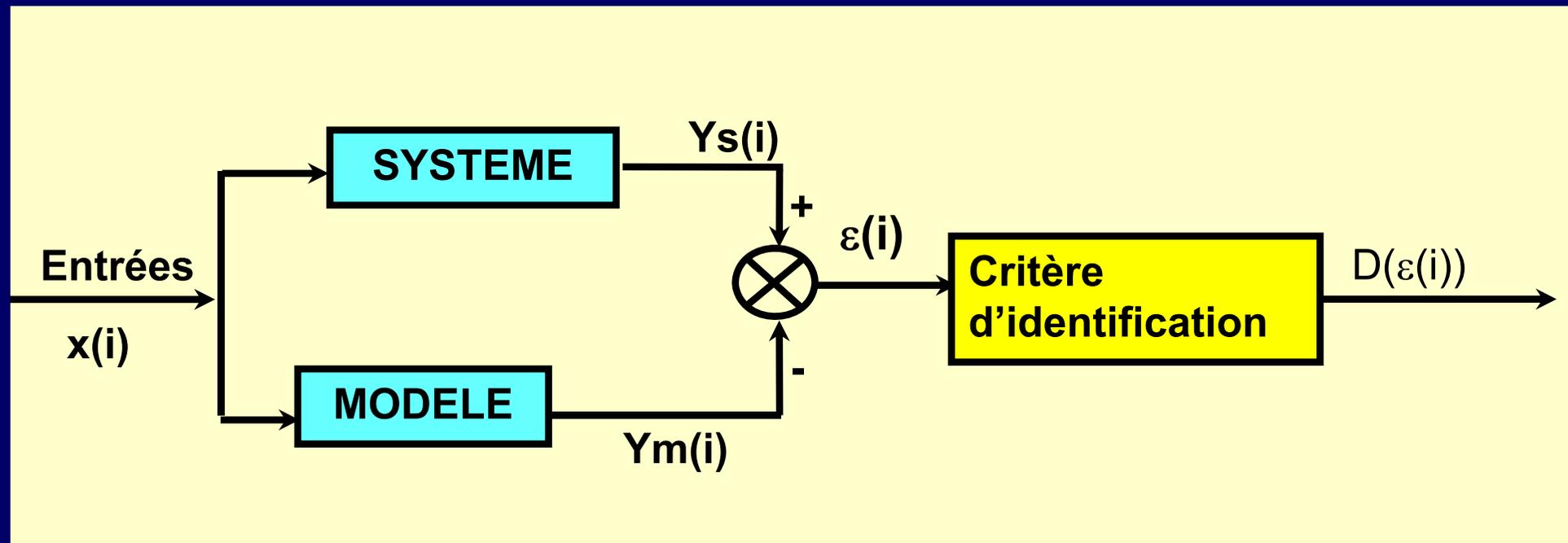
- ✓ Déterminer les valeurs des paramètres du modèle sur la base des observations E/S tel que la sortie du modèle soit la plus proche du système réel selon un critère fixé.



CRITÈRES D'IDENTIFICATION

☞ Distance d'état

- ✓ basée sur la différence entre la sortie du système et du modèle

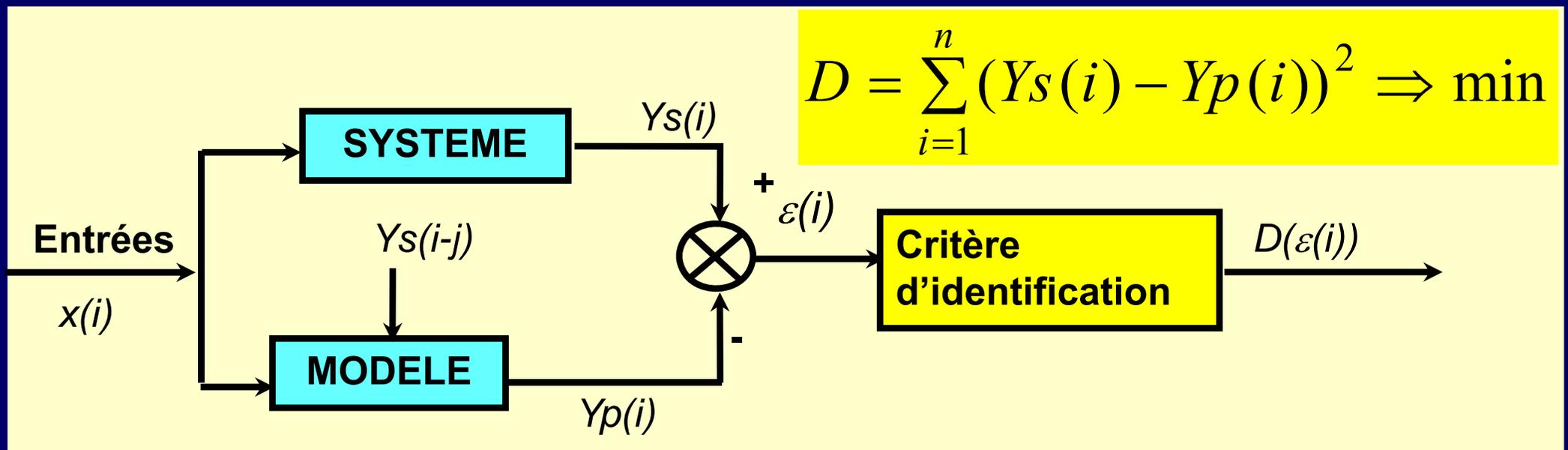


$$D = \sum_{i=1}^n (Ys(i) - Ym(i))^2 \Rightarrow \min$$

CRITÈRES D' IDENTIFICATION

☞ Distance de prédiction

- ✓ basée sur la différence entre la sortie du système et celle que prédit le modèle au même instant



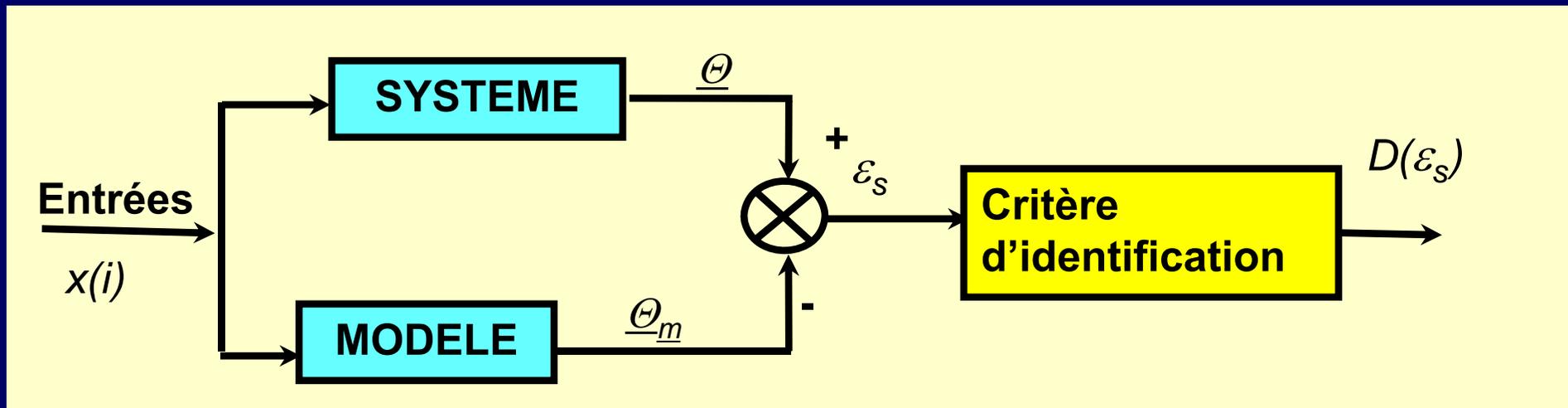
- ✓ **Exemple** : modèle choisi est une équation de 1^{er} ordre aux différences : on utilise l'information à l'instant $(i-1)$

$$y_p[i] = -ay(i-1) + b.x(i-1)$$

CRITÈRES D' IDENTIFICATION

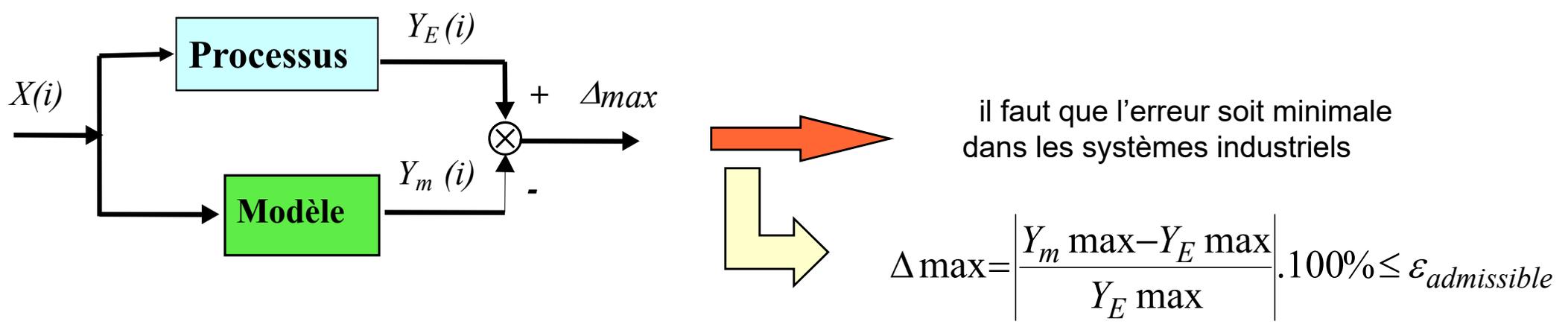
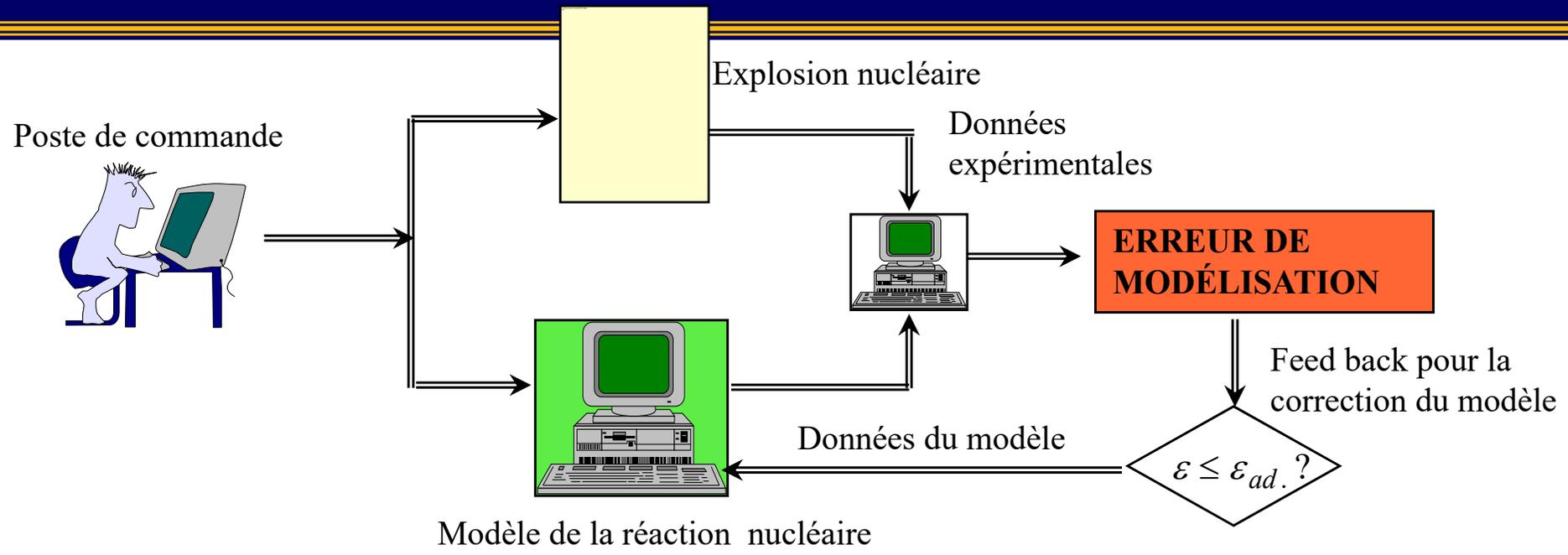
☞ Distance de structure

- ✓ basée sur la différence entre les paramètres du système et ceux du modèle



- ✓ Remarque : distance de structure non mesurable directement. On se base sur les effets de cette structure sur la sortie
- ✓ Exemple : approximer un modèle à paramètres distribués par un modèle à paramètres localisés

VALIDATION DU MODELE



EXPERIMENTATION

☞ Caractéristiques du signal d'excitation

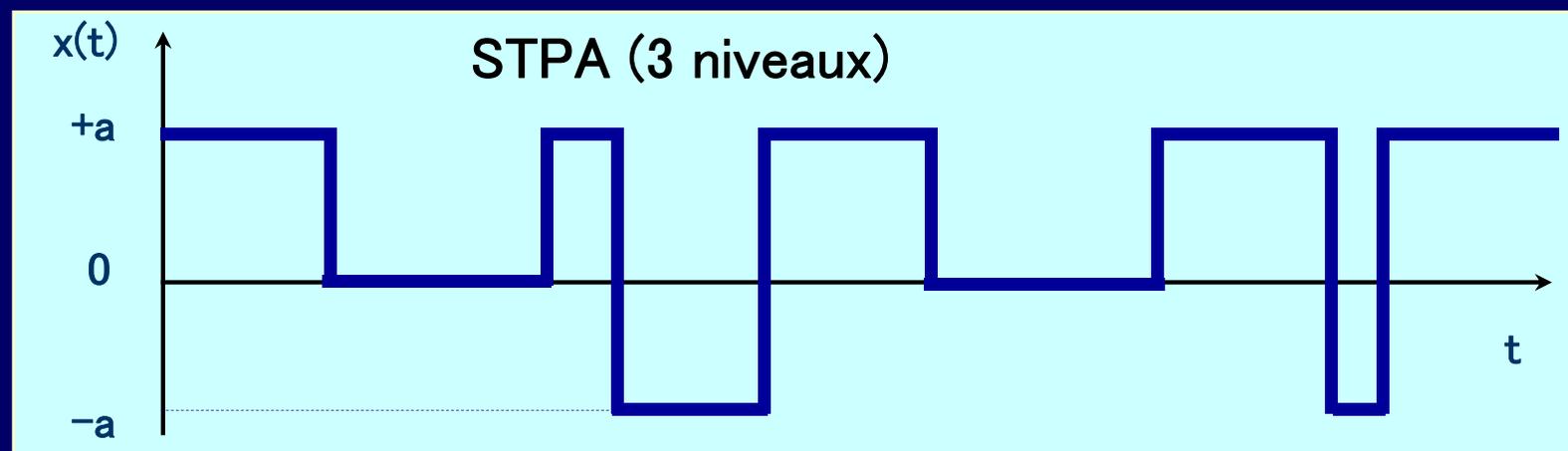
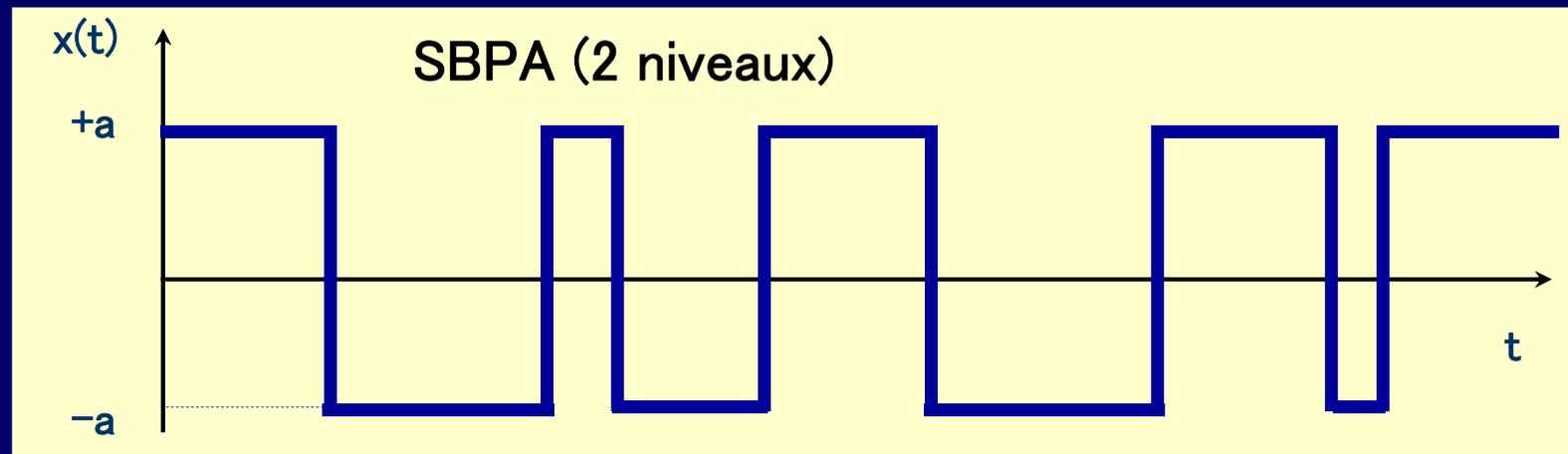
- ✓ Centrée : $\pm 10\%$ de la consigne
- ✓ Spectre riche : recueillir le max d'information sur le système (exciter sur toute la bande de fréquence intéressante)
- ✓ Déterministe : Physiquement réalisable
- ✓ Amplitude limitée : ne pas trop perturber le process, rester en linéaire

☞ Quel signal ? : Séquence Binaire Pseudo Aléatoire SBPA

EXPERIMENTATION

☞ SBPA et STPA

- ✓ Suite d'événements créée de façon déterministe mais apparaissant aléatoire



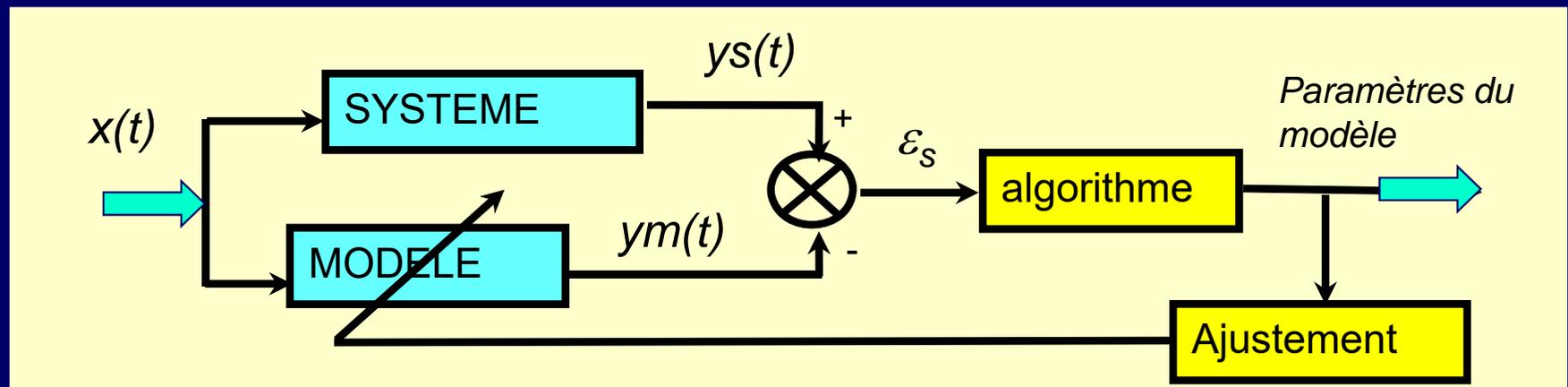
CLASSIFICATION DES METHODES D' IDENTIFICATION

1. Méthode de base

- ✓ Basées sur les réponses graphiques (indicielles, impulsionnelles..)

2. Méthodes du modèle

- ✓ Ajuster manuellement ou automatiquement la structure ou les paramètres du modèle jusqu'à ce que $\varepsilon \rightarrow \min$.
- ✓ **Itérative**



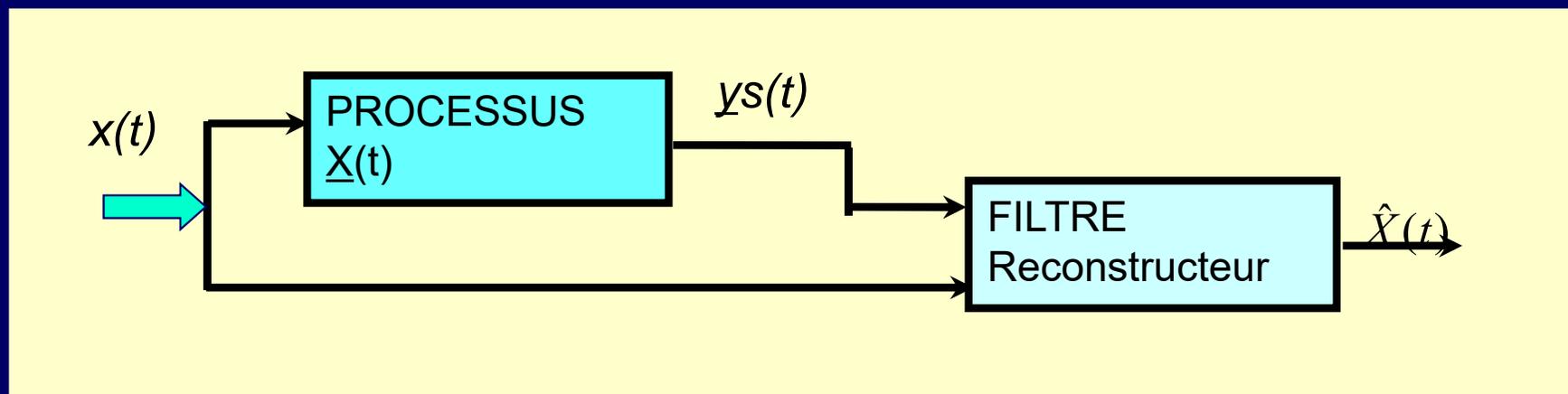
CLASSIFICATION DES METHODES D' IDENTIFICATION

3. Méthode statistiques

- ✓ Basées sur les MMC

4. Théorie de l'estimation et filtrage

- ✓ Estimation de l'état du procédé à partir des E/S.



Chapitre 2

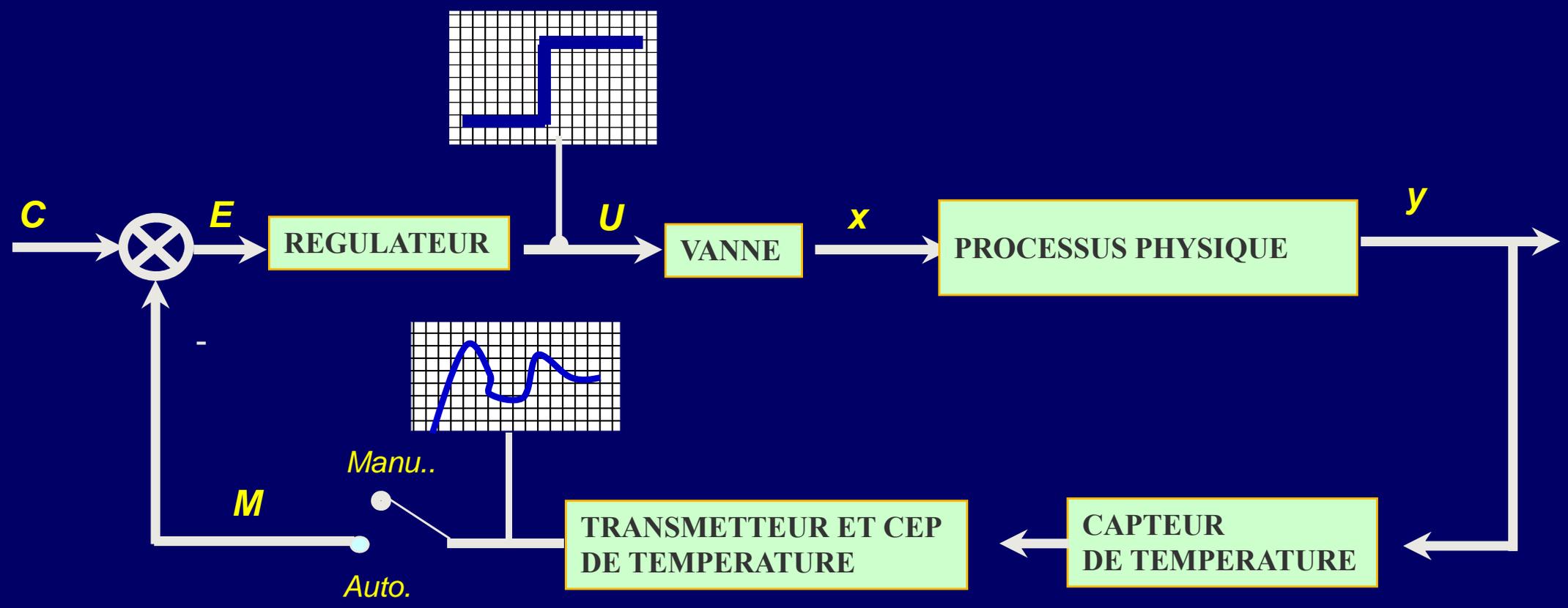
METHODES DE BASE

Classification des méthodes de base

- ☞ **Avantages et inconvénients des méthodes de base**
 - ✓ **Avantage : Simplicité , outil mathématique simple**
 - ✓ **Inconvénient : signaux d'entrée spécifiques (donc pas toujours réalisables)**

- ☞ **Classification des méthodes de base**
 - 1. Analyse indicielle**
 - 2. Analyse impulsionnelle**
 - 3. Analyse harmonique**

Expérimentation dans un SRA



Méthodes de Broûda et du 1^{er} ordre par un exemple

CAHIER DES CHARGES

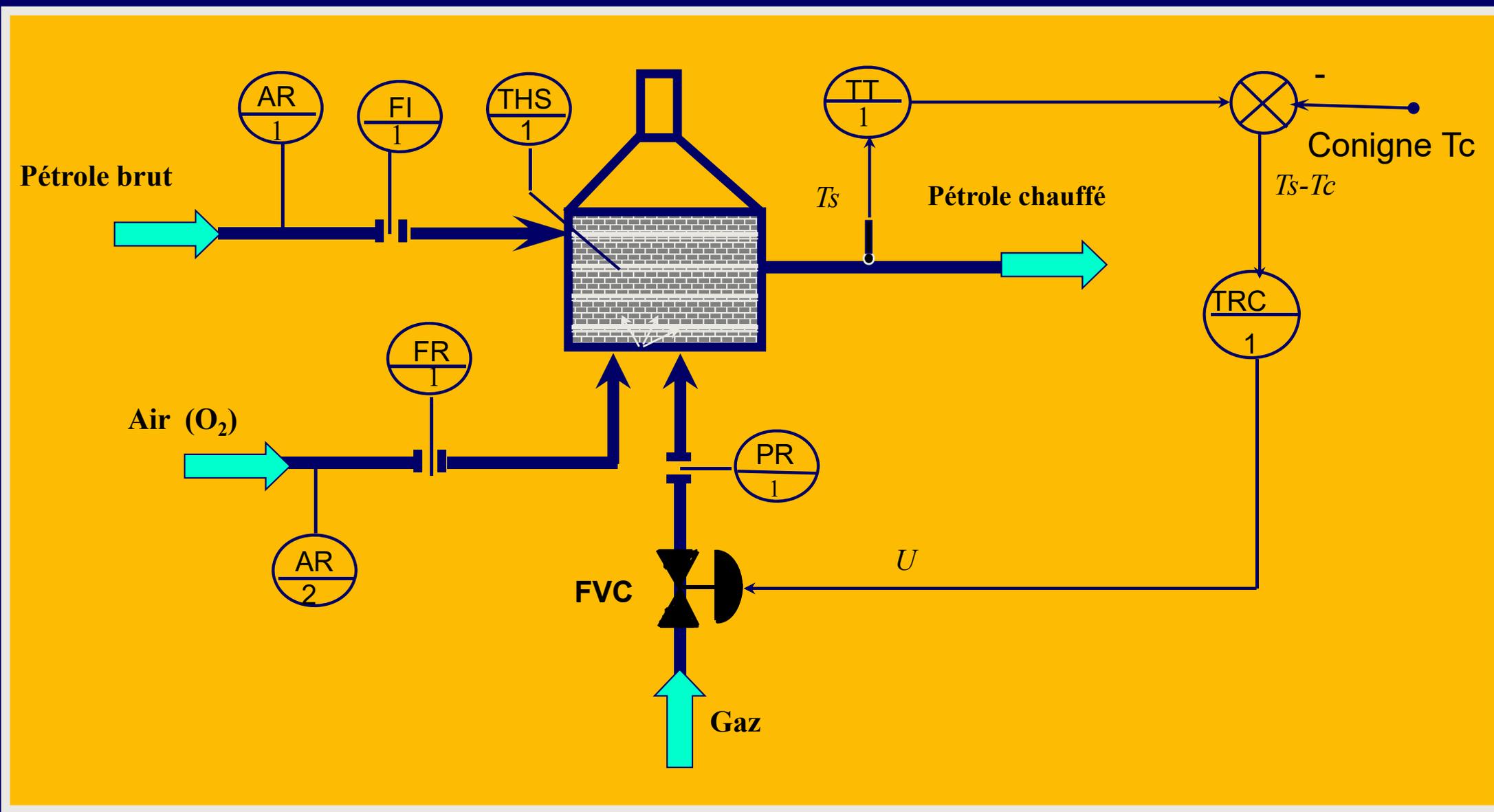
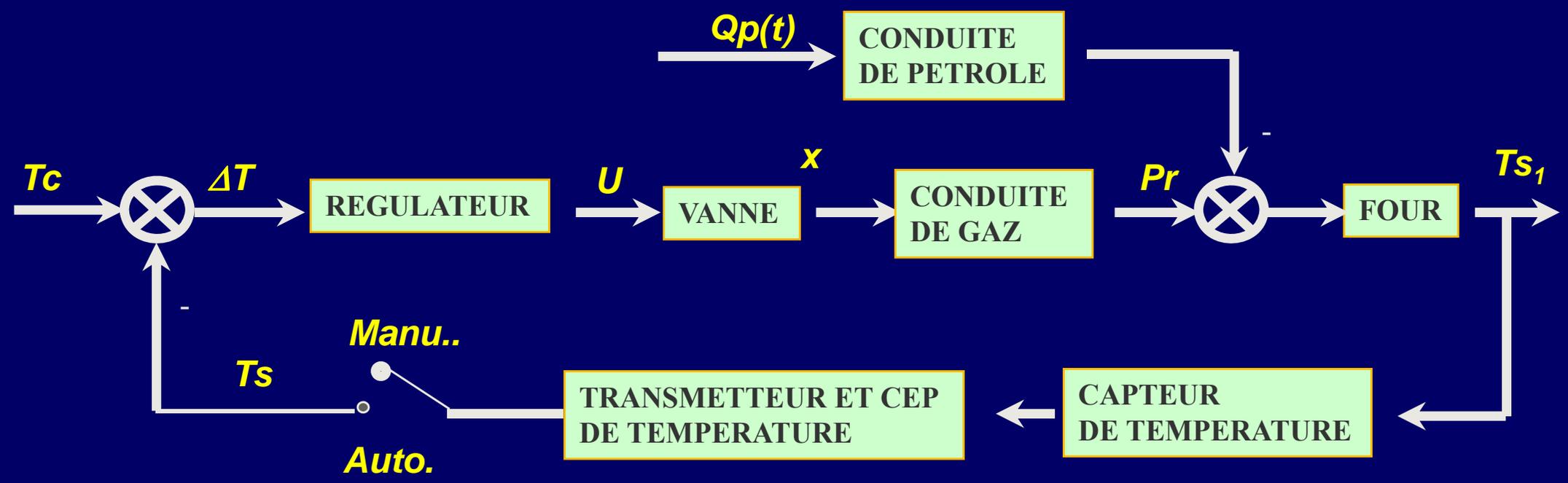


Schéma fonctionnel, définitions des E/S



Régimes de fonctionnement

☞ $T_s(t)$ - Grandeur de sortie (température à la sortie –

- ✓ c'est la grandeur à régler), Valeurs maximales et minimale de la variation de température : $T_{smax} = 170^\circ\text{c}$, $T_{smin}=20^\circ\text{c}$; T_{so} - Valeur nominale de la température le fonctionnement $T_{so} = 80^\circ\text{C}$

☞ $P_g(t)$ - Grandeur d'entrée (pression du gaz combustible - Grandeur réglante);

- ✓ Valeurs maximales et minimale de la variation de la pression du gaz combustible : $P_{gmax} = 5 \text{ bars}$, $P_{gmin} = 0 \text{ bar}$; P_{go} - Valeur nominale de la pression du gaz combustible $P_{go} = 2 \text{ bars}$;

☞ Q_p - Débit du pétrole à l'entrée (perturbation);

- ✓ Débit nominale du pétrole à l'entrée : $20 \text{ m}^3 / \text{s}$; $Q_{pmax} = 30 \text{ m}^3 / \text{s}$ bars, $P_{gmin} = 10 \text{ m}^3 / \text{s}$. Il existe aussi d'autres perturbations (pouvoir calorifique du gaz, température ambiante etc...) que nous considérons comme constantes.

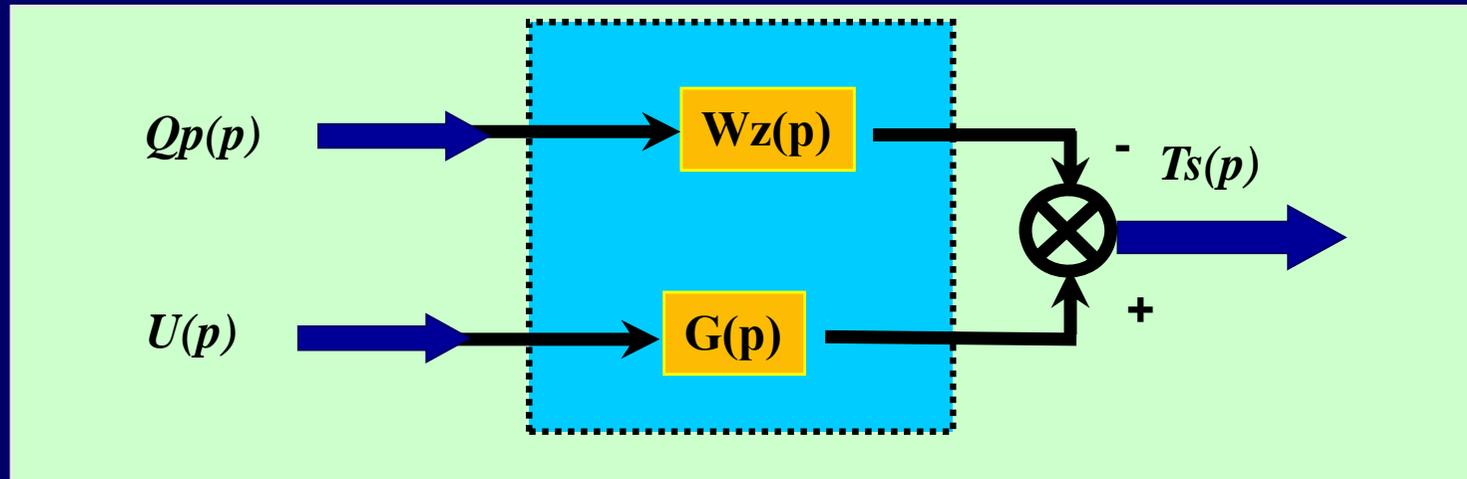
☞ x : déplacement du clapet de la vanne [0 à 6mm]

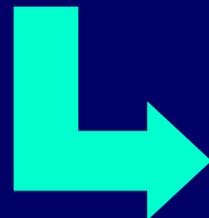
☞ U : sortie du régulateur pneumatique

- ✓ [0,2-1bar]; valeur nominale (0,6 bar)

Bloc diagrammes

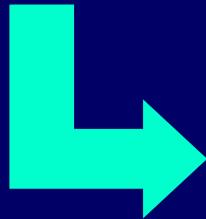
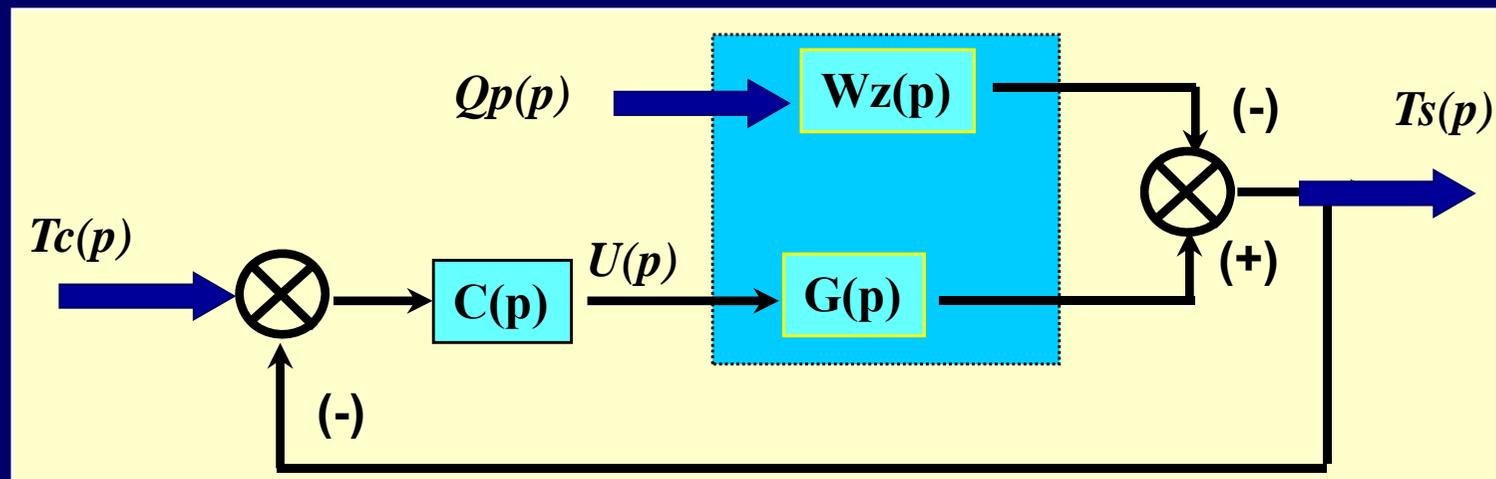
1. En boucle ouverte (sans correction) :




$$Ts(p) = U(p).G(p) - Qp(p).Wz(p)$$

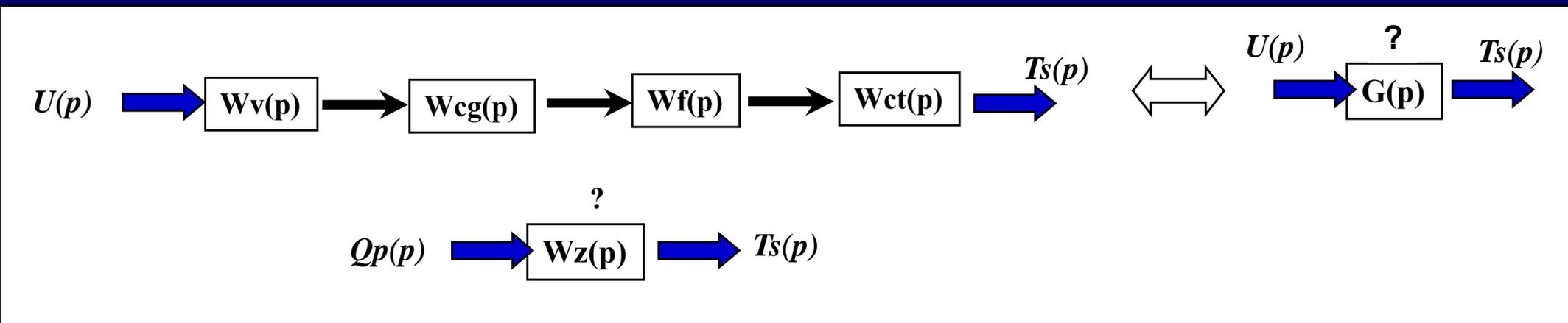
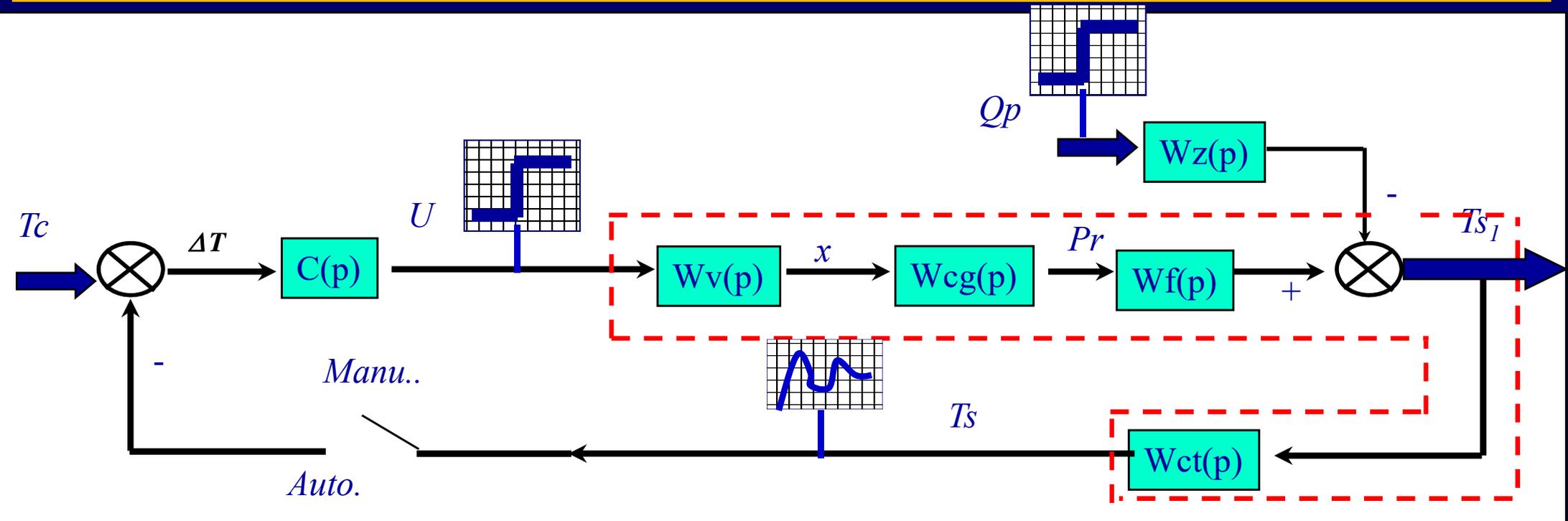
Bloc diagrammes

2. En boucle fermée (avec correction)



$$Ts(p) = Tc(p) \cdot \frac{C(p) \cdot G(p)}{1 + C(p) \cdot G(p)} - Qp(p) \frac{Wz(p)}{1 + C(p) \cdot G(p)}$$

Logistique



Préparation

Méthodologie

- ✓ 1. Correcteur mis en fonctionnement manuel, système stabilisé

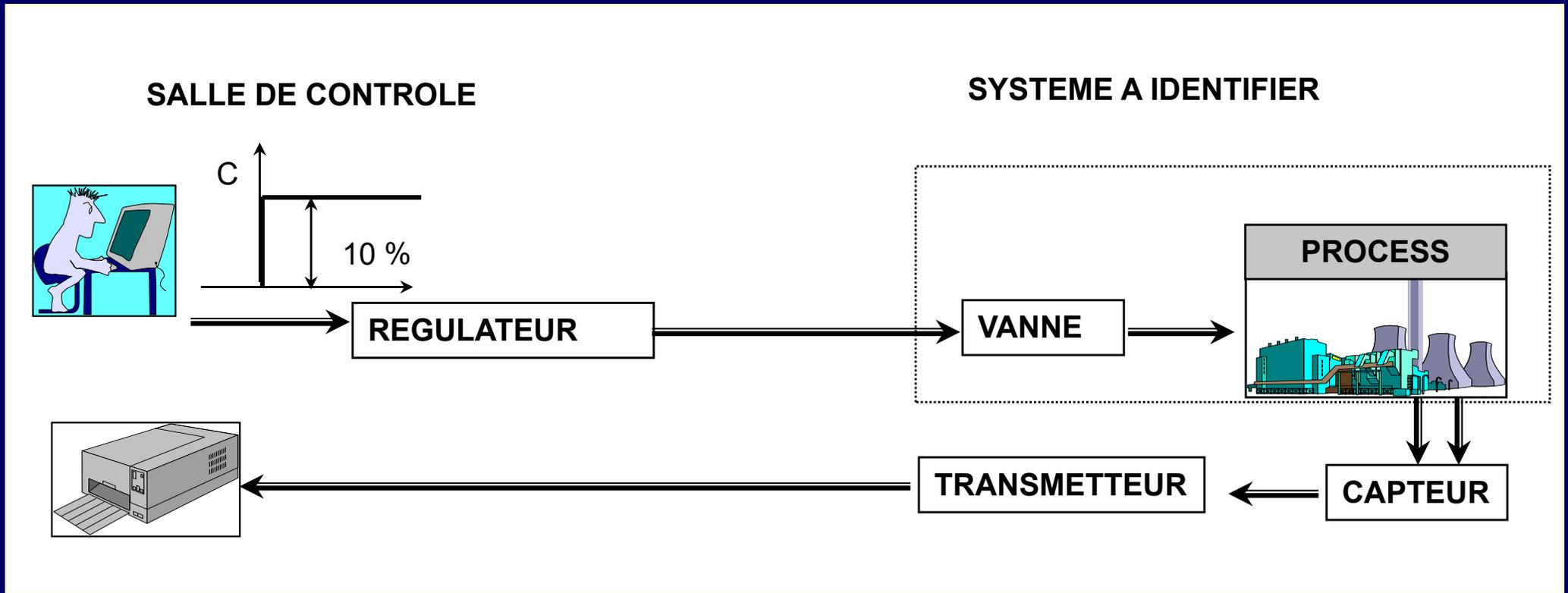
- ✓ 2. On applique un signal en échelon de + ou - 10% de la valeur nominale

- ✓ Réponse enregistrée à la sortie du transmetteur

- ✓ Le modèle de conduite (ou la fonction de transfert) à déterminer du traitement de la réponse graphique décrit l'ensemble des systèmes (vanne, objet, capteur, transmetteur)

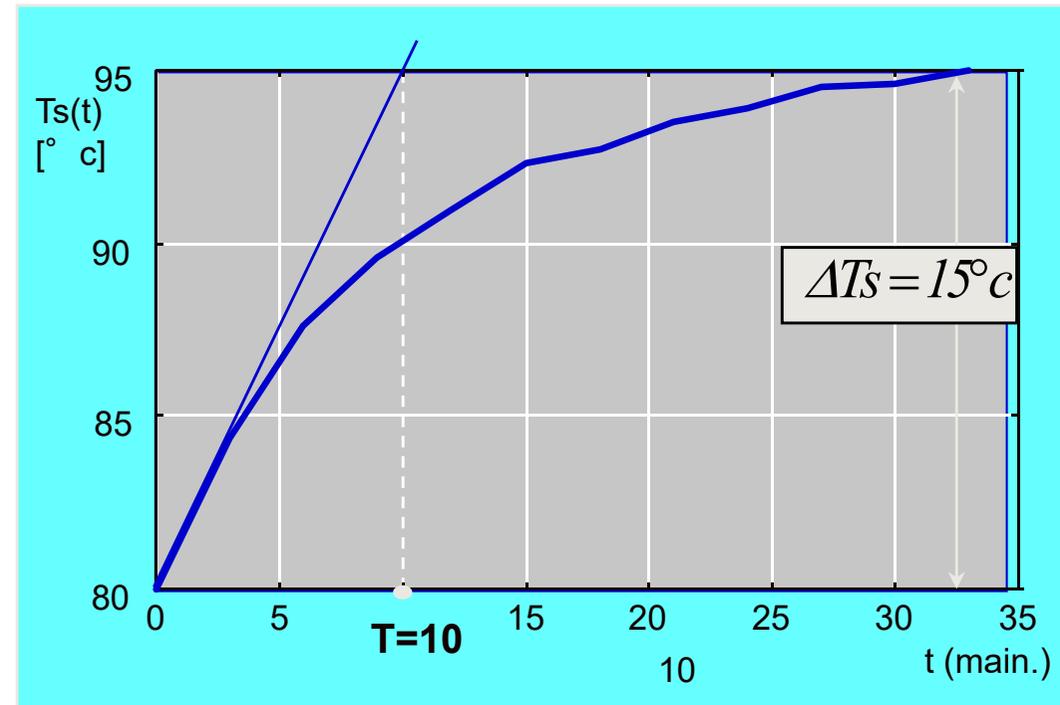
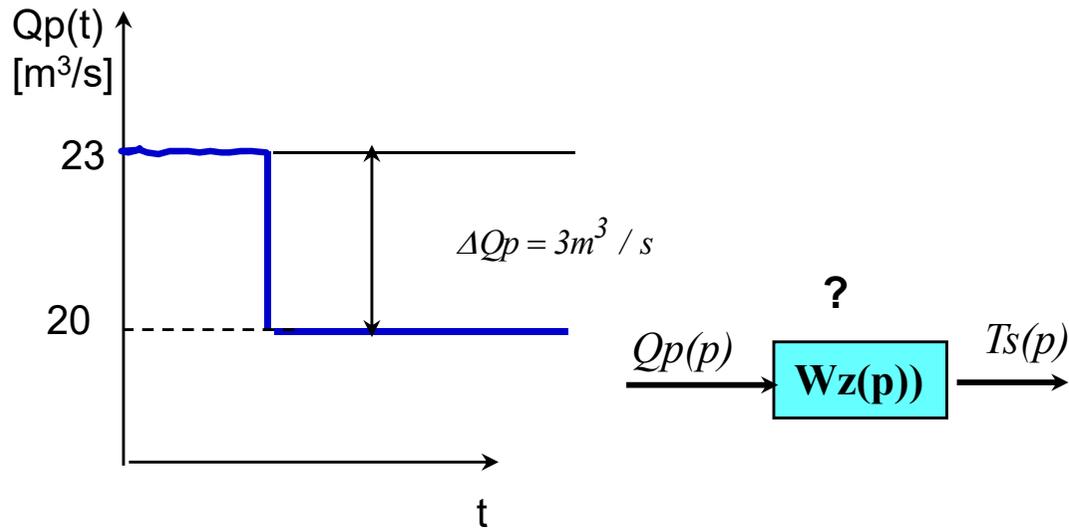
Expérimentation

👉 Vue global



Identification de la fonction de transfert par rapport à la perturbation

👉 Identification de $Wz(p)$: Expérimentation



Identification de la fonction de transfert par rapport à la perturbation

1. Étape qualitative : structure du modèle

$$Wz(p) = \frac{K}{1+TP}$$

2. Etape quantitative : calcul des paramètres du modèle

$$K = \frac{\Delta Ts}{\Delta Qp} = \frac{15^{\circ}c}{3m^3/s} = 5 [^{\circ}c/m^3/s]$$

$T = 10\text{min}$



$$Wz(p) = \frac{5(^{\circ}c/m^3/s)}{1+10p}$$

gain relatif

$$K = \frac{\frac{\Delta Ts}{\Delta Qp_{\max}}}{\frac{\Delta Qp}{\Delta Qp_{\max}}} = \frac{\frac{15}{170-20}}{\frac{3}{30-10}} = 0,66$$



$$Wz(p) = \frac{0,66}{1+10p}$$

3. Vérification du modèle

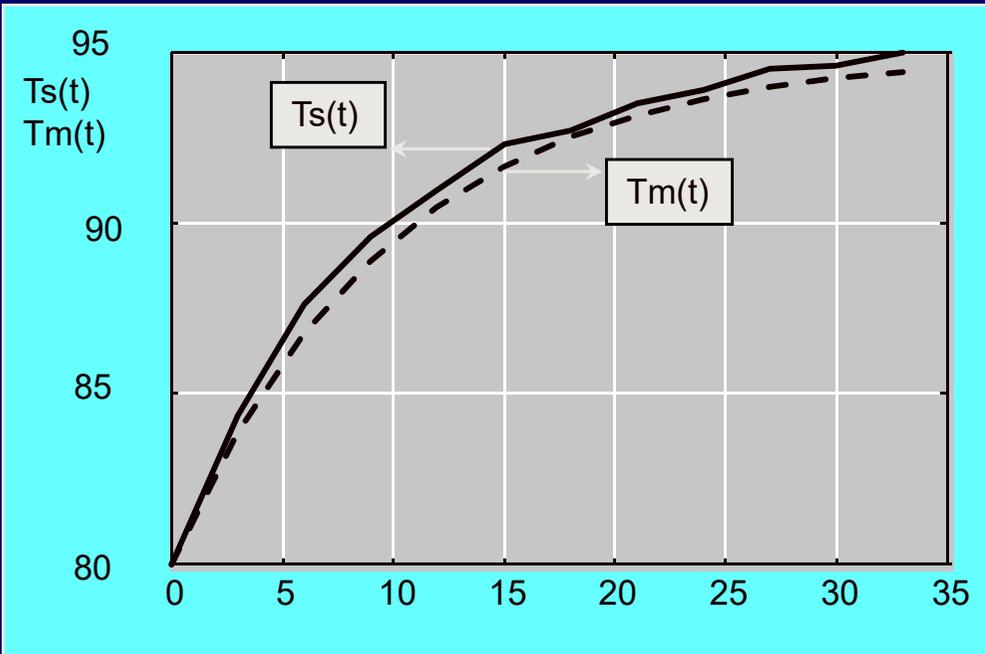
$$Tm(t) = L^{-1} \left\{ \frac{0,15}{p} \cdot \frac{0,66}{10p+1} \right\} = 0,15 * 0,66 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}} \right) [-]$$

$$Tm(t) = 0,15 * 0,66 * 150^{\circ}c \left(1 - e^{-\frac{t}{10}} \right) + 80^{\circ}c [^{\circ}c]$$

Sortie du modèle

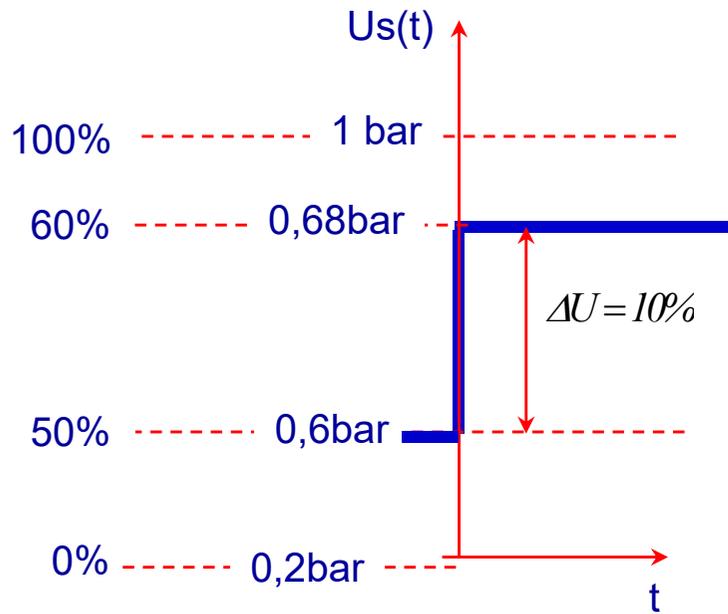
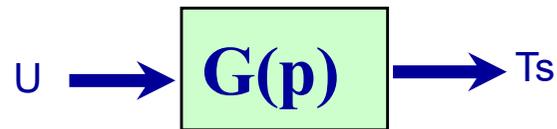
Vérification

t [min]	Ts(t) °c	Tm(t) °c	abs(Tm-Ts)
0	80	80	0
3	84,35	83,89	0,46
6	87,60	86,77	0,83
9	89,60	88,90	0,7
12	90,95	90,48	0,47
15	92,30	91,65	0,65
18	92,70	92,52	0,18
21	93,5	93,16	0,35
24	93,88	93,63	0,25
27	94,5	93,99	0,51
30	94,6	94,25	0,35
33	95,00	94,44	0,56

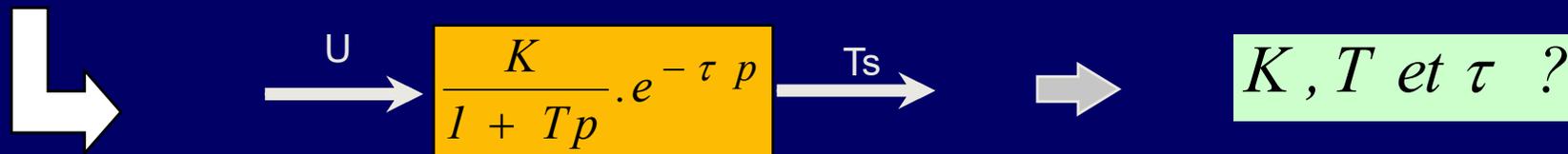
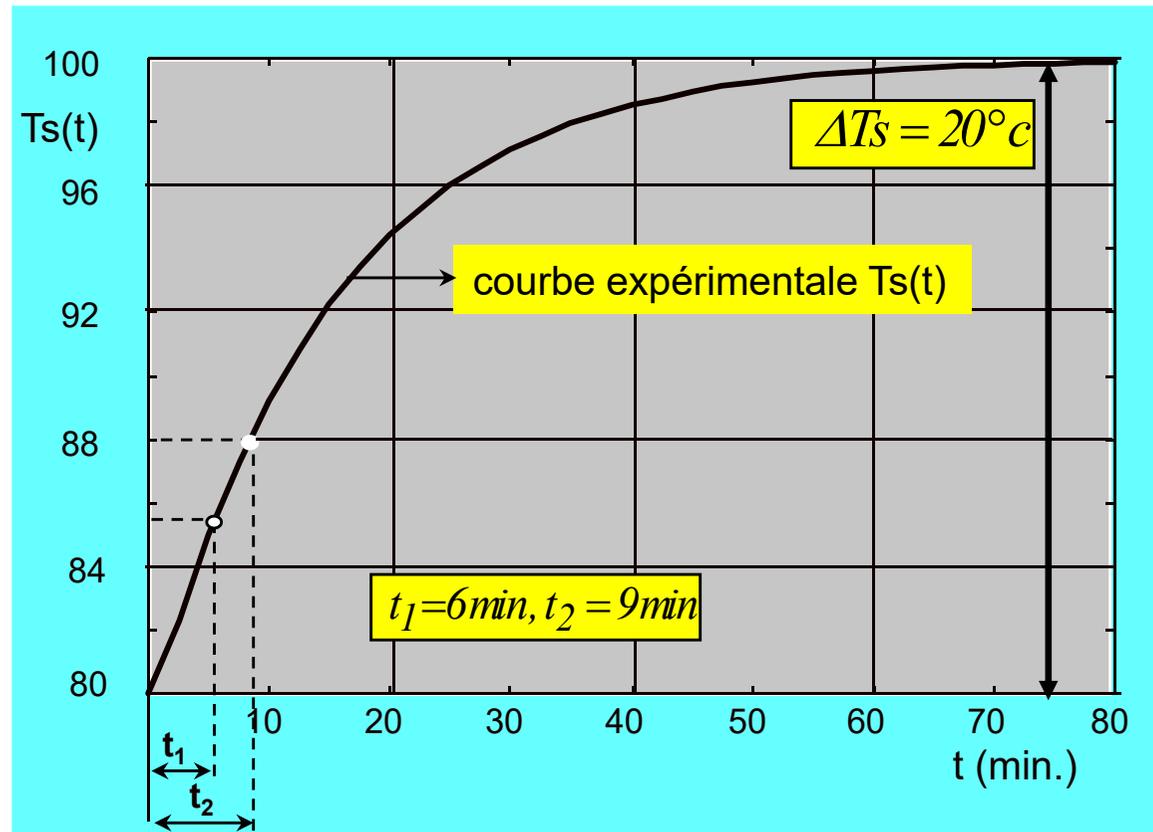


$$E_{max} = 0.83 / 15 = 5.53\%$$

Méthode de Broïda : Identification de la dynamique du four



$t_1 \rightarrow 28\% \text{ de } \Delta t_s$
 $t_2 \rightarrow 40\% \text{ de } \Delta t_s$



Principe de la méthode Broïda

👉 principe

- ✓ La méthode de Broïda est une méthode d'identification en boucle ouverte d'une réponse indicielle expérimentale qui consiste à assimiler la fonction de transfert d'un système d'ordre n à celle du premier ordre affectée d'un retard pur

$$\frac{K}{1 + Tp} \cdot e^{-\tau p}$$

👉 Le problème d'identification :

- ✓ déterminer les paramètres suivants T , Constante du temps (sec.), :
Temps de retard pur (sec.) :

Calcul des paramètres du modèle de Broïda

👉 Méthodologie

- ✓ Broïda fait correspondre la réponse indicielle à identifier et la fonction de transfert du 1er ordre affectée d'un retard en deux points t_1 et t_2 d'ordonnées correspondant à 28% et 40% de la valeur finale de la sortie du système.

$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{(t_1 - \tau)}{T}} = 0,28 \\ 1 - e^{-\frac{(t_2 - \tau)}{T}} = 0,40 \end{cases}$$



$$\tau = 2,8t_1 - 1,8t_2$$

$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} = 0,28 \\ 1 - e^{-\frac{t_2}{T}} = 0,40 \end{cases}$$



$$T = 5,5(t_2 - t_1)$$

Calcul des paramètres du modèle

👉 Paramètre du modèle

$$\tau = 2,8t_1 - 1,8t_2, T = 5,5 \cdot (t_2 - t_1), K = \frac{\Delta y_s}{\Delta x_e}$$



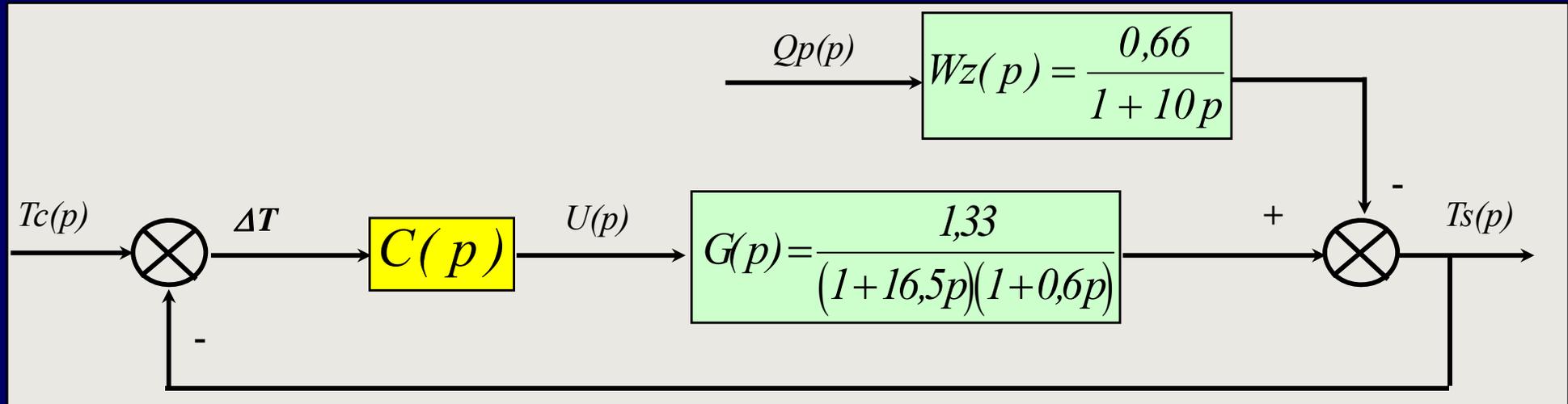
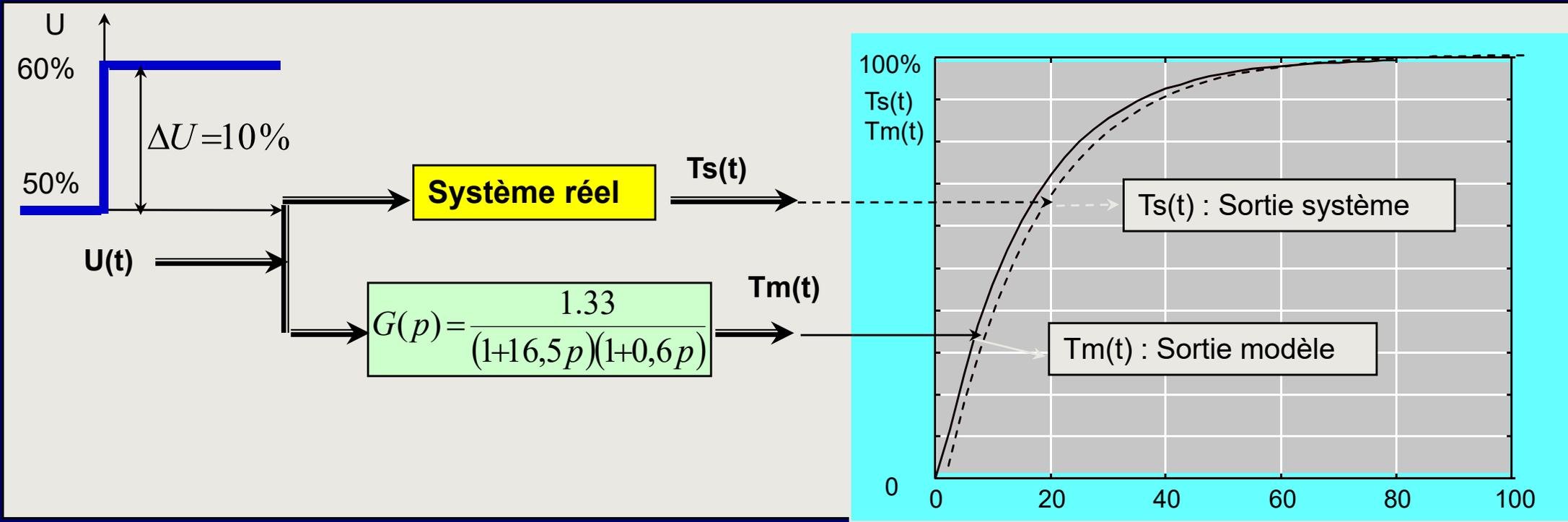
$$\tau = 2,8 * 6 - 1,8 * 9 = 0,6 \text{ min}, T = 5,5 \cdot (9 - 6) = 16,5 \text{ min}$$

$$K = \frac{\frac{\Delta T_s}{\Delta U \text{ max}}}{\frac{\Delta U}{1 - 0,2}} = \frac{\frac{20}{170 - 20}}{0,08} = \frac{13,3\%}{10\%} = 1,33$$

👉 Modèle final

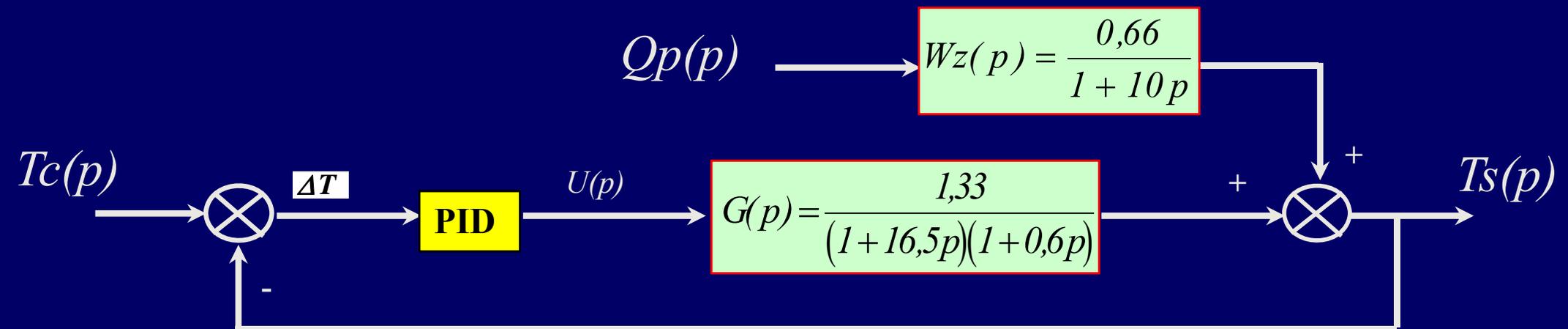
$$G(p) = \frac{1,33}{1 + 16,5p} e^{-0,6p} \cong \frac{1,33}{(1 + 16,5p)(1 + 0,6p)}$$

Modèle du système global à commander



Synthèse du système de régulation continue

👉 Schéma fonctionnel du système à réguler



METHODE DE STREJC

👉 Principe

- ✓ La méthode d'identification de STREJC est basée sur les propriétés géométriques de la réponse indicielle d'un système d'ordre n de fonction de transfert

$$W(p) = \frac{K}{(1+Tp)^n} e^{-\tau p}$$

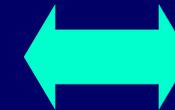
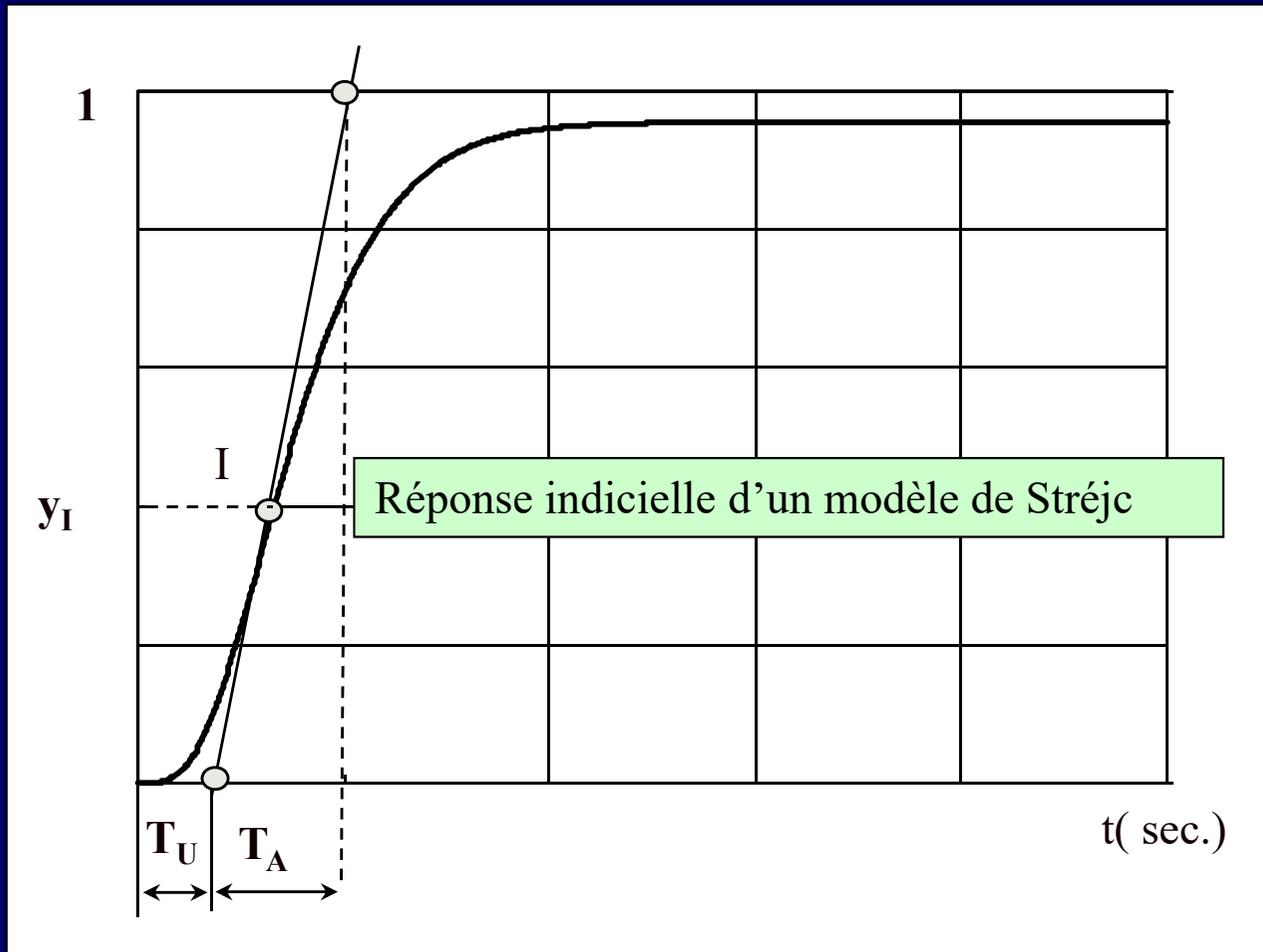
- ✓ Paramètres à identifier

K, T, n et τ

METHODE DE STREJC

👉 Méthodologie

✓ En se basant sur la réponse indicielle, on établit :



$$\frac{T_u}{T_A} = F_1(n)$$

$$\frac{T_u}{T} = F_2(n)$$

$$\frac{T_A}{T} = F_3(n)$$

$$Y_I = F_3(n)$$

METHODE DE STREJC

Tableau de Strejc

n	$\frac{T_U}{T_A}$	$\frac{T_U}{T}$	$\frac{T_A}{T}$	Y _i
1	0	0	1	0
2	0,104	0,282	2,718	0,264
3	0,218	0,805	3,695	0,323
4	0,319	1,425	4,465	0,353
5	0,410	2,100	5,119	0,371
6	0,493	2,811	5,699	0,384
7	0,570	3,549	6,226	0,394
8	0,642	4,307	6,711	0,401
9	0,709	5,081	7,164	0,407
10	0,773	5,869	7,590	0,413

Paramètres du modèle de STREJC

➡ A. Détermination de K

- ✓ Le coefficient de proportionnalité K est déterminé des conditions d'expériences comme le rapport de l'amplitude du signal de sortie à celui d'entrée .

$$K = \frac{\Delta Y_S(\infty)}{\Delta X}$$

➡ B. Détermination de n

- ✓ On trace le mieux possible la tangente au point d'inflexion de la réponse indicielle
- ✓ La tangente découpe un segment T_A sur l'axe des temps au bout d'un certain temps T_U (comportant un temps de retard inconnu). On calcule le rapport T_U / T_A et
- ✓ on choisira du tableau, la valeur de T_U / T_A qui correspond à une valeur de n entier , immédiatement inférieure. A titre d'exemple, si $T_U=3S$, $T_A=11$, alors $T_U / T_A = 3/11=0,27$; La valeur de n entier la plus proche inférieure sera égale à $n=3$.

Paramètres du modèle de STREJC

☞ C. Détermination de la constante de temps T

- ✓ Connaissant la valeur de n , T_A (ou T_U), on détermine la constante du temps T à l'aide de l'une des deux dernières colonnes du tableau.
- ✓ Dans notre cas, pour $n=3$, $T_A / T = 3,695$ alors $T = T_A / 3,695 = 3,2\text{sec.}$

☞ D. Détermination du temps de retard fictif τ

- ✓ Afin de compenser l'erreur due à la détermination du point d'inflexion, on introduit un retard fictif $\tau = T_{UR} - T_{UT}$

☞ T_{UT} : déterminée du tableau de Stréjc . T_{UR} : Valeur réelle de la grandeur T_U fixée sur la réponse indicielle .

- ✓ Dans l'exemple $T_{UR} = 3\text{sec.}$, alors $T_{UT} / T_A = 0,218$ (pour $n=3$) d'où $T_{UT} = 0,218 * T_A = 0,218 * 11 = 2,4\text{sec.}$
- ✓ Alors $\tau = 3 - 2,4 = 0,6\text{s}$

☞ Si τ est < 0 alors on fixe $\tau = 0$

Commentaire sur la méthode de Strejc

👉 Quand appliquer un modèle de Strejc?

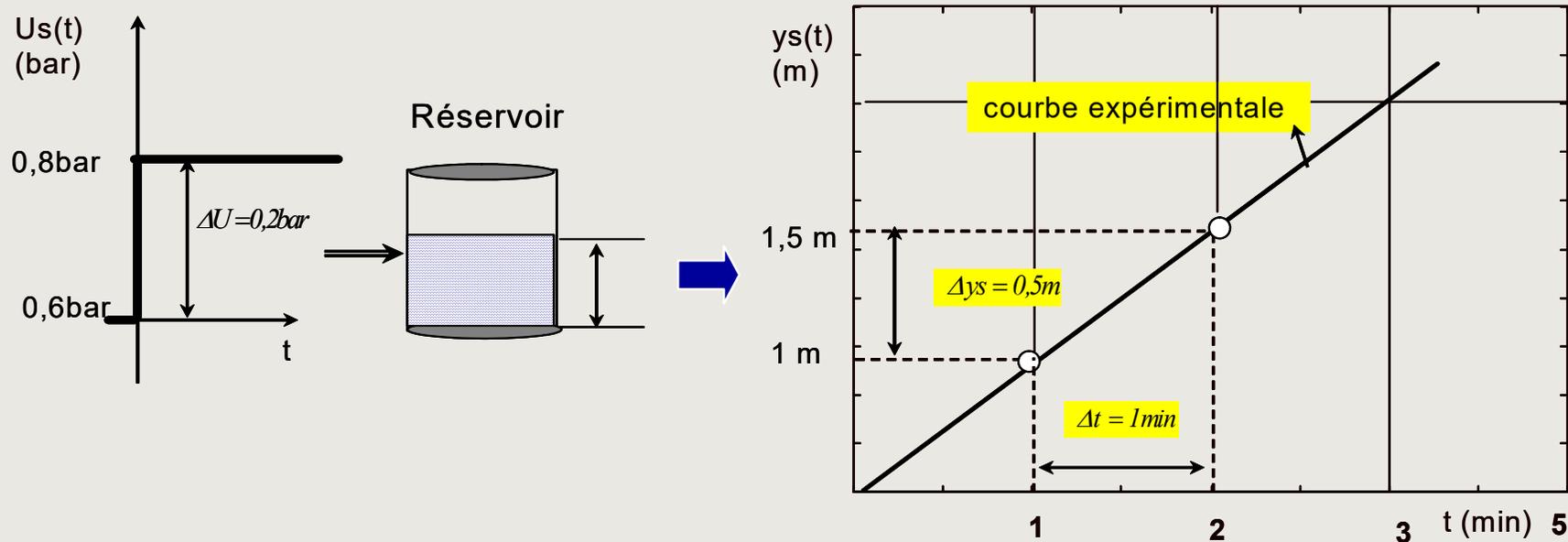
- ✓ Des réponses indicielles avec une forme de « S »
- ✓ Des éléments de 1^{er} ordre en série

👉 Difficultés d'application

- ✓ La détermination du point d'inflexion

IDENTIFICATION DES SYSTÈMES INSTABLES

☞ Intégrateur pur : Identifions le niveau d'un réservoir



$$W(p) = \frac{Ys(p)}{U(p)} = \frac{K}{p}$$

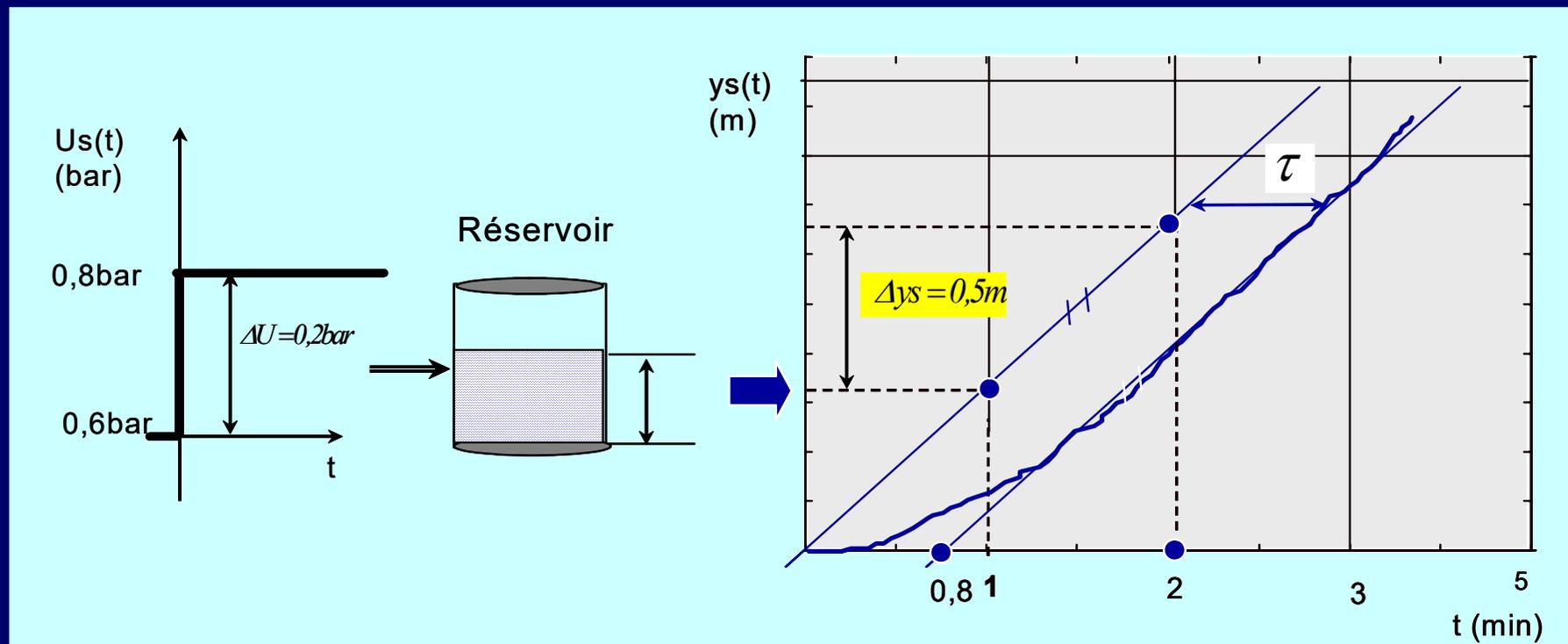
$$k = \frac{\Delta ys}{\Delta u} = \frac{(1,5-1)m/\text{min}}{(0,8-0,6)} = 2,5 \cdot \left[\frac{m}{\text{minbar}} \right]$$

$$W(p) = \frac{2,5}{p}$$

Intégrateur d'ordre n

Remarque

La méthode qu'on va développer est simpliste, il existe d'autre plus précise



Intégrateur d'ordre n

👉 A. Structure du modèle

$$W(p) = \frac{Ys(p)}{U(p)} = \frac{K}{p} e^{-\tau p}$$

👉 B. Paramètres du modèle :

- ✓ Le gain K exprime le rapport entre la variation du signal d'entrée et la variation du signal de sortie par unité de temps

$$k = \frac{\Delta y_s}{\Delta u} = \frac{(1,5 - 1) \text{ m/min.}}{(0,8 - 0,6)} = 2,5 \cdot \left[\frac{\text{m}}{\text{min.bar}} \right], \quad \tau = 0,8 \text{ min}$$



$$W(p) = \frac{2,5}{p} e^{-0,8 p} \cong \frac{2,5}{p(1 + 0,8 p)}$$

IDENTIFICATION DES SYSTEMES APERIODIQUES A DEPHASAGE NON MINIMALE

Définition

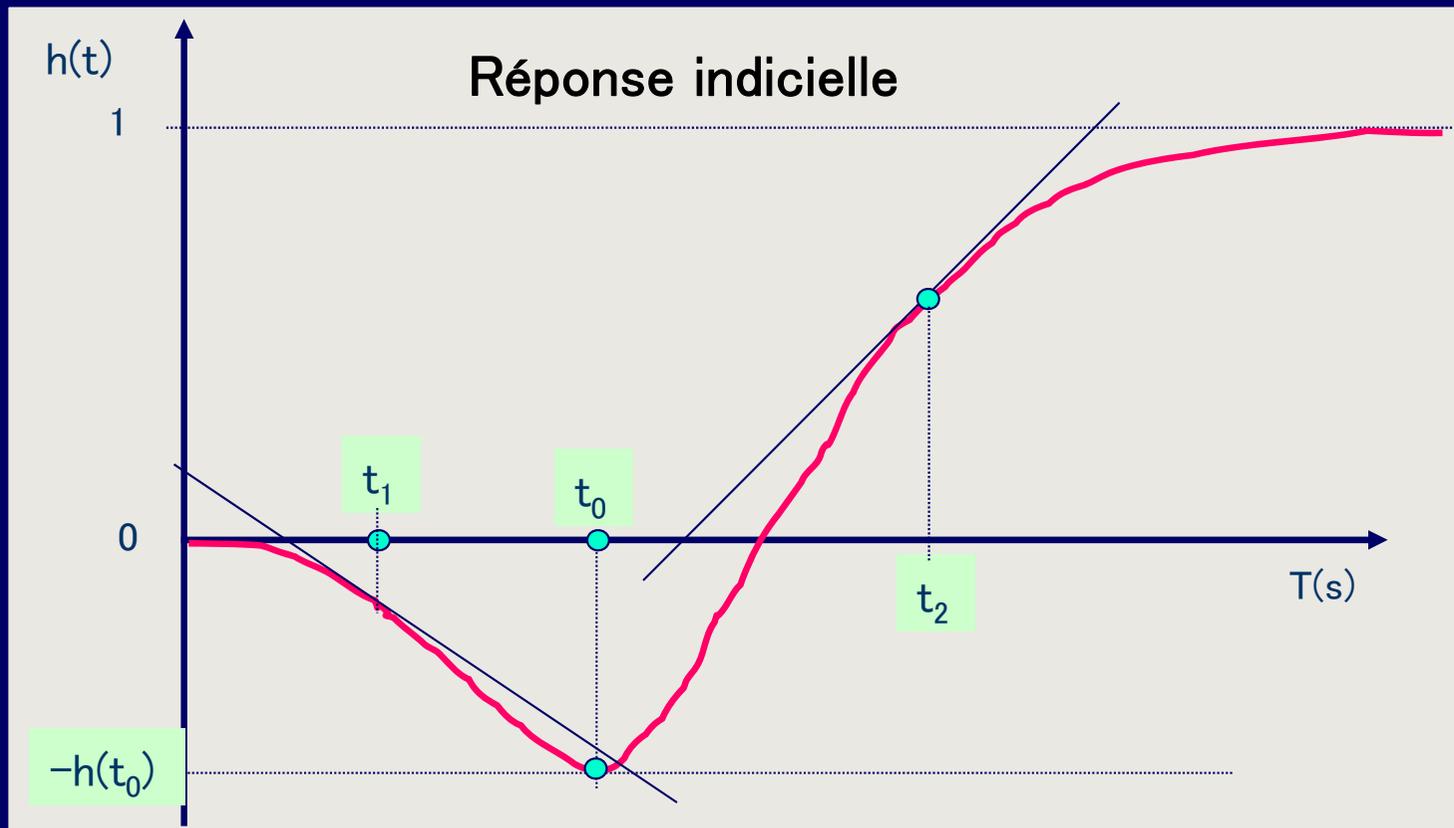
Exemple de tels systèmes physiques et Problématique

$$W(p) = K \frac{1-ap}{(1+Tp)^n}$$



K, a, T, n ?

$$K = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$



Paramètres de la RI

- ✓ $t_0, h(t_0)$
- ✓ t_1, t_0

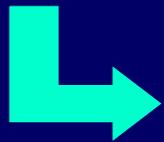
Paramètres du modèle

- ✓ K, a, T, n

Calcul des paramètres du modèle

👉 Réponse indicielle unitaire K=1

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p(1+Tp)^n}\right) - aL^{-1}\left(\frac{1}{(1+Tp)^n}\right) = y_1(t) + y_2(t)$$



$$y_1(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p(1+Tp)^n}\right) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

$$y_2(t) = aL^{-1}\left(\frac{1}{(1+Tp)^n}\right) = -\frac{a}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{(n-1)!}\right) e^{-\frac{t}{T}}$$

👉 1. Détermination de t_0 : $dh(t)/dt = 0$

$$\frac{dh(t)}{dt} = 0$$



$$\frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T(n-1)!} \left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} \left[\frac{tT - a(n-1)T + aT}{tT} \right] = 0$$



$$t_0 = \frac{a(n-1)T}{a+T}$$

Calcul des paramètres du modèle

2. détermination de t_1 et t_2

✓ points d'inflexion : $h''(t_1) = h''(t_2) = 0$

$$\rightarrow \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T^3 (n-1)!} \left(\frac{t}{T}\right)^{n-2} [A]$$

$$A = -t^2(a+T) + t(n-1)(T^2 + 2aT) - aT^2(n-1)(n-2)$$

→ 2 solutions : t_1 et t_2

✓ La somme de ces deux solutions donne :

$$\rightarrow t_1 + t_2 = \frac{(n-1)(T^2 + 2aT)}{T + a}$$

✓ En tenant compte de l'expression de t_0

$$\frac{t_1 + t_2}{t_0} = 2 + \frac{T}{a}$$

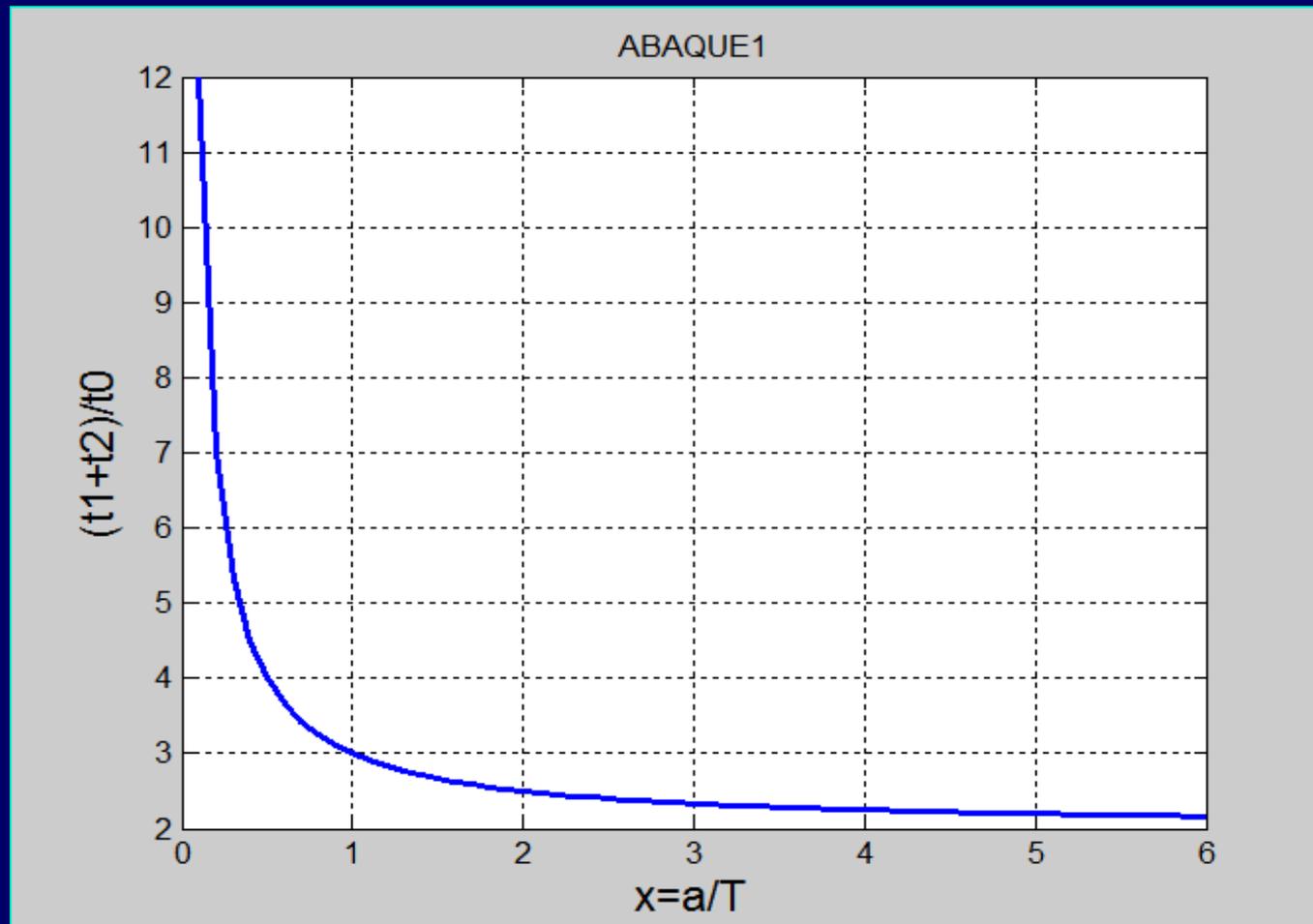
En posant $x = a/T$

$$\frac{t_1 + t_2}{t_0} = 2 + \frac{1}{x}$$

Calcul des paramètres du modèle

👉 Abaque 1 :

$$\frac{t_1 + t_2}{t_0} = 2 + \frac{1}{x}$$



Calcul des paramètres du modèle

👉 **Abaque 2** : $h(t_0)$ est une fonction de x et n :

$$h(t_0) = F(x, n)$$

✓ *En mettant dans $h(t)$ l'expression de t_0*

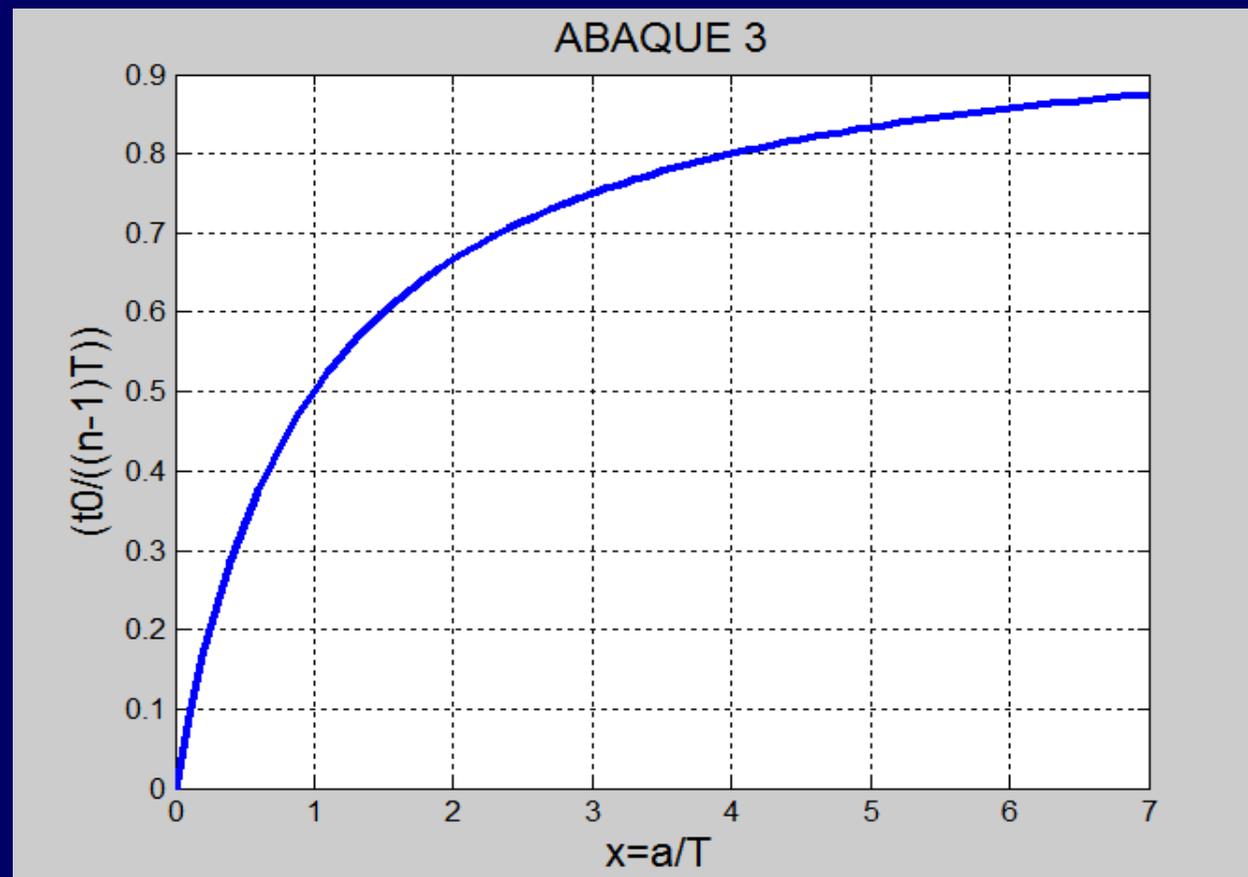
$$-h(t_0) = -1 + e^{\frac{-x(n-1)}{1+x}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{x(n-1)}{1+x} \right)^{i-1} + \frac{x}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{x(n-1)}{1+x} \right)^{n-1} \right]$$

Calcul des paramètres du modèle

👉 Abaque 3 :

✓ De l'expression de t_0 en mettant $a=T/x$

$$\frac{t_0}{(n-1)T} = \frac{x}{1+x} = f(x)$$



Calcul des paramètres du modèle

➡ 1. Calcul de x de l'abaque 1

✓ Des valeurs t_0 , t_1 et t_2 relevées de la courbe expérimentale on détermine $x=a/T$ abaque 1

➡ 2. Calcul de n : ordre du système : abaque 2

✓ Connaissant x et $-h(t_0)$ (de la courbe) on détermine n de l'abaque 2

➡ 3. Calcul de T : abaque 3

✓ A partir de x on tire $t_0/((n-1)T) = C$

✓ Alors $T = t_0/((n-1).C)$

➡ 4. Calcul de a

✓ $a=xT$

SYTEME A DEPHASAGE NON MINIMALE D' ORDRE 2

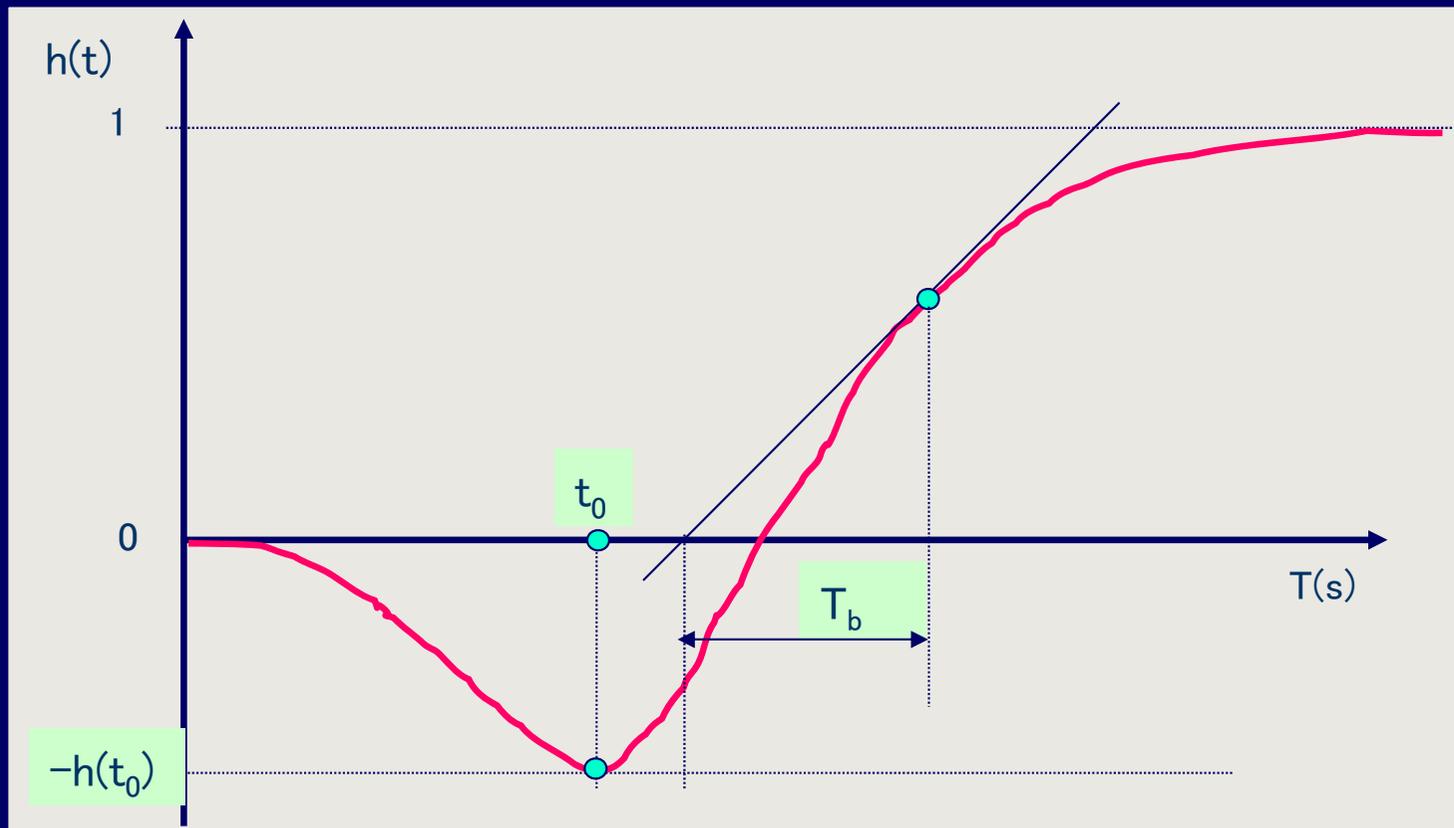
Principe

👉 Structure du modèle

$$W(p) = \left(K \frac{1 - ap}{(1 + Tp)^2} \right)$$



K, a, T ?



👉 Paramètres de la RI

- ✓ $t_0, h(t_0)$
- ✓ t_b, t_0

👉 Paramètres du modèle

- ✓ K, a, T

$$K = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$

Paramètres du modèle

☞ T_b : Projection de la tg au point d'inflexion sur l'axe t

☞ Abaque 4 :

✓ Il existe une relation :
$$\frac{T_b}{T} = F\left(\frac{a}{T}\right) = F(x)$$

☞ Détermination de $x=a/T$

✓ De l'abaque 2, on détermine x (pour n=2, et $-h(t_0)$)

☞ Calcul de T

✓ De l'abaque 4 : on détermine T_b/T pour x (soit $T_b/T=A$)

✓ T_b étant mesuré, on calcule T : $T=A/T_b$

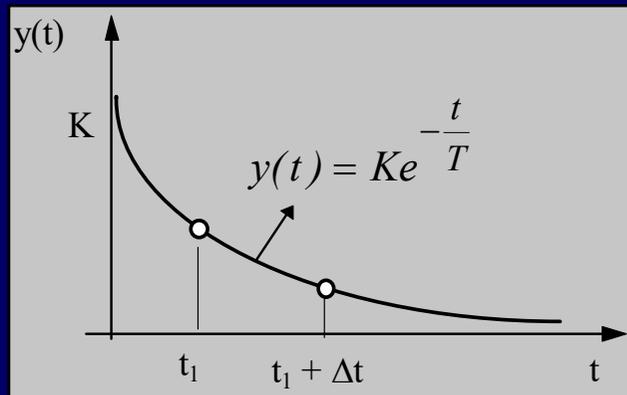
☞ Calcul de a

✓ $a=xT$

MÉTHODE DE CSYPKIN (échantillonnée)

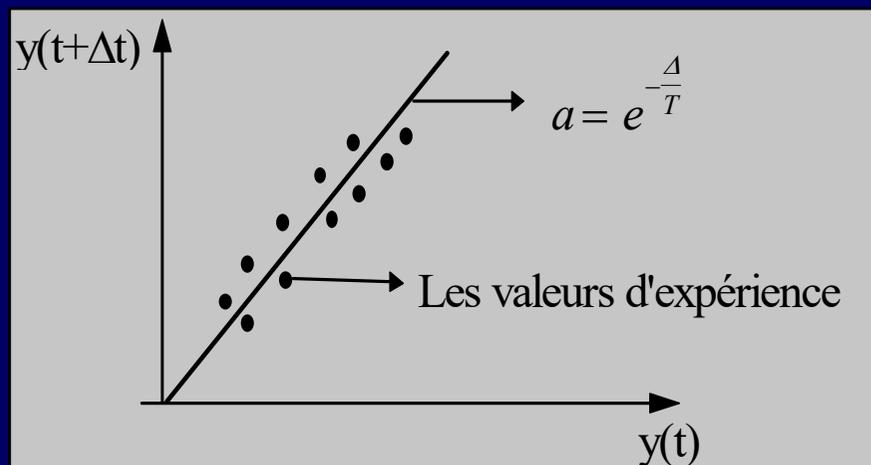
Élément du premier ordre

- ✓ Soit la réponse graphique, on doit identifier T (K est le gain statique)



$$y(t+\Delta) = Ke^{-\frac{t_1+\Delta}{T}} = e^{-\frac{\Delta}{T}} \cdot Ke^{-\frac{t_1}{T}} = a \cdot y(t)$$

- ✓ On relève par expérience les valeurs $y(t_i)$ et $y(t_i + \Delta)$, On trace la droite $y(t + \Delta) = a \cdot y(t)$



$$T = -\frac{\Delta}{\log a}$$

MÉTHODE DE CSYPKIN (échantillonnée)

Remarque

- ✓ La droite peut être déterminée par la méthode des moindres carrés pour déterminer a .
- ✓ La méthode est inefficace si le pas Δ est trop petit, on recommande de prendre $\Delta = 0,5T$

Élément du deuxième ordre apériodique

👉 Élément du deuxième ordre oscillatoire

- ✓ On examine uniquement le cas où la réponse est apériodique car, si elle oscillatoire (voir élément du 2^{ème} ordre)

👉 Principe

La réponse indicielle d'un élément apériodique est :

$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \Rightarrow K - y(t) = \lambda_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$

et impulsionnelle

$$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) = \lambda_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - \lambda_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$

Élément du deuxième ordre apériodique

Toutes les deux réponses peuvent s'écrire alors

$$s(t) = \lambda_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \lambda_2 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$

Pour la réponse impulsionnelle $\lambda_1 = \frac{K}{T_1 - T_2} = -\lambda_2$

et pour la réponse indicielle $\lambda_1 = \frac{KT_1}{T_1 - T_2}$ $\lambda_2 = \frac{KT_2}{T_1 - T_2}$

Identifier K, T₁, T₂, ?

Paramètres du modèle du deuxième ordre apériodique par la méthode Csykin

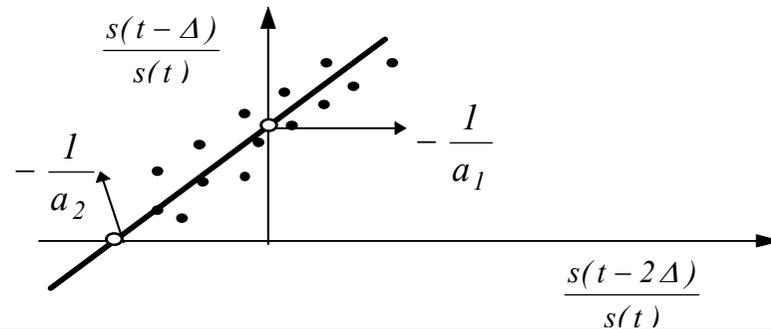
1. On relève par expérience les données $s(t)$, $s(t-\Delta)$ et $s(t-2\Delta)$; (Δ est fixé à l'avance)
2. On détermine graphiquement les coefficients a_1 et a_2 comme suit :

$$s(t) + a_1 s(t-\Delta) + a_2 s(t-2\Delta) = 0 \Rightarrow 1 + a_1 \frac{s(t-\Delta)}{s(t)} + a_2 a_1 \frac{s(t-2\Delta)}{s(t)} = 0$$

On trace dans le plan les points des coordonnées

$$\frac{s(t-\Delta)}{s(t)} \text{ et } \frac{s(t-2\Delta)}{s(t)}$$

On détermine du graphe les valeurs de $-1/a_1$ et $-1/a_2$ comme intersection avec l'axe des ordonnées et des abscisses



3. On calcule les racines de :

$$1 + a_1 e^{-\frac{\Delta}{T_1}} + a_2 \left(e^{-\frac{\Delta}{T_1}} \right)^2 = 1 + a_1 z + a_2 z^2 = 0 \quad (z = e^{-\frac{\Delta}{T_1}})$$

4. On déduit T_1 et T_2

$$\boxed{T_1 = \frac{\Delta}{\log z_1}, T_2 = \frac{\Delta}{\log z_2}}$$

Remarque : Il faut bien choisir le pas Δ sinon vous risquez d'avoir proche de 1 $s(t-\Delta)/s(t)$ et $s(t-2\Delta)/s(t)$

IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE

Inconvénients de la boucle ouverte

☞ 1. Sur le plan pratique

- ✓ Nécessité de passer le régulateur en manuel
- ✓ Perturbation intentionnel du procédé
- ✓ Dérèglement des toutes les boucles de régulation

☞ 2. Sur l eplan théorique

- ✓ L'identif. En boucle ouverte est une approximation
 - Pendant l'expérience d'autres perturbation apparaissent
 - Les calculs des régulateur se fait en régime critique ($\arg(wou(j\omega)) = -\pi$) donc il faut être précis en haute fréquence en identif.

AVANTAGE DE IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMEE

☞ Intérêt de la méthode

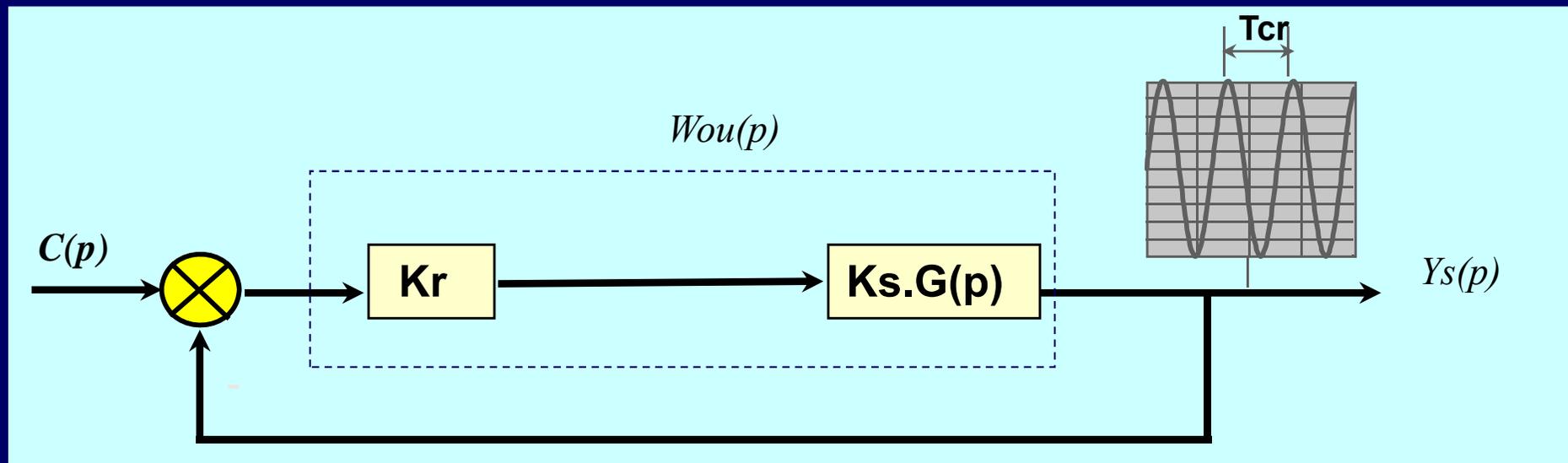
- ✓ sans débrancher le régulateur
- ✓ Fonctionnement « naturel » du SRA

☞ Conditions d'application

- ✓ S'applique pour les systèmes d'ordre supérieur à 2
- ✓ Système stable
- ✓ Analyse fréquentielle

PRINCIPE

👉 Système de régulation en BF



👉 On amène le système en pompage

en boucle ouverte :

$$Wou(p) = K_r \cdot K_s \cdot G(p)$$

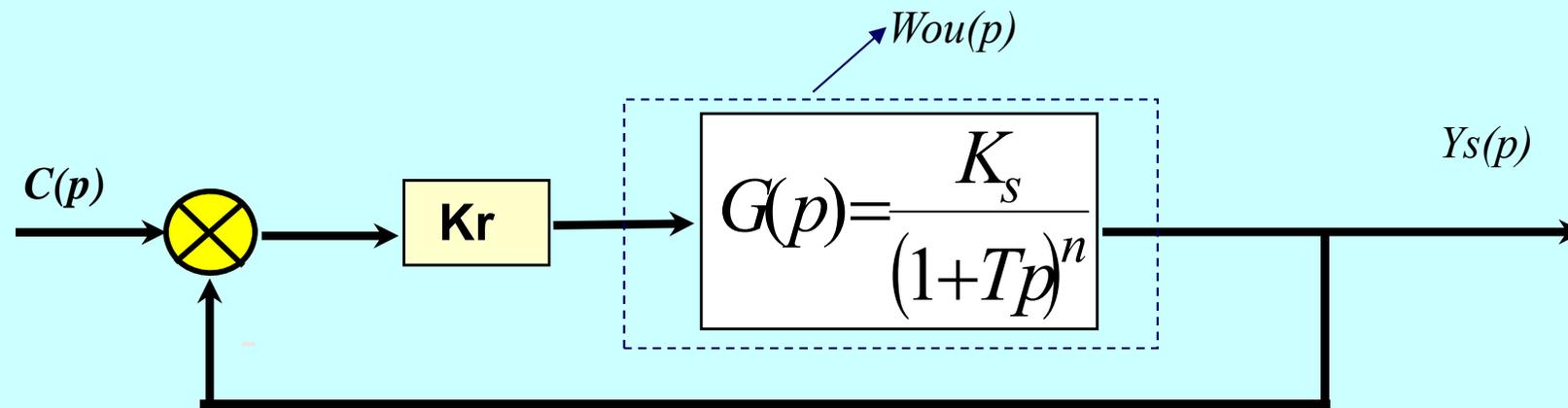
En augmentant K_r jusqu'à K_{cr}

En pompage

$$\begin{cases} K_{cr} \cdot K_s \cdot |G(j\omega_{cr})| = 1 \\ \arg(G(j\omega_{cr})) = -\pi \end{cases}$$

Identification du modèle de Strejc en BF (1/5)

👉 Principe



Identification du modèle de Strejc en BF (2/5)

- ☞ La stabilité du système dépend du polynôme caractéristique
- ✓ On augmente graduellement le gain K_r jusqu'à pompage

$$D'(p) = 1 + \frac{K_r \cdot K_s}{(1+Tp)^n} \equiv 1+Z(p)$$

En régime de pompage

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ou}(\omega_{cr}) = 1 = \frac{K_{cr} \cdot K_s}{\left(\sqrt{1+T^2 \omega_{cr}^2}\right)^n} \\ \varphi_{ou}(\omega_{cr}) = -\pi = -n \arctg(T \omega_{cr}) \end{array} \right.$$

☞ Paramètres en régime de pompage

- ✓ $K_{cr} K_s$: Gain provoquant le pompage
- ✓ ω_{cr} : fréquence au régime de pompage

Identification du modèle de Strejc en BF (3/5)

👉 Calcul des coefficients du modèle en boucle fermée

- ✓ **T_{cr}** : la période de pompage qu'on relève de la sortie en régime d'auto oscillation

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} \Rightarrow \omega_{cr} = \frac{2\pi}{T_{cr}}$$

- ✓ La solution du système d'équations sera :

$$\begin{cases} A_{ou}(\omega) = 1 = \frac{Kr.Ko}{\left(\sqrt{1+T^2\omega_{cr}^2}\right)^n} \\ \varphi_{ou}(\omega) = -\pi = -n \arctg(T\omega_{cr}) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} T &= \frac{T_{cr}}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\omega_{cr}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \\ K &= \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right)} \right)^n = \frac{1}{\left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n} \end{aligned}$$

Identification du modèle de Strejc en BF (4/5)

- ✓ En exprimant π en degré, l'expression de K nous permet de calculer n en fonction de K (gain critique total en boucle ouverte $K=K_o.K_{cr}$)

K	n	K	n	K	n	K	n
232	2,1	9,02	2,9	2,89	15	1,69	9,5
72	2,2	8	3	2,58	5,5	1,60	10
38	2,3	6,55	3,2	2,37	6	1,51	12
25	2,4	5,59	3,4	2,20	6,5	1,42	14
18,83	2,5	4,90	3,6	2,07	7	1,36	16
14,81	2,6	4,39	3,8	1,88	8	1,31	18
12,19	2,7	4	4	1,81	8,5	1,28	20
10,36	2,8	3,31	3	1,75	9	1,05	100

Identification du modèle de Strejc en BF (5/5)

👉 Méthodologie pratique

- ✓ On augmente le gain **K** du régulateur jusqu'à apparition de pompage, on fixe ce gain K_{cr}
- ✓ 2. On mesure la période de l'auto oscillation T_{cr} et on calcule
$$K = K_{cr} \cdot K_s$$
- ✓ 3. On déduit n du tableau et T_{cr} par la valeur mesuré
- ✓ 4. On calcule T par la formule ci dessous

$$T = \frac{T_{cr}}{2\pi} \cdot \text{tg} \frac{\pi}{n}$$

Calcul du gain du système K_s (1/7)

👉 1. Calcul par l'erreur statique

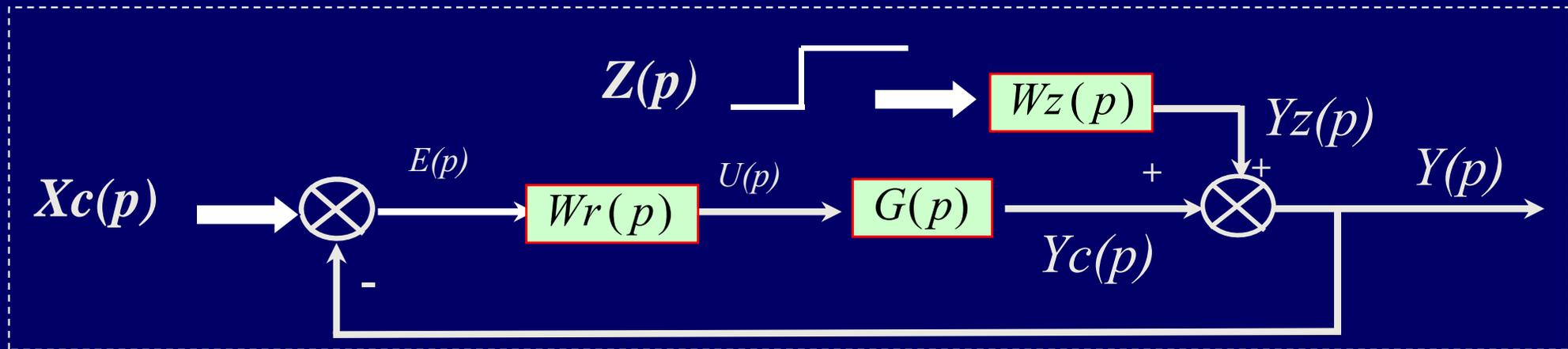
1. On applique une consigne d'échelon x_0 faible pour ne pas trop perturber le système
2. On fixe le gain du correcteur qui est affiché K_{ro}
3. On attend que le système se stabilise et on mesure l'erreur statique soit E_o
4. On calcule le gain du système comme suit

$$E_o = \frac{x_0}{1+K_{ro}.K_s} \Rightarrow K_s = \frac{x_0-E_o}{K_{ro}.E_o}$$

Calcul du gain du système K_s (2/7)

2. Méthode de la perturbation constante

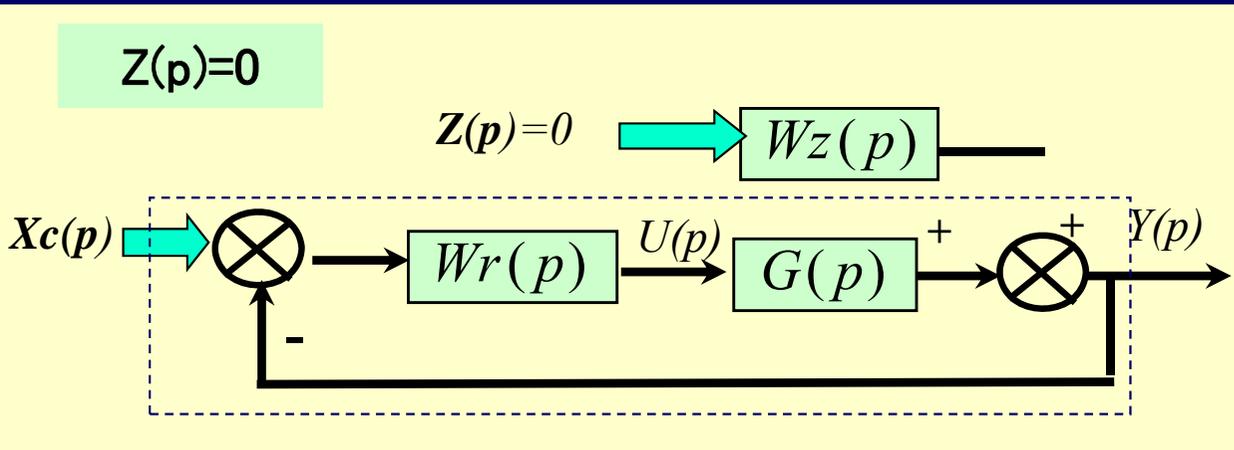
1. Si, pour des raisons technologiques on ne peut pas changer de consigne, on peut utiliser la méthode de la perturbation constante pour trouver k_s .



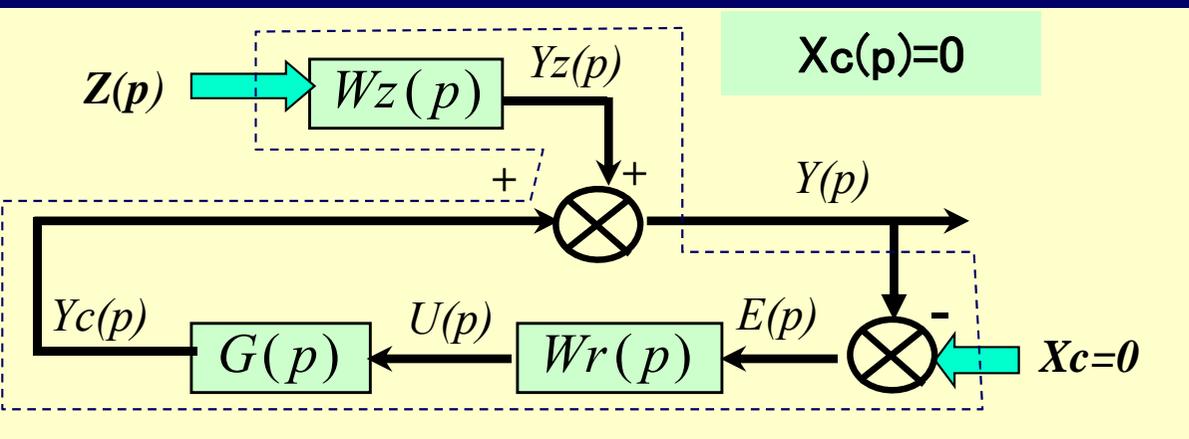
Principe de superposition :
$$Y(p) = Z(p).W_z(p). \frac{1}{1 + W_r(p).G(p)} + X_c(p) \frac{W_r(p).G(p)}{1 + W_r(p).G(p)}$$

Calcul du gain du système Ks (3/7)

👉 Principe de superposition $Y(p) = Wz(p).Z(p) + Wxc(p).Xc(p)$



$$Yc(p) = Xc(p) \frac{Wr(p).G(p)}{1 + Wr(p).G(p)}$$

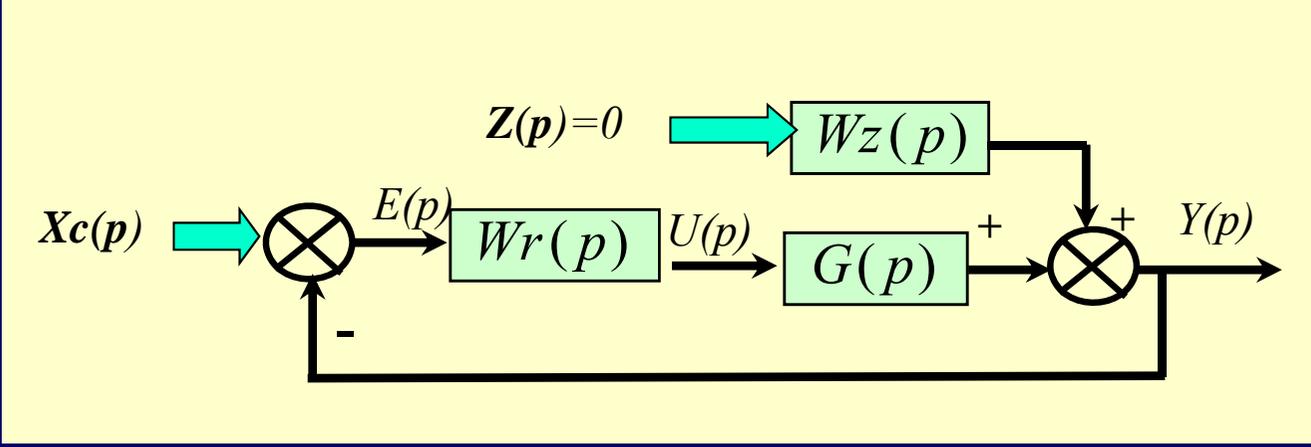


$$Yz(p) = Z(p).Wz(p). \frac{1}{1 + Wr(p).G(p)}$$

$$Y(p) = Yz(p) + Yc(p)$$

Calcul du gain du système Ks (4/7)

👉 On se met en régulation PI et système stable

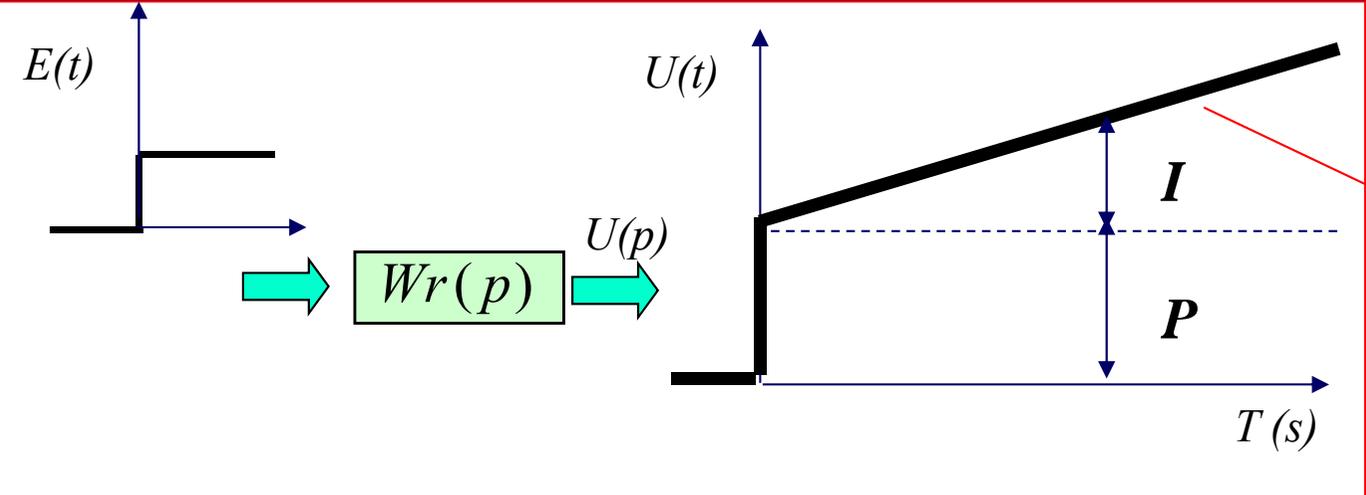


$$Wz(p) = \frac{Kz}{\sum_{i=1}^n 1 + a_i p^i}$$

$$Wr(p) = Kr + \frac{1}{T_i p} \Rightarrow \text{PI rég.}$$

$$G(p) = \frac{Ks}{\sum_{i=1}^m 1 + b_i p^i}$$

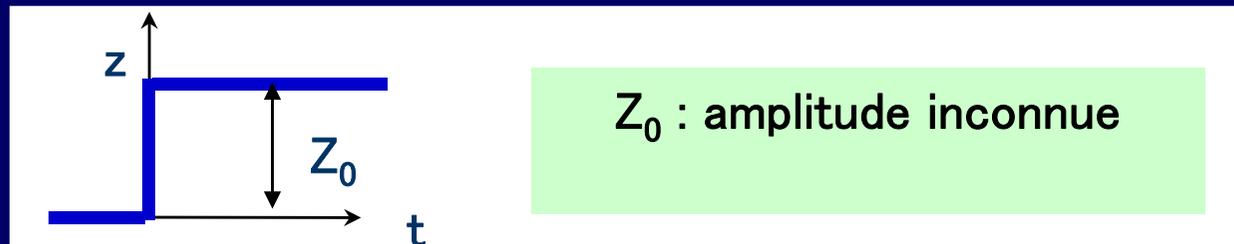
👉 Sortie d'un PI régulateur



$$U(t) = \underbrace{K_r \cdot \Delta E(t)}_P + \underbrace{\frac{1}{T_i} \int \Delta E(t) dt}_I$$

Calcul du gain du système K_s (5/7)

➡ Appliquons une perturbation $Z(p)=Z_0/p$, $X_c=0$



➡ On calcule l'écart résiduel ($E(\infty)$) lorsque $T_i=0$ (on supprime l'action I)

$$E(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (Yz(t) - Xc(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(Yz(p) - Xc(p))$$

$$E(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p(Yz(p) - Xc(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{Z_0}{p} \cdot Wz(p) \cdot \frac{1}{1 + Wr(p) \cdot G(p)} \right) = \frac{Z_0 K_z}{1 + K_r K_s}$$

➡ La variation $U(t)$ due à l'action P du régulateur sera donc U_p

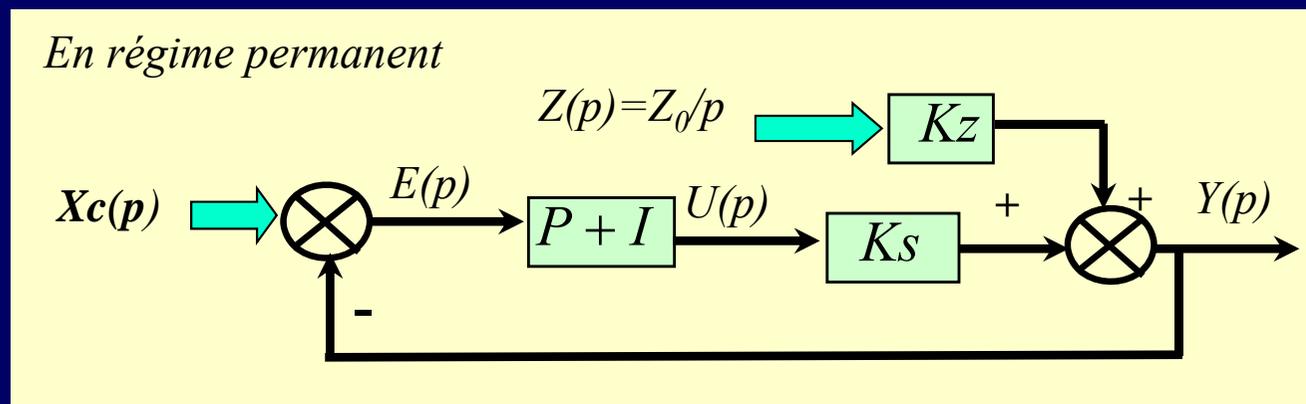
$$U_p(\infty) = K_r E(\infty) = \frac{K_r Z_0 K_z}{1 + K_r K_s}$$

Calcul du gain du système K_s (6/7)

👉 On ajoute l'action intégrale I

- ✓ L'action I a pour tâche d'annuler l'erreur statique en augmentant U_p
- ✓ Soit U_p : action du régulateur du à l'action P
- ✓ U_i : action du régulateur du à l'action I
- ✓ U_t : action du régulateur du à l'action P+I

👉 La sortie Y sera nulle ($Y=X_c=0$) en régime permanent suite à l'entrée Z_0



$$Y = Z_0 \cdot K_z + U_t \cdot K_s = 0$$

$$U_t = -\frac{Z_0 \cdot K_z}{K_s}$$

Calcul du gain du système K_s (7/7)

➡ Les sorties du régulateur P et total (P+I) sont :

$$U_t = -\frac{Z_0 \cdot K_z}{K_s}, \quad U_P = \frac{K_r Z_0 K_z}{1 + K_r K_s}$$

➡ La sortie U_I due à I régulateur est :

$$U_I = U_t - U_P = -\frac{Z_0 K_z}{(1 + K_r K_s) K_s}$$

✓ U_I est la variation du signal de sortie créée par l'action I

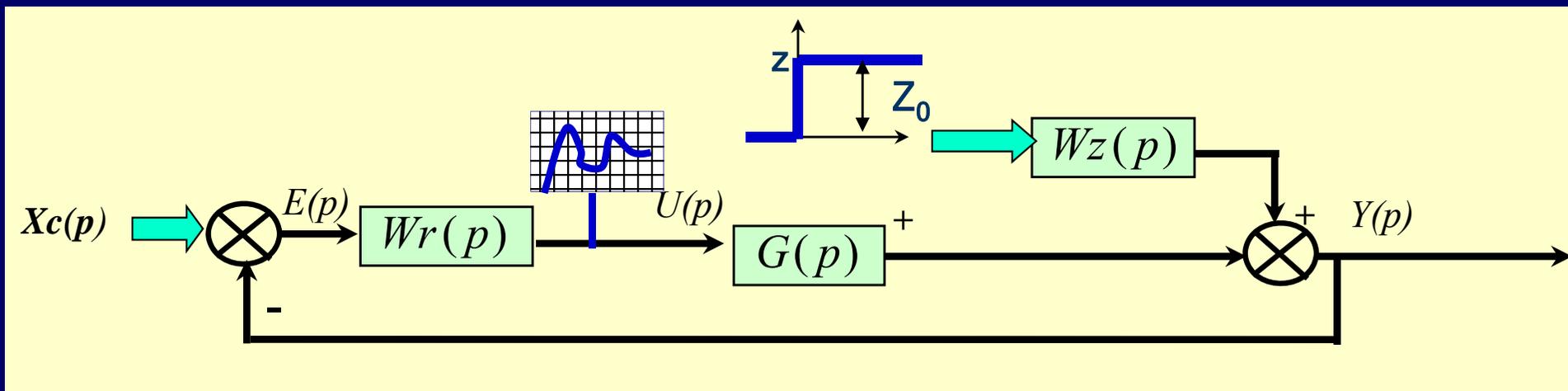
➡ Le gain total $K=K_r.K_s$ est alors

$$\frac{U_P}{U_i} = K_r K_s = K$$

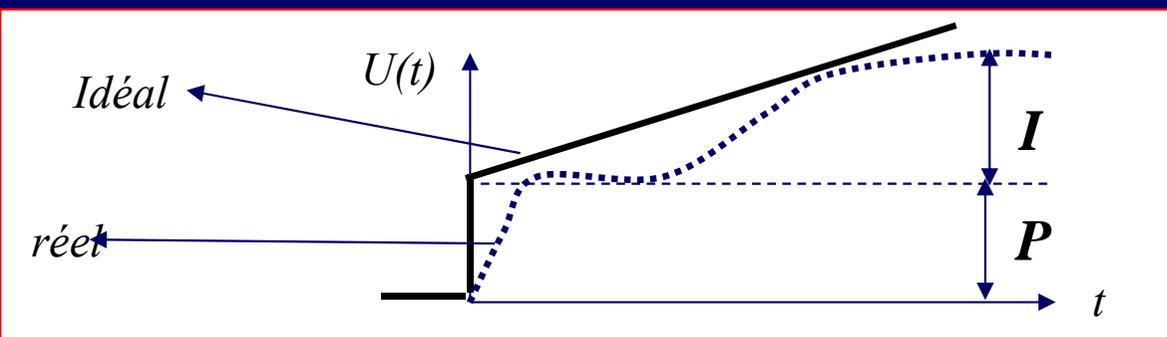
Mise en œuvre pratique

☞ On applique une perturbation d'amplitude Z_0

✓ On enregistre uniquement la sortie du régulateur $U(t)$



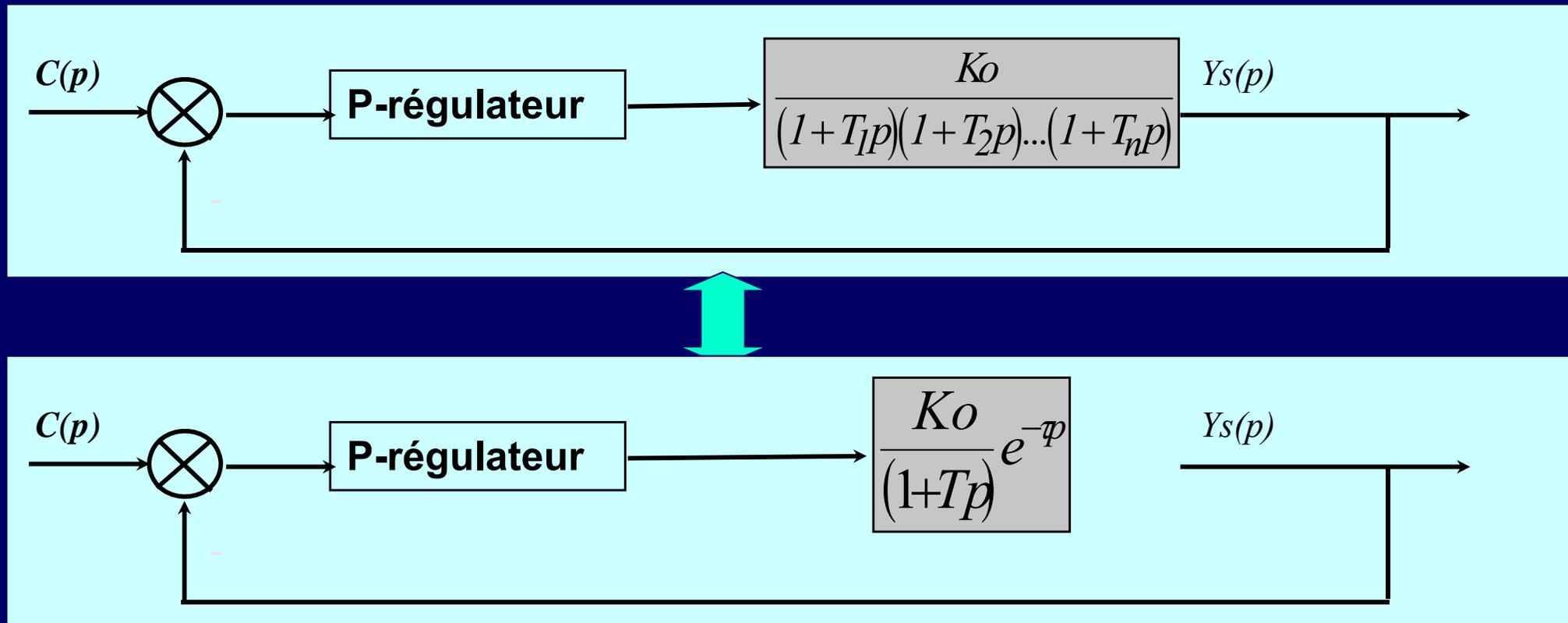
☞ On détermine K comme suit :



$$\frac{U_P}{U_i} = \frac{P}{I} = K_r K_s = K \Rightarrow K_s = \frac{P}{I \cdot K_r}$$

MODELE DE BROIDA

Principe



- ✓ Déterminer K_0 , T et τ et posant qui provoquera la même période de pompage que le système réel

Principe

👉 Conditions de l'apparition des auto-oscillations

$$W_f(p) = \frac{\frac{K_r \cdot K_0}{1+TP} e^{-\tau p}}{1 + \frac{K_r \cdot K_0}{1+TP} e^{-\tau p}}$$

$$D_f(p) = 1 + \frac{K_r \cdot K_0}{1+TP} e^{-\tau p}$$

Conditions de pompage

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T_{cr}}$$

✓ La solution du système d'équations du pompage sera :

$$\begin{cases} A_{ou}(\omega) = 1 = \frac{K_r \cdot K_0}{\sqrt{1+T^2 \omega_{cr}^2}} = 1 \\ \varphi_{ou}(\omega) = -\omega_{cr} \cdot \tau - \arctg(T \omega_{cr}) = -\pi \end{cases}$$

$$(K_R K_0)^2 = 1 + T^2 \omega^2 = 1 + T^2 \left(\frac{2\pi}{T_{cr}} \right)^2$$

$$T = \frac{T_{cr}}{2\pi} \cdot \sqrt{(K_R K_0)^2 - 1}$$

$$\tau = \pi - \arctg \left(\frac{\sqrt{(K_R \cdot K_0)^2 - 1}}{\omega_{cr}} \right)$$

Méthodologie pratique

☞ Méthodologie pratique

✓ On augmente le gain K du régulateur jusqu'à apparition de pompage, on fixe ce gain K_{cr}

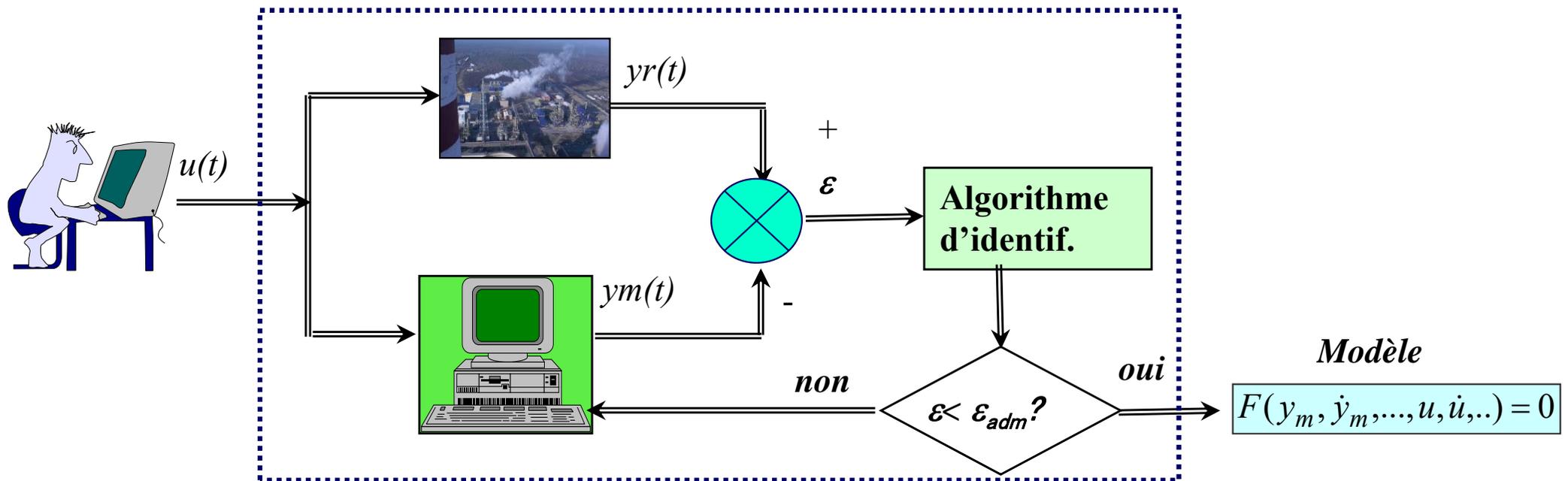
✓ 2. On mesure la période de l'auto oscillation T_{cr} et on calcule

$$K = K_{cr} \cdot K_0$$

✓ 3. On déduit T et τ des formules établies

✓ Le gain K_0 est calculé à partir de l'erreur statique en boucle fermée

IDENTIFICATION LST methods (chap3)



Prof. Belkacem OULD BOUAMAMA
LAGIS UMR CNRS 8146

Tél : (33) 03 28 76 73 97 - Fax : (33) 03 20 33 71 89

E mail : Belkacem.bouamama@univ-lille1.fr

Chapitre 3

METHODES STATISTIQUES

Limites des méthodes de base

Modèles paramétriques :

- ✓ *Méthodes graphiques (déterministes)*
- ✓ *Peu de modèles, nécessitent signaux grande amplitude, sensibles aux perturbations, imprécises, procédures longues, impossible de valider les modèles*

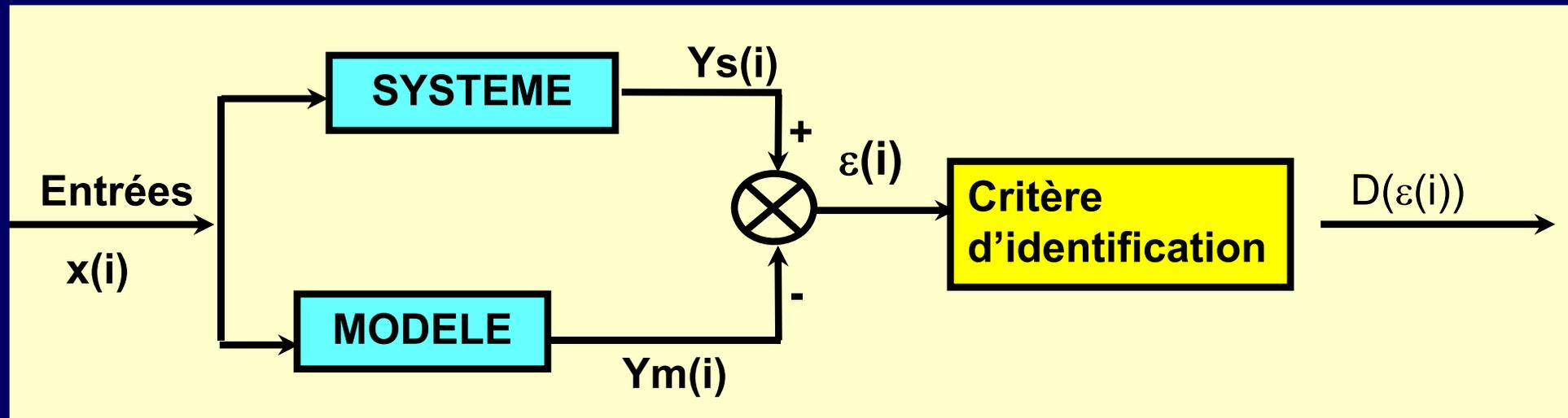
PARTIE 1

MODELES STATIQUES

Méthodes des MMC

👉 Principe de la MMC LST

- ✓ *La MMC est introduite par Karl Gauss en 1809 en cherchant à prévoir le Mvt. des planètes à partir des observations par télescopique*



$$D = \sum_{i=1}^n (Ys(i) - Ym(i))^2 \Rightarrow \min$$

✓ EXEMPLE : REGRESSION LINEAIRE cas continu



✓ *Expérimentation*

- N : Nbre. d'observations (d'échantillons de mesures); J = 1,2..K : Paramètre du modèle; i = 1,2...N : Numéro d'expériences;
- Modèle statique : $Y_m = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ Modèle

✓ *Structure du modèle*

$$Y_m = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i X_i$$

👉 Matrice d'expérience H

No Exp.	INPUT							OUTPUT
1	X_{11}	X_{21}	X_{31}	X_{j1}	X_{K1}	Y_1
2	X_{12}	X_{22}	X_{32}	X_{j2}		X_{K2}	Y_2
3	X_{13}	X_{23}	X_{33}	X_{j3}			Y_3
.
.
.
i	X_{1i}	X_{2i}	X_{3i}	X_{ji}	X_{Kj}	Y_j
.
.
.
N	X_{1N}	X_{2N}	X_{3N}		X_{jN}	X_{KN}	Y_N

Problématique

☞ Soit donné :

$$Y_m = \sum_{j=0}^K a_j X_j$$

$$\bar{\Theta} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k],$$

$$\bar{H} = [X_0 \ X_1 \ \dots \ X_k]$$



$$Y_m = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_K \end{bmatrix} \cdot [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k] = \bar{H}^T \cdot \bar{\Theta}$$

☞ Que veut on ? : Trouver :

$$\bar{\Theta} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_K]$$

✓ Tel que :

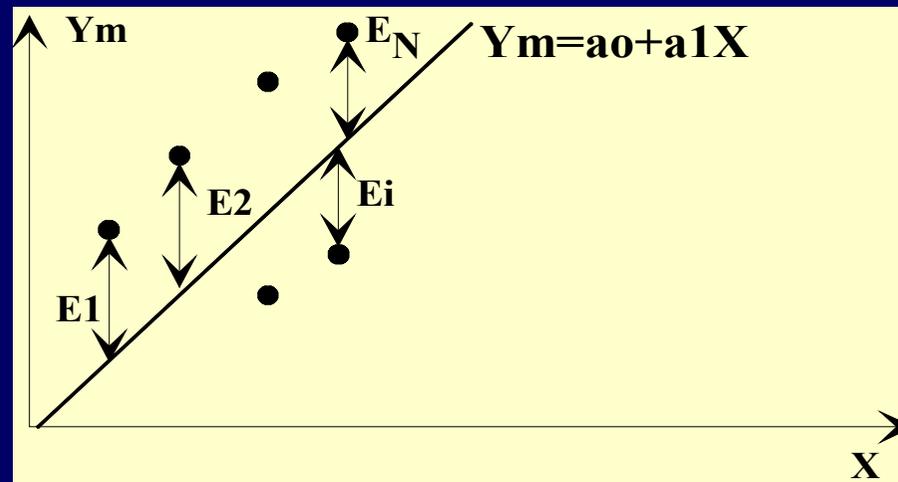
$$\sum_{i=1}^N (Y_i - Y_{mi})^2 = J(\underline{\Theta}) \rightarrow \text{Minimum} .$$

$J(\underline{\Theta})$: critère d'optimalité

1. cas monovariabile

☞ $K=1, Y_m=a_0+a_1X$

✓ Droite de régression, champ de corrélation, infinité de droites



☞ *Influence du nombre d'expériences*

✓ 1. $N=2$: Par deux points ne passent qu'une droite : $E_1=Y-Y_{m_1}=Y-Y_{m_2}=E_2=0.?$

- *Le modèle reflète parfaitement le système ?*
- *Cas idéal irréalisable en pratique : Présence d'erreurs de mesure (Systématique, instrumentale, humaine etc.)*

1. cas monovariabile

👉 2. $N > 2$: trouver la meilleure droite au sens des MMC

✓ Déterminer les paramètres a_0 et a_1 tel que :

$$J(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^N (y(i) - (a_0 + a_1 X_1(i)))^2$$

✓ Ceci revient à résoudre le système d'équations:

$J(a_0, a_1) \rightarrow \text{Minimum}$

$$\begin{cases} \frac{\partial j(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial j(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0 \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \cdot \sum_{i=1}^N X_i^2 - \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2}, \quad a_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N X_i \cdot Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sum_{i=1}^N Y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2}$$

1. cas multivariable

☞ $K > 1$, Structure du modèle

$$Y_m = \sum_{j=0}^K a_j X_j = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_K X_K = \bar{H}^T \cdot \bar{\Theta},$$

$$\bar{\Theta} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_K],$$

$$\bar{H} = [X_0 \ X_1 \ \dots \ X_K]$$

☞ Calcul des paramètres

✓ *Processus aléatoire : la sortie est affectée d'un bruit $V(t)$:*

$$Y_m = \bar{H}^T \cdot \bar{\Theta} + v(t)$$

✓ *Réalisation de N expériences*

$$Y = \begin{cases} y_1 = a_1 X_{11} + a_2 X_{21} + \dots + a_k X_{k1} + V_1 \\ y_2 = a_1 X_{12} + a_2 X_{22} + \dots + a_k X_{k2} + V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N = a_1 X_{1N} + a_2 X_{2N} + \dots + a_k X_{kN} + V_N \end{cases} = H \cdot \bar{\Theta} + \bar{V}(t)$$

$$H = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \dots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{1N} & X_{2N} & \dots & X_{kN} \end{bmatrix}$$

$$\dim(H) = (N \times k), \quad \dim(\bar{\Theta}) = (k \times N),$$

$$\dim(\bar{V}) = (N \times 1), \quad \dim(Y) = (N \times 1),$$

👉 1. Système non bruité $V=0$

✓ Cas déterministe, si H est inversible, alors :

$$Y = H \cdot \bar{\Theta} + 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\Theta} = (H)^{-1} \cdot Y$$

✓ Cas non réaliste

👉 2. Système bruité $V \neq 0$

$$Y = H \cdot \bar{\Theta} + V \quad \rightarrow \quad Y = H \cdot \bar{\Theta} + V \Rightarrow \bar{\Theta} = H^{-1}Y - H^{-1}V$$

Estimation des paramètres

👉 2 types d'erreurs :

✓ Erreurs d'observation : $\bar{E} = \bar{Y} - \bar{Y}_m$

✓ Erreurs d'estimation : $\hat{\bar{\theta}} = \bar{\theta} - \bar{\theta}_m$

👉 Estimateur optimal

✓ Critère d'optimalité

$$J(\Theta) = \sum_{i=1}^N (y(i) - y_m(i))^2 = \sum_{i=1}^N (E(i))^2 = (E_1)^2 + \dots + (E_N)^2 = \bar{E}^T \cdot \bar{E} = (\bar{Y} - H \cdot \bar{\theta})^T \cdot (\bar{Y} - H \cdot \bar{\theta})$$

✓ Conditions d'optimalité

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta} = -2H^T \cdot (\underline{Y} - H \cdot \underline{\Theta}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{\Theta}_{opt.} = (H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \underline{Y}$$

✓ Conditions d'observabilité : H^T non singulière et $N > K$

Biais de l'estimateur

👉 Biais de l'estimateur b

$$b = E(\Theta_{opt} - \Theta_R) = E(\Theta_{opt}) - \Theta_R$$

- ✓ $b=0$: Estimateur non biaisé (pas d'erreur d'estimation); Densité de probabilité centrée sur la valeur cherchée

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Theta_{opt}(N)}{N} \rightarrow \underline{\Theta}$$

- ✓ $b \neq 0$: Estimateur biaisé
- \underline{V} et \underline{H} séquences corrélées (hypothèses de régression);
 - \underline{V} est de moyenne non nulle

Simulation sur Matlab

👉 1. Cas monovariabile

```
home
disp('EXEMPLE DE CALCUL D UN MODELE DE REGRESSION')
% VALEURS EXPERIMENTALES
pause,home
x=[1 2 3];
y_exp=[2 4 6];
pause;home
disp('CHOISIR L ORDRE n DU MODELE')
pause,home
input n=
n=ans;
poly_model=polyfit(x,y_exp,n)%c'est pour trouver l'ordre du polyn^ome
disp('VERIFICATION DU MODELE : ERREUR DE MODELISATION')
pause,home
Y_model=polyval(poly_model,x);%calcul les valeurs du modèle
E=abs([y_exp' Y_model' (y_exp'-Y_model)']);
ERREUR_MAX=max(E(:,3))
pause
home
disp('GRAPHE')
pause,home
plot(x,y_exp,'*',x,Y_model,'--');grid;title('VERIFICATION DU MODELE');legend('--:model, *:exp')
pause;home;close
disp('SI L ERREUR N EST PAS BONNE CHANGER L ORDRE n')
```

Simulation sur Matlab 2. Cas multivariable

```
disp('INTRODUCTION DES DONNES EXPERIMENTALES:')
pause, home
disp(' 1. MATRICE D EXPERIENCES H:')
disp(' NOUS AVONS 7 EXPERIENCES ET DEUX VARIABLES X1 et X2')
H= [1 3;4 2;1 5;2 1;3 4;4 5;6 8]
pause, home
disp('2. VARIABLE DE SORTIE Y:')
y=[5 13 9 4 11 12 23]'
pause, home
disp('SOLUTION : PARAMETRES ESTIMES:')
teta=inv(H'*H)*H'*y;
a1=teta(1)
a2=teta(2)
pause, home
disp(' LE MODELE EST DONC; Ym=a1*X1+a2*X2')
pause, home
disp('VERIFICATION DU MODELE')
pause, home
disp('VALEURS DU MODELE')
ym=polyval([a1 0],H(:,1))+polyval([a2 0],H(:,2)) %ym=a1*X1+a2*X2
pause, home
disp('CALCUL DE L ERREUR DE MODELISATION')
pause
R=[ym,y,abs((ym-y)./y)*100]
disp('ERREUR MAXIMALE')
Emax=max(R(:,3))
pause, home
disp('GRAPHE 3D')
plot3(y,H(:,1),H(:,2),ym,H(:,1),H(:,2));grid;Xlabel('X1,X2'); Ylabel ('Modèle, Expérimentale');
```

INDENTIFICATION DES MODELES DYNAMIQUES

**Identification des modèles paramétriques
discrets par la MMC**

objectif

**Étude des méthodes d'identification de modèles
paramétriques discrets sur la base des E/S
échantillonnées au même instant**

Principe

Motivations

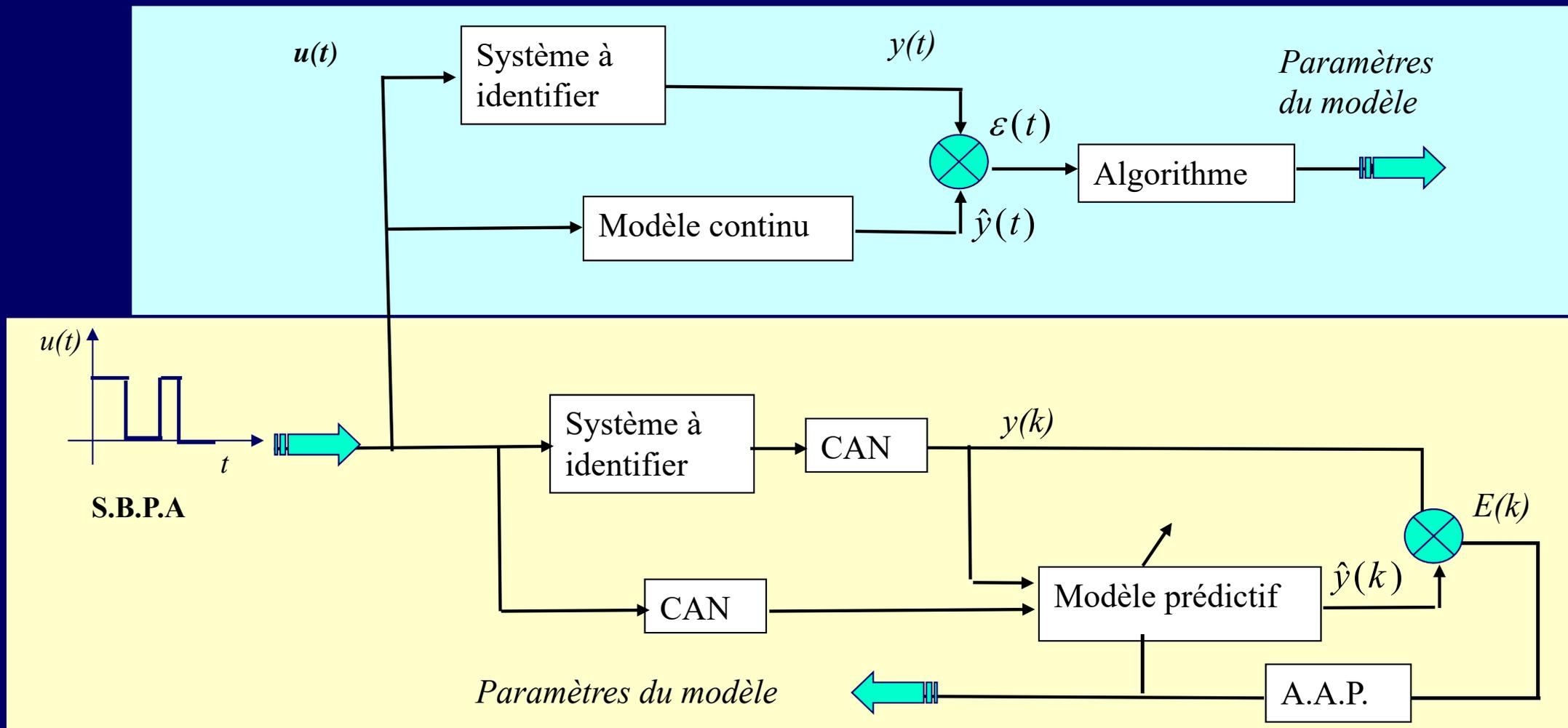
- ✓ *Utilisation des PC pour la commande numérique des procédés fournit des sorties échantillonnées*
- ✓ *Intérêt d'utiliser ces sorties échantillonnées pour l'identification par la MMC*

Avantages

- ✓ *Simple a mettre en œuvre*
- ✓ *Implémentation en temps réel sur calculateur sous forme récursive*

MMC cas continu et cas discret

- ✓ Cas continu : se base sur l'erreur d'observation
- ✓ Cas discret : se base sur l'erreur de prédiction



Particularité par rapport au MMC simple

☞ Les méthodes des MMC dans ce chapitre appelés

- ✓ *Méthodes basées sur l'erreur de prédiction*
- ✓ *Considère que l'erreur d'équation $E(k)$ dit résidu est un bruit de mesure entre la sortie réelle $y(k)$ et la sortie prédite du modèle (alors que MMC simple erreur entre système réelle et le modèle*

☞ Objectifs de ce chapitre

- ✓ *Étude des principales méthodes des MMC basées sur l'erreur de prédiction*
- ✓ *Identification temps réel*
- ✓ *Méthodes récursives*
- ✓ *Méthodes à fenêtre glissante*
- ✓ *Méthodes pondérées*

Caractéristiques des méthodes paramétriques statistiques

- ➡ éliminent les défauts mentionnés précédemment
- ➡ algorithmes non récursifs MMC simple
- ➡ (récursifs (Traitement pas à pas des données), permet suivi des paramètres en temps réel
- ➡ opérant avec des signaux d'excitation extrêmement faibles (SBPA de faible niveau)
- ➡ permet de modéliser les perturbations et bruits capteurs (et supprimer)
- ➡ traitement aisé du signal (analyse spectrale)

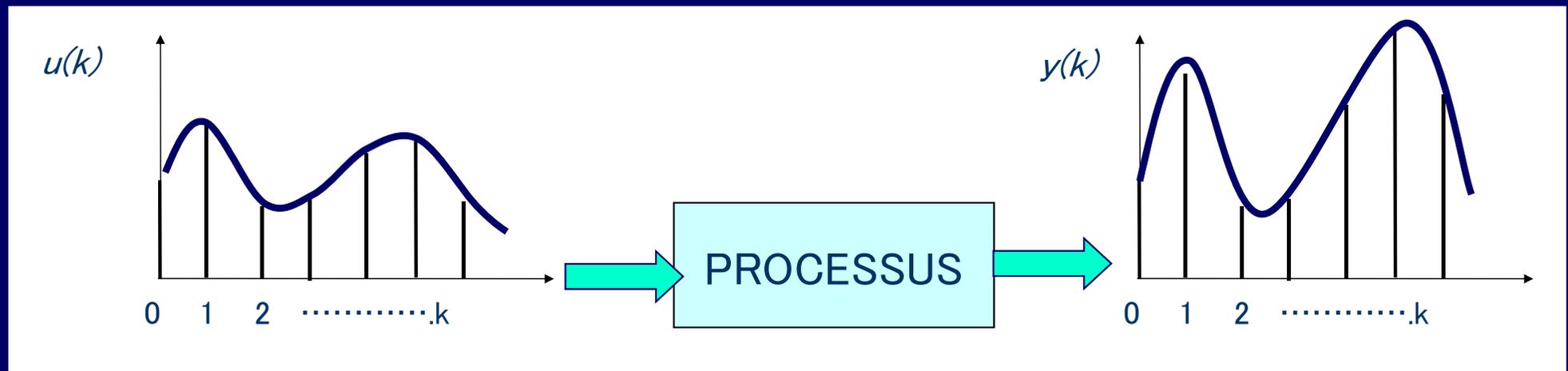
Comment commence t'on?

- On choisit une structure procédé+perturbation pour l'identification
- une structure non adaptée entraîne un biais
- *Et ensuite?*

Représentations des modèles échantillonnés

1. MODELE ARMA (Auto Régressif à Moyenne Mobile »

- ✓ Soit un signal $y(t)$ généré par un signal d'entrée $u(t)$
- ✓ $u(t)$ et $y(t)$ sont représentés par leur échantillons à des instants k ,



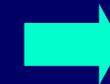
$$u(t) \Rightarrow \{u(k), u(k+1), \dots, u(k+m)\}$$

$$y(t) \Rightarrow \{y(k), y(k+1), \dots, y(k+N)\}$$

Modèle ARMA : représentation temporelle

☞ Modèle décrit par un modèle ARMA d'ordre (n,m) :

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

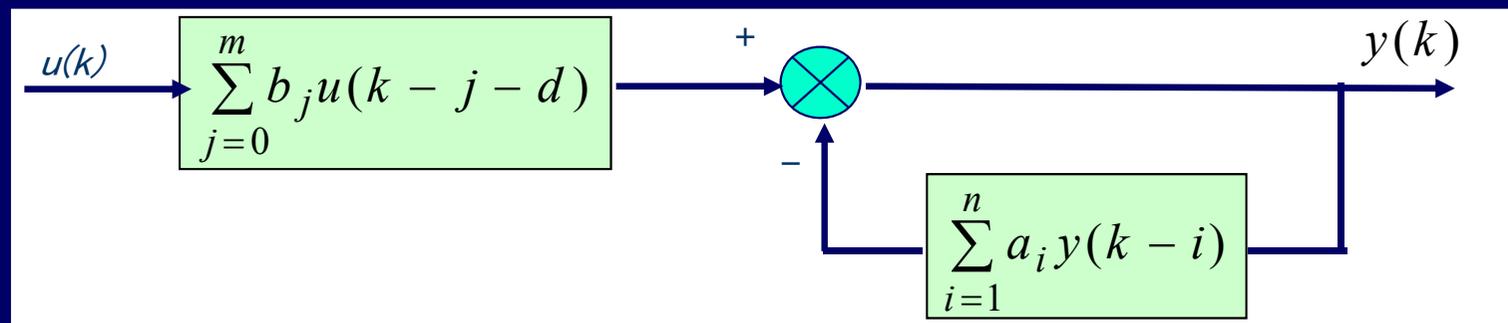


Si $a_0 \neq 0$, le modèle est non causal

✓ Intérêt d'une telle représentation

- *A une infinité d'échantillons pour représenter un signal on a un nbre fini de paramètres pour reconstituer le signal*

✓ Schéma bloc du modèle ARMA



Représentation ARMA : cas général

➡ Connaissant les sorties du système échantillonné $y(k)$, on calcule la sortie prédite:

$$\hat{y}(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j u(k-j-d)$$



$y(k-1), \dots, y(k-n)$: Échantillons d'un signal analogique de sortie $y(t)$ aux instant $k, k-1, \dots, k-n$

$u(k-d), \dots, u(k-m-d)$: Échantillons de l'excitation d'entrée $u(t)$ qui a généré $y(t)$

d : retard pur multiple de la période d'échantillonnage T_e compté en nombre entier de T_e

K : temps discret normalisé (temps réel) divisé par la période d'échantillonnage :

$$k=t/T_e$$

b_j et a_i : paramètres du modèle

Modèle ARMA : représentation fréquentielle

➡ Introduisons l'opérateur retard Z^{-1}

$$y(k-i) = Z^{-i} y(k)$$

$$u(k-j-d) = Z^{-j-d} u(k)$$

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$y(k) \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i} \right] = u(k) \left[\sum_{j=0}^m b_j Z^{-j} \right] Z^{-d}$$

$$y(k) A(Z^{-1}) = u(k) \cdot B(Z^{-1}) \cdot Z^{-d}$$

$$A(Z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i},$$

$$B(Z^{-1}) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j Z^{-j}$$

Transformée en Z du modèle ARMA

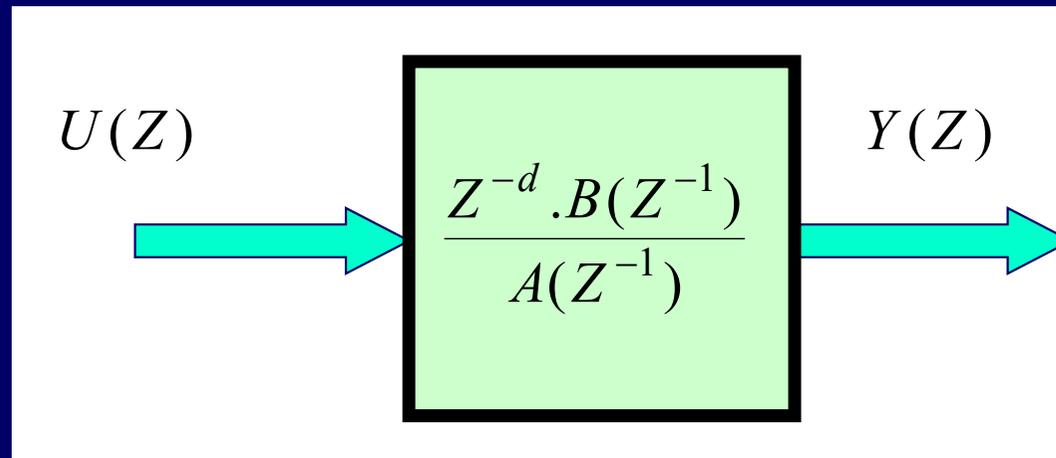
👉 Transformée en Z

$$y(k)A(Z^{-1}) = u(k).B(Z^{-1}).Z^{-d}$$



$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{Z^{-d} . B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})}$$

👉 Le **modèle ARMA** est donc **un filtre** d'E/S $u(Z)$ $y(Z)$



Modèle AR (Auto regressif)

☞ Cas : $b_j = 0 (i=1, \dots, m)$

$$y(k) \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i} \right] = u(k) \left[\sum_{j=0}^m b_j Z^{-j} \right] Z^{-d} = u(k) \cdot b_0 Z^{-d}$$

$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = \frac{b_0 \cdot Z^{-d}}{A(Z^{-1})}$$

☞ *Le modèle est dit : « TOUT POLES »*

Diapositive 115

OB4

La position des pôles définit la dynamique du système
modèle courant dans les systèmes de régulation

OULD BOUAMAMA; 09/10/2004

Modèle MA (Auto regressif)

☞ Cas : $a_i = 0 (\forall i > 0)$

$$y(k) \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i Z^{-i} \right] = u(k) \left[\sum_{j=0}^m b_j Z^{-j} \right] Z^{-d} \Rightarrow y(k) = u(k) \left[\sum_{j=0}^m b_j Z^{-j} \right] Z^{-d}$$

$$W(Z) = \frac{Y(Z)}{U(Z)} = b_0 \cdot Z^{-d} \cdot B(Z^{-1})$$

☞ Le modèle est dit : « TOUT ZERO »

Diapositive 116

OB5

La position des zéros définit la dynamique du système

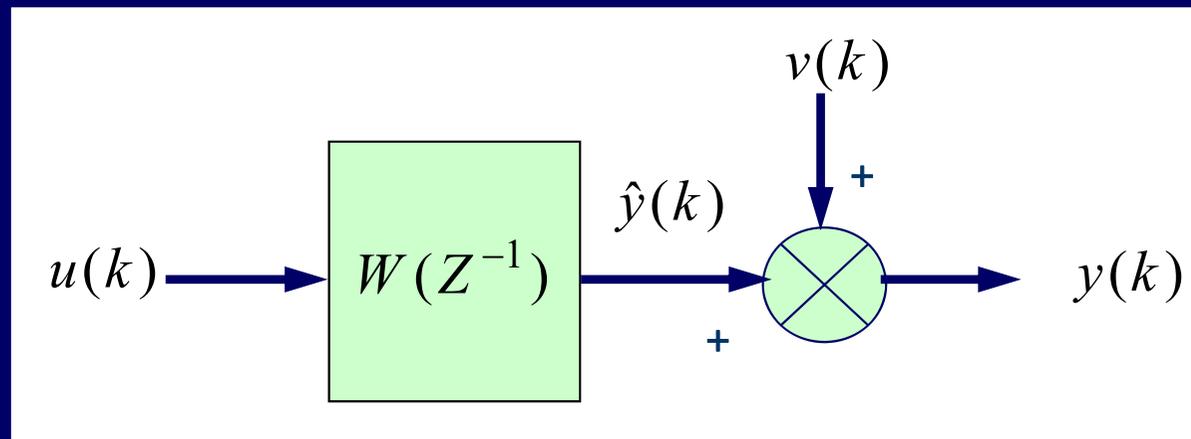
OULD BOUAMAMA; 09/10/2004

CALCUL DES PARAMETRES DES MODELES DISCRETS

1. MMC SIMPLE

Systeme bruité

☞ Soit le système dynamique bruité



$$y(k) = \hat{y}(k) + V(k)$$

$$y(k) = \bar{H}(k)^T \cdot \bar{\theta} + E(k)$$

☞ Soit E vecteur des erreurs de modélisation

$$y(k) = \bar{H}(k)^T \cdot \bar{\theta} + E(k) = \text{modèle} + \text{erreur de modélisation}$$

$$\bar{H}(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, y(k-n), u(k-d), u(k-1-d), \dots, u(k-m-d)]^T$$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m]$$

Détermination des paramètres

👉 Réalisons N expériences

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) + E(k)$$

$$k = N, (N-1), \dots, n, (n-1), \dots, 1$$

$$\bar{H}(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, y(k-n), u(k-d), u(k-1-d), \dots, u(k-m-d)]^T$$

$$\begin{array}{l}
 \text{N exp.} \\
 \text{Cond. Initi.}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 y(N) \\
 y(N-1) \\
 \cdot \\
 y(n+1) \\
 y(n) \\
 \cdot \\
 y(1)
 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc}
 -y(N-1) & \dots & -y(N-n) & u(N-d) & \dots & u(N-m-d) \\
 -y(N-2) & \dots & -y(N-1-n) & u(N-1-d) & \dots & u(N-1-m-d) \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 -y(n) & \dots & -y(1) & u(n+1-d) & \dots & u(n+1-m-d) \\
 -y(n-1) & \dots & -y(0) & u(n-d) & \dots & u(n-m-d) \\
 \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 -y(0) & \dots & -y(1-n) & u(1-d) & \dots & u(1-m-d)
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 a_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 a_n \\
 b_0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 b_m
 \end{array} + \begin{array}{l}
 E(N) \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 E(1)
 \end{array}$$

✓ Les valeurs $y(1), \dots, y(n)$ et les entrées correspondantes sont connues : conditions initiales

✎ Écriture matricielle du système d'expériences

$$\bar{Y} = H.\bar{\theta} + \bar{E}$$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m] ?$$

✎ Résolution du problème au sens des MMC

✓ *Conditions d'expériences : $N \geq n+m$*

$$\hat{\theta} = (H^T . H)^{-1} . H^T . \bar{Y}$$

METHODE DES MMC GENERALISEES

1. LIMITES DE LA MMC SIMPLE

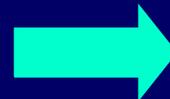
LIMITES DE LA MMC SIMPLE

👉 Propriétés statistiques de l'estimateur

✓ *L'estimateur est une variable aléatoire car elle dépend de $y(K)$:*

$\bar{Y} = H\bar{\theta} + E$: Sortie du système

$$\hat{\theta} = (H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{Y}$$



$\bar{\theta}$: Estimateur réel

$\hat{\theta}$ = Estimateur optimal

$H\bar{\theta}$: Vraies valeur de la sortie \bar{Y}



$$\hat{\theta} = (H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot (H\bar{\theta} + \bar{E}) = \bar{\theta} + (H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E}$$

✓ *La valeur moyenne (Espérance mathématique) de Θ $E(\Theta)$ sera*

$$E\{\hat{\theta}\} = E\{\bar{\theta}\} + E\left\{(H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E}\right\} = \bar{\theta} + E\left\{(H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E}\right\}$$

👉 Définitions : Biais de l'estimateur

✓ *Un estimateur correct (sans biais) impose :*

$$E\{\hat{\theta} - \bar{\theta}\} = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N \rightarrow \bar{\theta}$$



$$E\{\hat{\theta}\} = E\{\bar{\theta}\} = \bar{\theta}$$

👉 Conditions pour avoir un estimateur sans biais

✓ *Un estimateur est sans biais ssi on a :*

$$E\{\hat{\theta}\} = \bar{\theta} - E\left\{\left(H^T \cdot H\right)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E}\right\} = \bar{\theta}$$



$$E\left\{\left(H^T \cdot H\right)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E}\right\} = 0$$

☞ On peut écrire :

$$E \left\{ \left(H^T \cdot H \right)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E} \right\} = E \left\{ \left(H^T \cdot H \right)^{-1} \right\} * E \left\{ \left(H^T \cdot \bar{E} \right) \right\} = 0$$

☞ $E \left\{ \left(H^T \cdot H \right) \right\}$ et $E \left\{ \left(H^T \cdot \bar{E} \right) \right\}$ sont des fonctions de corrélation

✓ Alors (le coef. de corrélation est nulle s'il n'y a pas de corrélation) :

$$E \left\{ \left(H^T \cdot H \right) \right\} = 0 \quad \text{ou} \quad E \left\{ \left(H^T \cdot \bar{E} \right) \right\} = 0 \quad \xrightarrow{\text{ssi}} \quad \bar{E}(k) \text{ non corrélés avec } H(k)$$

✓ Bruit non corrélé avec les données d'expériences : Ce sont justement les hypothèses pour construire un modèle de régression

👉 Analyse de la condition du biais

$$E\{\hat{\theta}\} = E\left\{(H^T \cdot H)^{-1} \cdot H^T \cdot \bar{E}\right\}$$



$$E\{\hat{\theta}\} = E\left\{(H^T \cdot H)^{-1} \cdot E\{H^T \cdot \bar{E}\}\right\}$$

👉 L'estimateur optimal est sans biais :

1. *si le bruit $E(k)$ est une séquence non corrélés avec $H(k)$*
2. *ou $E(k)$ est un bruit centré*

Conclusions

👉 Le biais serait nul si :

- ✓ *Le bruit auquel est assimilé l'écart (modèle – système réel) était blanc*
- ✓ *Le bruit E et la matrice des expériences H ne sont pas corrélés*

👉 Quel sens ?

- ✓ *La valeur exacte recherchée du vecteur paramètre $\underline{\theta}$ serait égal à la moyenne de tous les vecteurs optimaux obtenus en répétant N fois les expériences*
- ✓ *L'estimation est alors biaisé si les observations ont affectées d'un bruit corrélé avec les mesures*

👉 Que faire alors si les observations ont affectées d'un bruit corrélé avec les mesures ?

2. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE MODÈLE AFFECTÉ D'UN BRUIT CORRELES

Principe de la méthode MCG (GLS)

👉 Objectifs

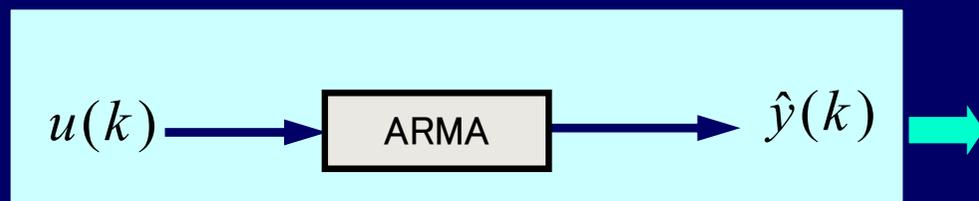
- ✓ *Obtenir une estimation optimale non biaisée dans le cas d'une observation avec un bruit corrélé*
- ✓ *Mots clefs : Blanchissement du résidu*

👉 Modèle ARMA bruité

- ✓ *Montrons que même si le bruit de mesure est un bruit blanc non corrélé, l'estimation est biaisé (car la structure ARMA modifie le bruit de mesure en une séquence corrélée)*

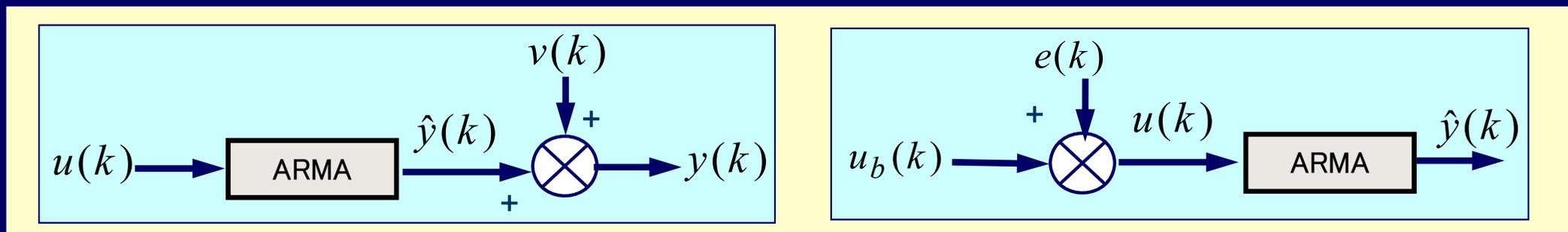
Notion de résidu

☞ Soit un modèle ARMA non bruité



$$\hat{y}(k) + \sum_{i=1}^n a_i \hat{y}(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j-d)$$

☞ Système affecté d'un bruit $v(k)$ à l'entrée et à la sortie



$$\hat{y}(k) = y(k) - v(k)$$

$$[y(k) - v(k)] + \sum_{i=1}^n a_i [y(k-i) - v(k-i)] = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j-d)$$

Diapositive 129

BELKACEM3 en remplaçant l'expression de $y^*(k) = y(k) - v(k)$ dans l'expression globale de $y^*(k)$ donné plus haut
Belkacem; 11/10/2004

Résidu corrélé

👉 Pourquoi le bruit $v(k)$ devient un résidu $r(k)$ corrélé ?

$$[y(k) - v(k)] + \sum_{i=1}^n a_i [y(k-i) - v(k-i)] = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j-d)$$

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j-d) + r(k)$$

$$r(k) = v(k) + \sum_{i=1}^n a_i v(k-i)$$

RÉSIDU : est un bruit corrélé

👉 Si le bruit agit à l'entrée on obtient :

$$\hat{y}(k) + \sum_{i=1}^n a_i \hat{y}(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u_b(k-j-d) + r(k)$$

$$r(k) = \sum_{j=0}^m b_j e(k-j-d)$$

👉 Méthodologie

✓ Soit

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j-d) + r(k)$$

✓ Sous forme fréquentielle (en introduisant Z^{-1}), elle devient :

$$y(k).A(Z^{-1}) = Z^{-d}.B(Z^{-1}).U(k) + r(k)$$

✓ Supposons que le résidu $r(k)$ est généré par un bruit blanc $v(k)$ à travers un filtre :

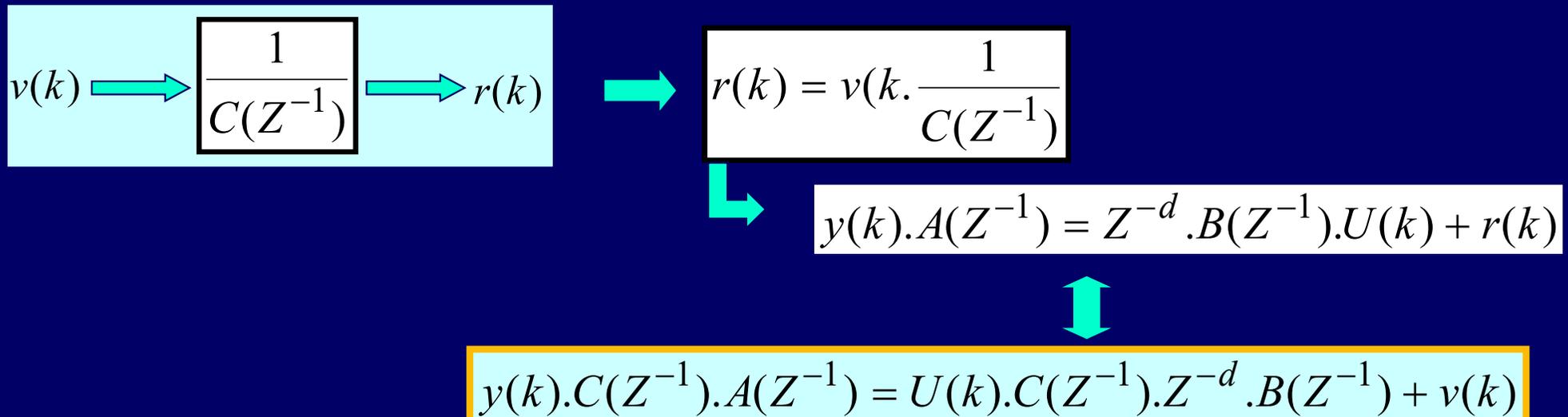
Méthode de Clarke (1967)

☞ On a vu : la structure du modèle introduit bien un bruit corrélé

✓ Comment alors obtenir un bruit blanc ou qui s'en approche

☞ Méthode de Clarke (1967) ou méthode GLS :

✓ Elle consiste à transformer par filtrage successif les données expérimentales pour obtenir un écart (modèle - système) qui devient un bruit blanc



Diapositive 132

BELKACEM4 Lorsque l'estimateur est biaisé, on améliore la qualité de l'estimateur des MMC par de nouvelles techniques. ces techniques reposent sur l'hypothèse que le bruit de mesure $v(k)$ peut être considéré comme étant le signal de sortie d'un filtre linéaire inconnu excité par une séquence de bruit blanc non corrélé $r(k)$ et à moyenne nulle.

Belkacem; 11/10/2004

👉 Analyse, l'expression obtenu est un modèle :

$$\underbrace{y(k).C(Z^{-1}).A(Z^{-1})}_{Y_r(k)} = \underbrace{U(k).C(Z^{-1}).Z^{-d}.B(Z^{-1})}_{U_r(k)} + v(k)$$

✓ Sur ce modèle agit un bruit blanc $v(k)$, les E/S sont :

$$\begin{cases} y_r(k) = C(Z^{-1}).y(k) \\ U_r(k) = C(Z^{-1}).U(k) \end{cases}$$

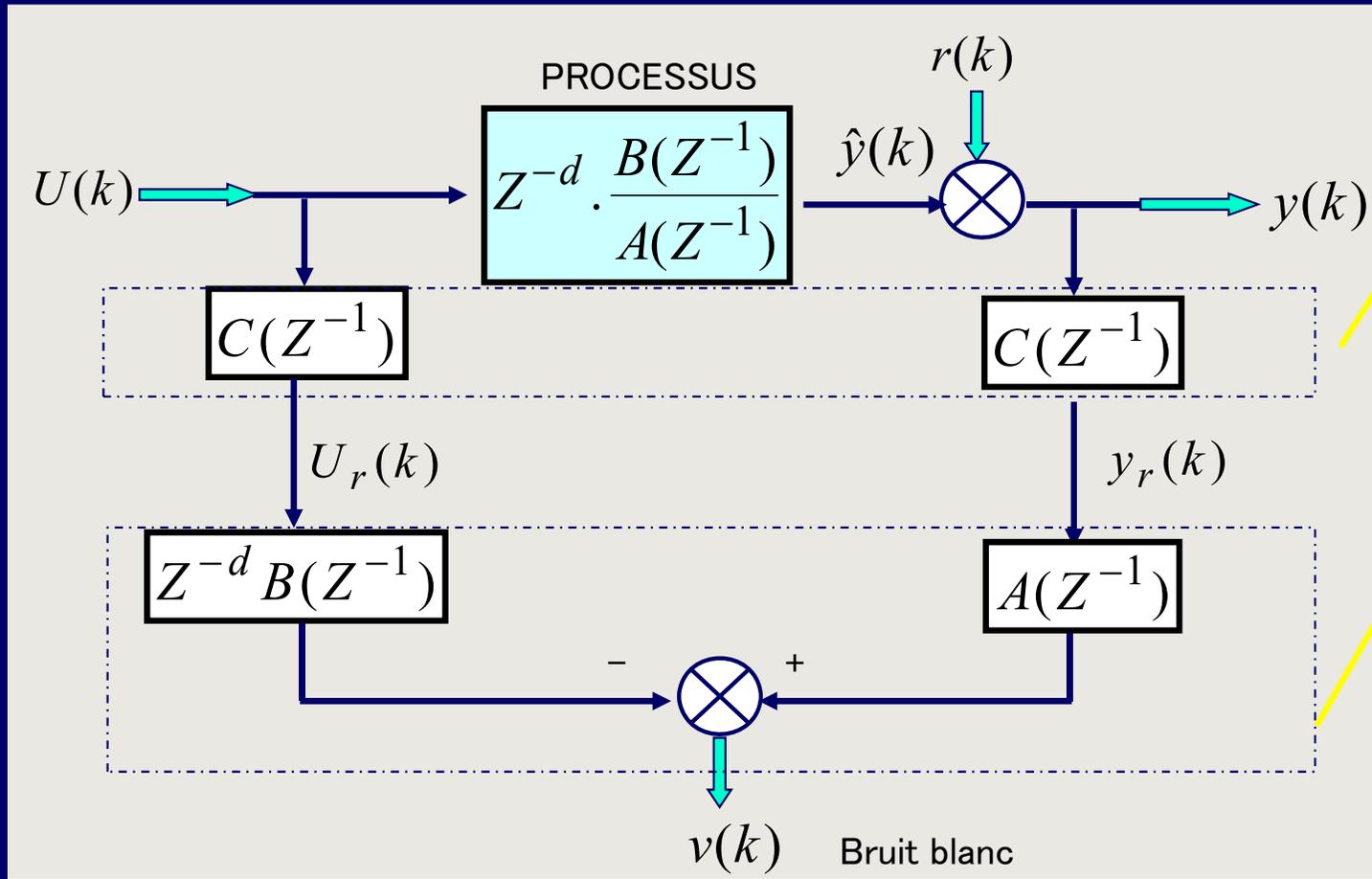
✓ On peut alors noter ce nouveau modèle

$$y_r(k).A(Z^{-1}) = U_r(k).Z^{-d}.B(Z^{-1}) + v(k)$$

✓ Quel est le sens physique de cette expression ?

Le modèle en terme de schéma bloc

$$y_r(k).A(Z^{-1}) = U_r(k).Z^{-d}.B(Z^{-1}) + v(k)$$



Si l'on filtre les données $y(k)$ et $U(k)$ on obtient l'erreur d'équation qui sera un bruit blanc (sortie U_r et y_r)

Ces sorties U_r et y_r sont traitées alors par la méthode MMC simple avec un estimateur sans biais des coeff. de $A(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})$

ALORS IL FAUT DETERMINER LE FILTRE $C(Z^{-1})$????

ERREUR GENERALISEE



$$E(k) = [A(Z^{-1}).C(Z^{-1})]y(k) - [Z^{-d}.B(Z^{-1})C(Z^{-1})]U(k)$$

Estimation des coefficients de $v(k)$

☞ Si $C(Z^{-1})$ est connu alors on peut estimer Θ

✓ Mais : la dynamique du bruit $C(Z^{-1})$ n'est pas connu

✓ Comment calculer les paramètres de $C(Z^{-1})$?

☞ Estimation de $C(Z^{-1})$

✓ Dans le domaine fréquentiel on a : $C(Z^{-1}) = 1 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_p Z^{-p}$

✓ En traduisant dans le domaine temporel $v(k)$ on a :

$$v(k) = r(k)C(Z^{-1}) \Rightarrow v(k) = r(k) + c_1(k-1) + \dots + c_p(k-p)$$

✓ Le problème revient alors à estimer par la MMC les paramètres de $v(k)$

$$v(k) = r(k) + c_1(k-1) + \dots + c_p(k-p)$$

👉 Méthode MMC appliqué à $r(k)$

$$v(k) = r(k) + c_1 r(k-1) + \dots + c_p r(k-p) \quad \rightarrow \quad r(k) = -c_1 r(k-1) - \dots - c_p r(k-p) + v(k)$$

✓ Relevons les mesures effectuées de p à N . On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} r(p) \\ r(p-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ r(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r(p-1) & \cdot & \cdot & \cdot & -r(0) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ -r(N-1) & \cdot & \cdot & \cdot & -r(N-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(p) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v(N) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{r} = R \cdot \bar{C} + \bar{V}$$

✓ Nous sommes en présence de modèle classique où V est un bruit blanc, C : le vecteur des paramètres à déterminer

$$\hat{C} = (R^T \cdot R)^{-1} \cdot R^T \cdot \bar{r}$$

R : Étant la matrice d'observations des erreurs inconnues

\underline{C} : Vecteur des erreurs inconnus

👉 Comment calculer C ?

$$\hat{C} = (R^T . R)^{-1} . R^T . \bar{r}$$

✓ *On ne connaît ni la matrice R ni le vecteur r*

👉 Alors on les détermine d'une façon itérative

✓ *1. Soit donné :*

$$\bar{H} = [-y_r(k-1) \quad \dots \quad -y_r(k-p) \quad u_p(k) \quad \dots \quad u_p(k-p)]$$
$$\bar{\theta} = [a_1 \quad \dots \quad a_p \quad b_0 \quad \dots \quad b_p]$$

1. Estimation du vecteur des paramètres Θ

$$\hat{\theta} = (H^T . H)^{-1} . H^T . \bar{y}$$

2. Calcul des résidus

$$\bar{r} = \bar{y} - \hat{y} = \bar{y} - H\bar{\theta}$$

3. On construit le filtre $C(Z^{-1})$ à partir du résidu r

$$\hat{C} = (R^T . R)^{-1} . R^T . \bar{r}$$

4. On filtre les données y et U pour obtenir y_r et u_r

$$\begin{cases} y_r(k) = C(Z^{-1}).y(k) = y(k) + \sum_{i=1}^n c_i y(k-i) \\ U_r(k) = C(Z^{-1}).U(k) = U(k) + \sum_{j=1}^m c_j U(k-j) \end{cases}$$

➡ 5. Connaissant y_r et U_r on forme un nouveau vecteur H pour calculer de nouveau Θ et on réitère l'opération

➡ 6. Quand s'arrêter ? Critère de convergence

✓ Soit S : le nombre d'itérations

✓ $C_i(Z^{-1})$: le filtre obtenu au i ème pas de calcul

✓ Le filtre global sera alors :

$$C(Z^{-1}) = \prod_{i=1}^S (C_i(Z^{-i}))$$

✓ Si n est l'ordre de chaque filtre C_i , l'ordre du filtre global $C(Z^{-1})$ est nS

✓ Si on veut avoir un filtre qui ne dépend que du nombre d'itérations on fixe $n=1$

Solutions pour la convergence

☞ On fixe le nbre d'itérations à priori

✓ *Procédure arbitraire*

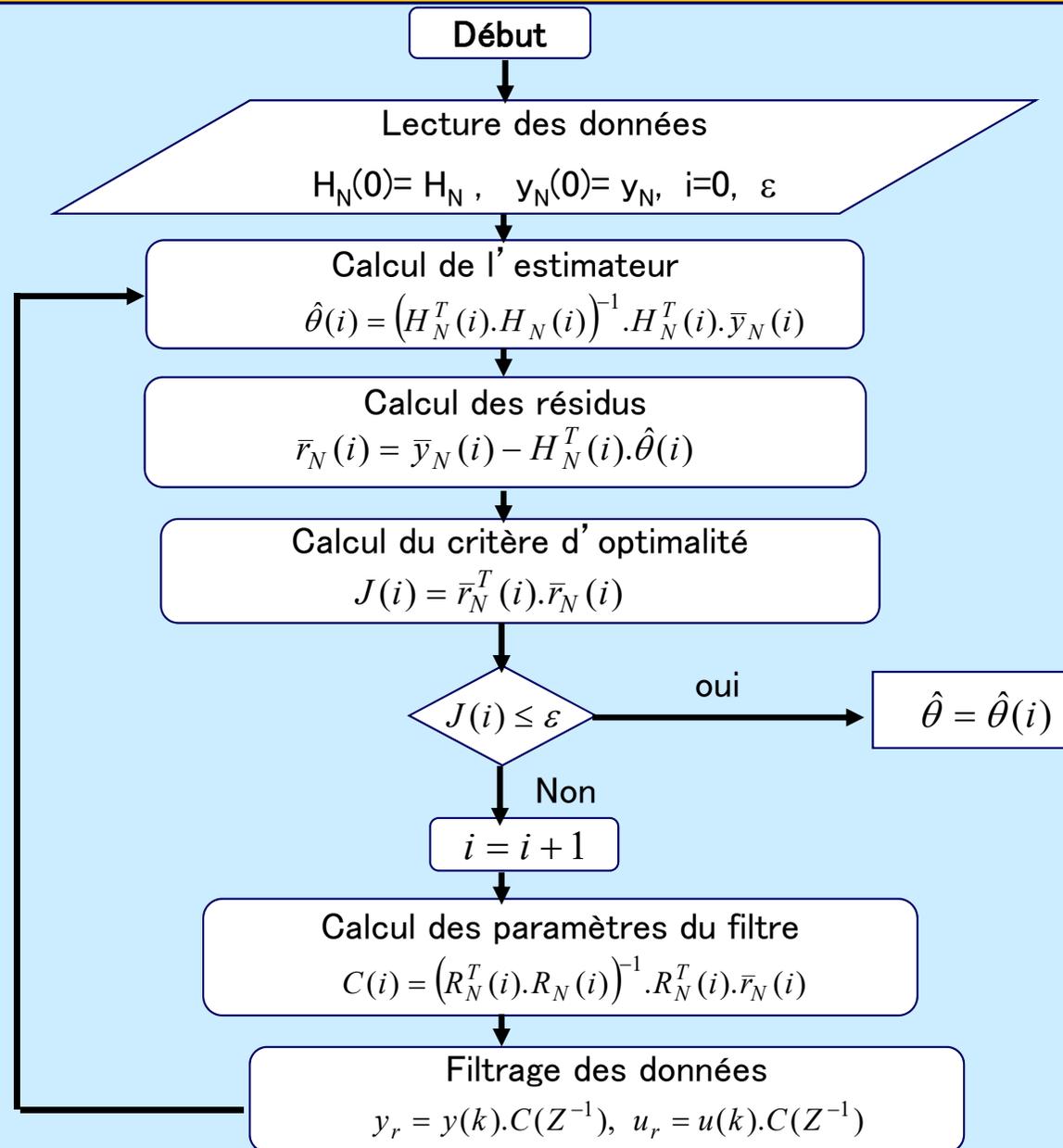
☞ Arrêt du programme quand les paramètres \underline{C} du filtre deviennent petits

✓ *Difficile à préciser numériquement*

☞ Arrêter quand $\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k+1) \rightarrow \varepsilon$

✓ *On s'arrête quand la diminution du critère n'est plus significative en général : $\Delta J/J < 1\%$*

Algorithme MCG



Étape de filtrage : 2 manières

☞ 1. Filtre d'ordre constant en filtrant tj le même jeu de données

$$y_{r(i)}(k) = y(k) + c_{1(i)}y(k-1) + \dots + c_{n(i)}y(k-n)$$

$$u_{r(i)}(k) = u(k) + c_{1(i)}u(k-1) + \dots + c_{n(i)}u(k-n)$$

✓ *Problème : choix de l'ordre de $C(Z^{-1})$*

☞ 2. Filtre d'ordre variable en filtrant les données précédemment filtrées

✓ *Cette approche consiste à mettre en série i filtres $C_i(Z^{-1})$ sur les données initiales*

$$y_{r(i)}(k) = y_{(i-1)}(k) + c_{1(i)}y_{(i-1)}(k-1) + \dots + c_{n(i)}y_{(i-1)}(k-n)$$

$$u_{r(i)}(k) = u_{(i-1)}(k) + c_{1(i)}u_{(i-1)}(k-1) + \dots + c_{n(i)}u_{(i-1)}(k-n)$$

✓ *Problème : coûteuse car on aura n mesures supplémentaires à chaque pas*

Diapositive 142

OB6

on a Interet alorsà choisir $n=1$ ce qui permet d'obtenir un filtre dont l'ordreaugmente à chaque pas. L'ordre final dépendant du nombre d'itérations et n'étant plus arbitraire. L'autre avantage de prendre $n=1$ et de supprimer l'inversion de la matrice $RnT(i).RN(i)$ qui devient scalaire

OULD BOUAMAMA; 12/10/2004

Conclusions

👉 Inconvénient

- ✓ *Introduction d'un grand nbre de données à la fois*
- ✓ *Nécessite l'inversion de la matrice C (de grandes dimensions)*

👉 Avantages

- ✓ *Performante surtout dans le cas d'un signal riche (SBPA)*
- ✓ *Si les paramètres statistiques du bruit sont connus, le filtre $C(Z^{-1})$ est parfaitement déterminé : on a alors directement un estimateur sans biais des coefficients de $A(Z^{-1})$, $C(Z^{-1})$ et $B(Z^{-1})/C(Z^{-1})$ donc des coefficients de la FT du modèle*

Différents types de modèle

1. *Modèle ARX (AutoRégressive à Entrée Exogène)*

$$F(Z^{-1}) = \frac{1}{C(Z^{-1})} = 1$$

✓ Modèle utilisé pour la MMC simple. Équation de récurrence

$$y(k) = \frac{B(Z^{-1}) \cdot Z^{-d}}{A(Z^{-1})} u(k) + e(k)$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{nb} b_j u(k - j - d) - \sum_{i=0}^{na} a_i y(k - i) + e(k)$$

✓ Paramètres à déterminer :

- na : nombre de pôles,
- $nb-1$: nombre de zéros
- d : le retard pur

Différents types de modèle

☞ 2. Modèle ARMAX (AutoRégressive à Moyenne Ajustée et entrée exogène)

$$F(Z^{-1}) = \frac{1}{C(Z^{-1})} = 1 + c_1 Z^{-1} + \dots + c_{nc} Z^{-nc}$$

✓ Équation de récurrence

$$y(k) = \sum_{j=0}^{nb} b_j u(k-j-d) - \sum_{i=0}^{na} a_i y(k-i) + \sum_{l=1}^{nc} c_l e(k-l)$$

✓ Paramètres à déterminer :

- na : nbre de pôles,
- $nb-1$: nbre de zéros
- d : le retard pur
- nc : ordre du modèle de la dynamique du filtre

Différents types de modèle

☞ 3. Modèle OE (Output-Error) basé sur l'erreur de sortie

$$F(Z^{-1}) = \frac{1}{C(Z^{-1})} = 1$$
$$A(Z^{-1}) = 1$$

✓ Équation de récurrence

$$y(k) = \sum_{j=0}^{nb} b_j u(k-j-d) - \sum_{i=0}^{nf} a_i y(k-i) + e(k)$$

✓ Paramètres à déterminer :

- $nb, d, \text{ et } nf$

Différents types de modèle

☞ 4. Modèle BJ (Box Jenkins)

- ✓ Modèle utilisé pour distinguer la dynamique du modèle et du générateur du résidu

$$y(k) = \frac{B(Z^{-1})}{F(Z^{-1})} Z^{-d} u(k) + \frac{C(Z^{-1})}{D(Z^{-1})} e(k)$$

- ✓ Paramètres à déterminer :
 - nb, nf, nc, nd et d

METHODES RECURSSIVES

👉 Limites de la MMC simple

👉 Principe de la RLST

$\underline{\Theta}_{opt.(N+1)}$	Estimateur optimal tenant compte des $N + 1$ observations.
$\underline{\Theta}_{opt.(N)}$	Estimateur optimal tenant compte des N précédentes observations.
Y_{N+1}	la $(N + 1)$ ème observation.

✓ *Alors l'estimateur, tenant compte des $(N+1)$ observations sera :*

$$\underline{\Theta}_{opt.N+1} = \underline{\Theta}_{opt.N} + K_{N+1} \cdot \left(Y_{N+1} - \underline{H}_{N+1}^T \cdot \underline{\Theta}_{opt.N} \right)$$

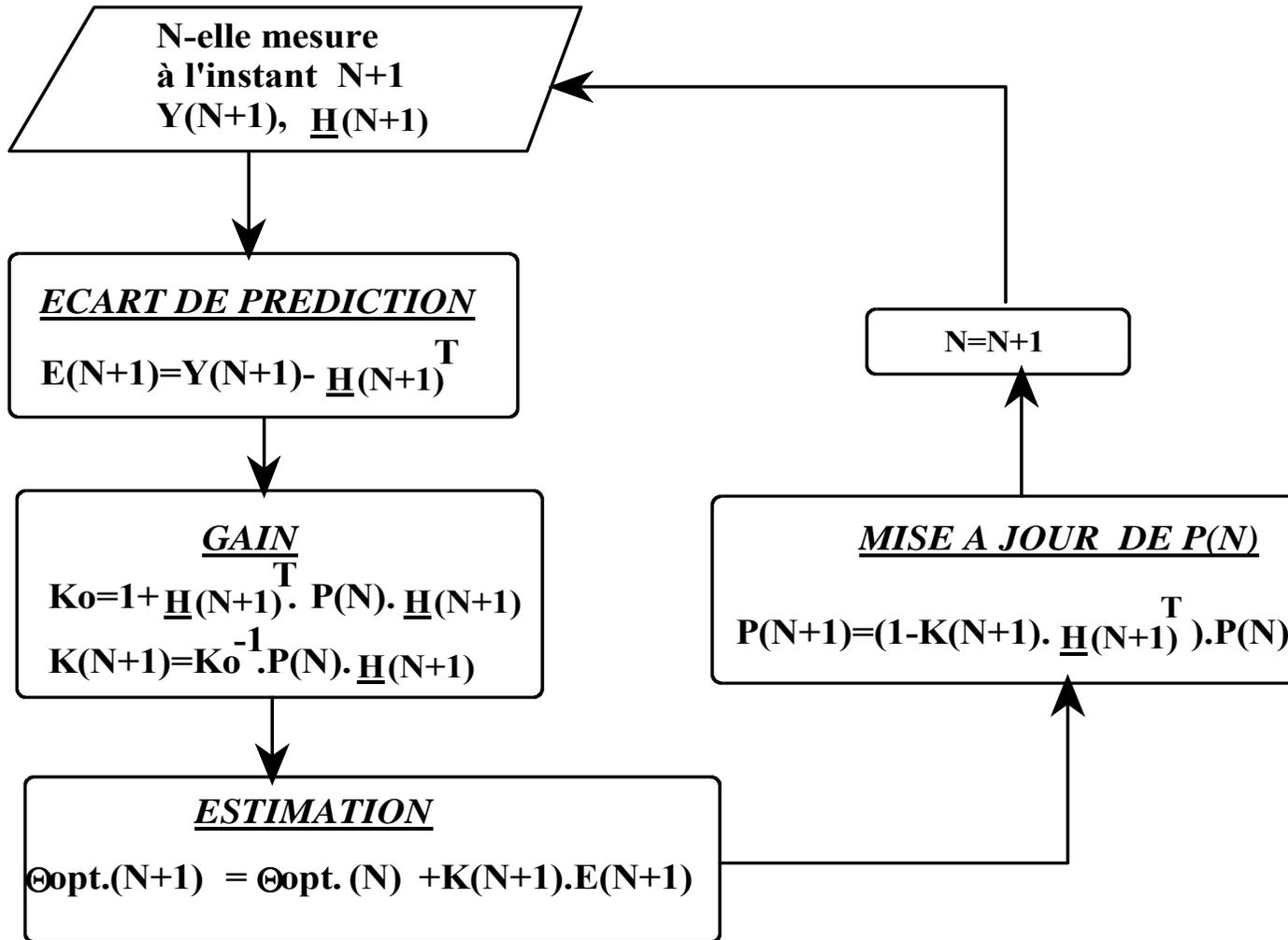
👉 *L'estimateur de la nouvelle mesure*

$$\underline{H}_{N+1}^T \cdot \underline{\Theta}_N = Ym_{N+1}$$

👉 *Le gain d'adaptation ou facteur de pondération de la mise à jour apportée par la nouvelle mesure*

$$K_{N+1} = \left(\underline{H}_N^T \cdot \underline{H}_N \right)^{-1} \cdot \underline{H}_{N+1} \cdot \left[1 + \underline{H}_{N+1}^T \cdot \left(\underline{H}_N^T \cdot \underline{H}_N \right)^{-1} \cdot \underline{H}_{N+1} \right]^{-1}$$

ALGORITHME RLST



$$P_N = (H_N^T \cdot H_N)^{-1}, \text{ et}$$

$$P_{N+1} = (1 - K_{N+1} \cdot H_{N+1}^T) \cdot P_N$$

INITIALISATION DE L'ALGORITHME

➡ $P(0) = \text{diag}(1000); \Theta(0)=0.$

➡ PROBLEME DE DECROISSANCE DU GAIN

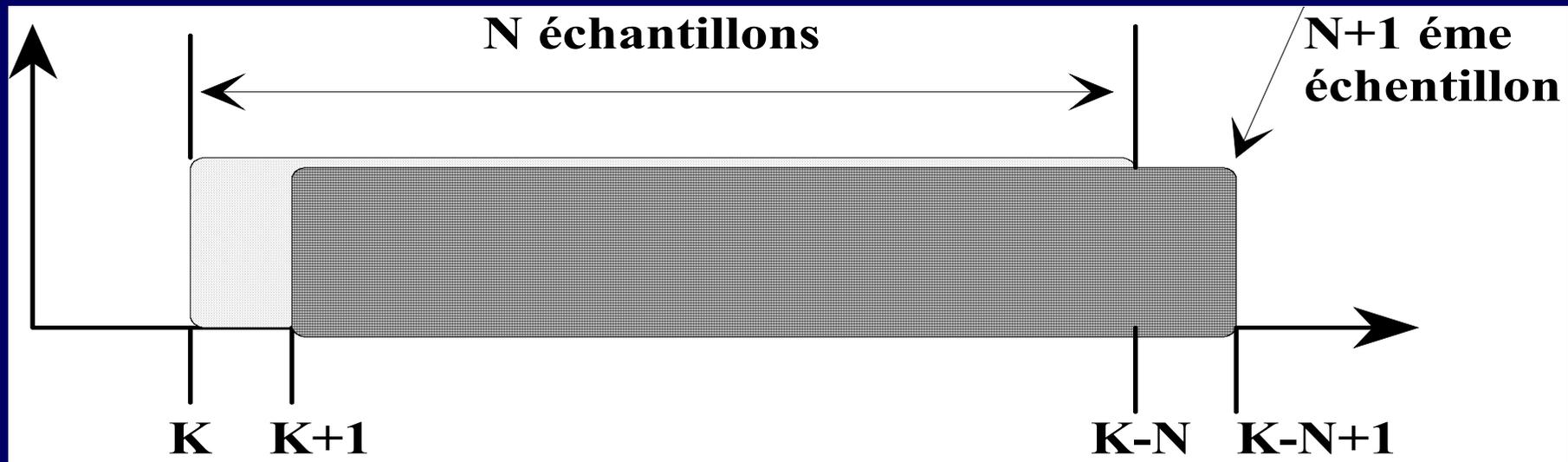
$$P_{N+1} = \frac{P_N}{1 + H_{N+1}^2 \cdot P_N} \leq P_N$$

➡ Inconvénient de la RLST

MMC AVEC FENETRE GLISSANTE

👉 PRINCIPE :

- ✓ *Tronquer les observations à travers une FENETRE de largeur N constante que l'on "glisse" au fur et à mesure que les échantillons arrivent*



👉 Estimateur optimal

$$\hat{\Theta}_{K+1} = \hat{\Theta}_K + P_{K+1} \cdot \left[H_{K+1}^T \cdot \left(\frac{Y_{K+1} - H_{K+1} \cdot \hat{\Theta}_K}{\quad} \right) - H_{K-N}^T \cdot \left(\frac{Y_{K-N} - H_{K-N} \cdot \hat{\Theta}_K}{\quad} \right) \right]$$

- ✓ *La formule met en évidence la contribution dans la nouvelle estimée de l'enrichissement dû à l'observation à l'instant K+1 d'une part et de la contribution de la K-N ième observation qui doit être retranchée d'autre part de l'estimation précédente.*

👉 Limite de la méthode

MMC AVEC FACTEUR DE PONDERATION

👉 Principe

✓ CRITERE CLASSIQUE PONDERATION HOMOGENES DES E_i

$$J(\Theta) = E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_N^2 = \underline{E}^T \cdot \underline{E}$$

✓ Pondération des erreurs

$$J(\Theta) = \lambda_1 E_1^2 + \lambda_2 E_2^2 + \dots + \lambda_N E_N^2 = \underline{E}^T \cdot \underline{W} \cdot \underline{E}$$

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \text{ Matrice de pondération définie } > 0$$

☞ Choix de la pondération

✓ *On recommande progression géométrique*

$$\lambda^i (i = 0, 1 \dots N)$$

✓ $\lambda < 1$: Favorise les premières mesures (Facteur d'oubli);

✓ $\lambda > 1$: Favorise les dernières mesures par rapport aux premières

☞ Critère d'optimalité

$$J(\underline{\Theta}) = (\underline{Y} - H\underline{\Theta})^T \cdot W (\underline{Y} - H\underline{\Theta})$$

$$\frac{\partial J(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} = 2H^T W H \underline{\Theta} - \underline{Y}^T W H - H^T W \underline{Y} = 0$$

$$\underline{\Theta}_{opt} = (H^T W H)^{-1} \cdot H^T W \underline{Y}$$

👉 RLST AVEC FACTEUR DE PONDERATION

$$\hat{\Theta}_{N+1} = \hat{\Theta}_N + K_{N+1} \cdot \left(Y_{N+1} - \underline{H}_{N+1}^T \cdot \hat{\Theta}_N \right)$$

$$K_{N+1} = P_N \cdot H_{N+1} \cdot \left(1 + \underline{H}_{N+1}^T \cdot P_N \cdot \underline{H}_{N+1} \right)^{-1}$$

$$P_N = \left(H_N^T \cdot W \cdot H_N \right)^{-1}$$

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. INTRODUCTION AU TRAVAIL PRATIQUE	3
1.1. But du TP	3
1.2. Organisation des TPs	3
I METHODES DE BASE	4
CHAPITRE 2. IDENTIFICATION EN BOUCLE OUVERTE	5
2.1. Questions relative à l'identification en boucle ouverte	5
CHAPITRE 3. IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE	6
3.1. Questions relative à l'identification en boucle fermée	6
II METHODES DES MOINDRES CARREES : Etude de la boîte à outil "ident"	7
CHAPITRE 4. MANIPULATION DES DONNÉES	8
4.1. Représentation des données	8
4.2. Syntaxe	8
4.3. Interface graphique	9
4.4. Comment introduire les données expérimentales ? : import data	9
4.5. Analyse et examen des données : Data Views	11
4.6. Traitement préliminaire des données	12
4.6.1. Suppression des valeurs moyennes : Remove trends ou Remove means	12
4.6.2. Sélection d'une partie des données : select data Range	13
4.6.3. Filtrage préliminaire : Filter	13
4.6.4. Rééchantillonnage : Resampling	14
4.6.5. Démarrage rapide : Quickstart	14
4.6.6. Fusion de d'expériences multiple : Merge Experiments	14
CHAPITRE 5. ESTIMATION	16
5.1. Estimation de la réponse impulsionnelle	16
5.2. Estimation paramétrique des modèles	16
5.2.1. Interprétation de la structure du modèle	17

CHAPITRE 6. QUESTIONS RELATIVES À L'IDENTIFICATION À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES MMC	27
ANNEXE A. COURBES EXPÉRIMENTALES	28

Chapitre 1

INTRODUCTION AU TRAVAIL PRATIQUE

1.1 But du TP

Le but de ce TP est la mise en oeuvre des méthodes d'identification des systèmes en utilisant principalement le logiciel MATLAB et la boîte à outil "IDENT" . Le travail pratique sera réalisé en trois parties :

1.2 Organisation des TPs

1. Séance 1 : Etude des méthodes de base

Le but est d'identifier les réponses types (indicielles, impulsionnelles, ..) expérimentales en utilisant les méthodes de base étudiées en cours. On demandera alors de développer un programme sur Matlab en fichier .m afin de valider le modèle. Les méthodes en boucle fermée seront aussi étudiées.

2. Séance 2 : Etude des méthodes des moindres carrées

Les données expérimentales utilisées pour identifier le système sur la base des méthodes de base seront traités à l'aide des méthodes des moindres carrées (simple, récursives,) à l'aide de la boîte à outil "IDENT". Une description détaillée de la boîte à outil sera exposée.

3. Séance 3 : Synthèse des méthodes réalisées

Cette séance sera consacrée à la synthèse des résultats obtenus dans les séances 1 et 2. On demandera alors d'organiser les outils logiciels développés de façon à les exposer avec une analyse des résultats. Une note sera attribuée à l'exposé orale et au produit réalisé.

Première partie
METHODES DE BASE

Chapitre 2

IDENTIFICATION EN BOUCLE OUVERTE

Les réponses indicielles de procédés différents sont données en annexe A. Les données numériques sont données sous forme d'un fichier.mat par l'enseignant en charge du TP. Ces fichiers sont **Datai.m** (i est le numéro du fichier).

2.1 Questions relative à l'identification en boucle ouverte

1. Examiner les réponses expérimentales
2. Fixer une structure du modèle et appliquez une méthode adéquate pour l'identification du système
3. Trouvez alors les paramètres du modèle (fonction de transfert)
4. Réalisez un programme sur Matlab et validez votre modèle

Chapitre 3

IDENTIFICATION EN BOUCLE FERMÉE

L'identification en boucle ouverte est considérée dangereuse car on doit perturber le fonctionnement du système. De plus les régulations sont hors service. Les méthodes en boucle fermée sont réalisées alors que le système est en plein fonctionnement, il suffit juste de ramener le procédé à la limite de stabilité et identifier les paramètres en appliquant un certain nombre de méthodes (cf. cours d'identification).

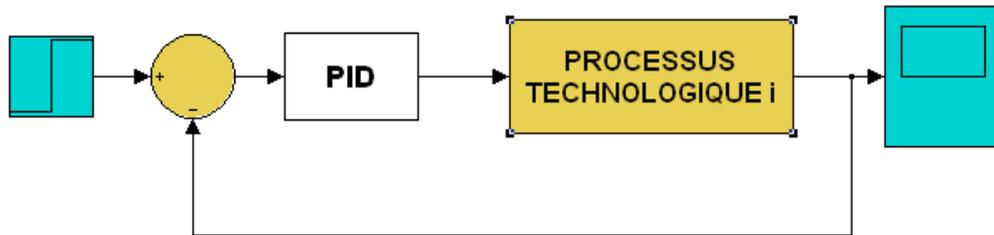


FIG. 3.1. Identification en boucle fermée

3.1 Questions relative à l'identification en boucle fermée

1. Réalisez sur SIMULINK un schéma de régulation avec un procédé de dynamique considérée inconnue (fig. 3.1) . La dynamique du **procédé i** sera fournie par le professeur en charge du TP
2. Utilisez la méthode de Strèje ou de Broida pour identifier les paramètres du modèle
3. Trouvez alors les paramètres du modèle (fonction de transfert)
4. Réalisez un programme sur Matlab et validez votre modèle en le comparant avec les sortie en boucle ouverte du procédé

Deuxième partie

METHODES DES MOINDRES CARREES : Etude de la boîte à outil "ident"

Chapitre 4

MANIPULATION DES DONNÉES

4.1 Représentation des données

Dans la boîte à outil du système d'identification, les signaux entrées-sorties sont représentés comme des vecteurs colonnes :

$$u = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \dots \\ \ddots \\ u(N) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ \ddots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

N est le nombre des échantillons échantillonnés avec une même valeur d'échantillonnage T .

Dans le cas d'une système multivariable u sera une matrice

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & \dots & u_m \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où m est le nombre de colonne égal au nombre d'entrées.

4.2 Syntaxe

Les données observées sont représentées dans la boîte à outil par un objet **iddata** créé à partir des signaux E/S par :

$$exo_data = iddata(y, u, Ts) \quad (4.4)$$

y : sont les données de sortie

u : entrées

Ts : période d'échantillonnage

4.3 Interface graphique

Etant donné que la base de l'identification est le traitement de données (data) en vue d'obtenir un modèle, l'interface graphique de la boîte à outil est composée de deux parties (fig. : données (DATA) et modèles (Models)).(fig. 4.1

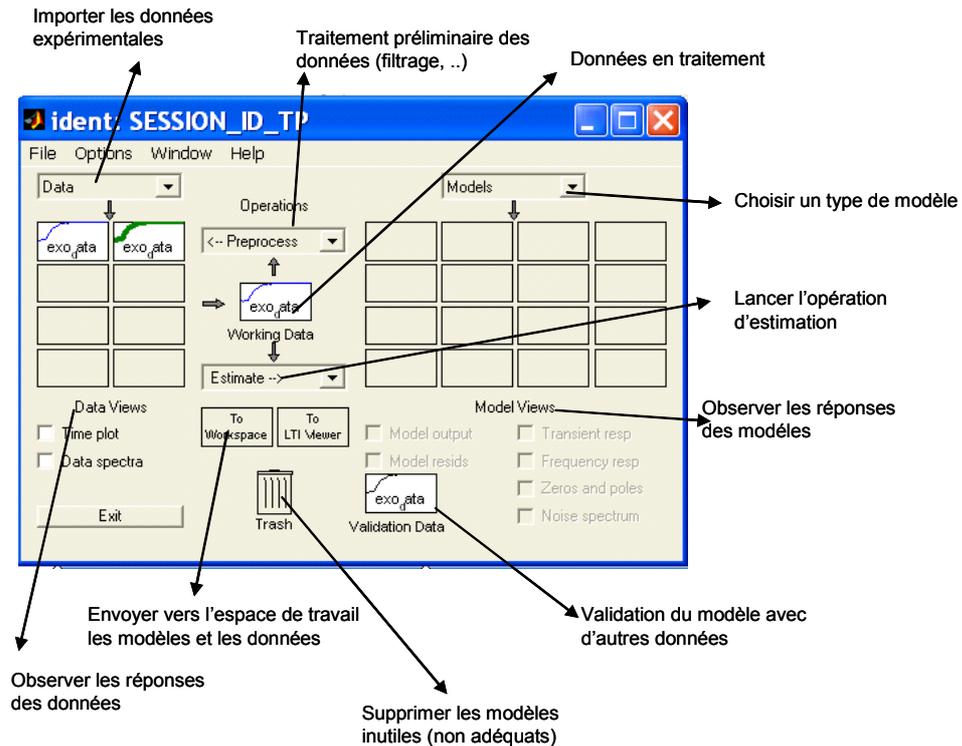


FIG. 4.1. Interface graphique de la boîte à outil

4.4 Comment introduire les données expérimentales? : import data

Trois possibilités :

1. Ouvrir une session existante enregistrée déjà (*.sid)
2. Importer des données à partir de l'espace de travail
3. Créer les données en les filtrant, ..

Les informations concernant les données à importer sur l'interface graphique sont :

- Les entrées et sorties du signal (exemple u et y dans notre cas, voir équation 4.4)
- Le nom donné à l'objet (ensemble des données) **exo_data**
- Le pas d'échantillonnage : $T_s=0.1$

Pour importer les données on sélectionne dans le menu déroulant **Data** et on choisit **Import** (fig.4.1). L'interface de la figure 4.2 apparaît.

FIG. 4.2. Importer des données

On peut ajouter d'autres informations (nom des entrées et sorties, les unités des variables etc...) en cliquant sur more de l'interface précédente.

Data name : Nom de l'ensemble des données introduite. Ce nom peut être changé plus loin

Starting time and Sampling interval : Permet de corriger l'échelle du temps et de la fréquence des graphes.

Period : Si l'entrée est périodique entrez la période sinon "inf" est introduite par défaut (entrée non périodique)

Intersample : Choisir le type d'échantillonnage des données, par défaut est mis un bloqueur d'ordre zero : **ZOH** (la valeur du signal d'entrée u est constante entre

deux instants d'échantillonnage T_s et $2 \cdot T_s$). On peut fixer un bloqueur d'ordre un (**FOH**) : u est linéaire par morceau entre deux instants d'échantillonnage. **BL** est mis si le signal d'entrée continu n'a pas de puissance en dehors de la fréquence de Nyquist.

Notes : permet d'introduire des commentaires

Pour importer cliquez sur **IMPORT** pour insérer les données dans l'interface graphique. **Reset** réinitialise le système en supprimant les données. On obtient alors le graphe des données E/S (fig.4.3)

La procédure va alors créer un objet **iddata** avec toutes les propriétés introduites. Si on a déjà un objet **iddata** on peut l'importer directement à partir de l'espace de travail (workspace) en sélectionnant dans le menu déroulant de **Import data** le format **iddata object**

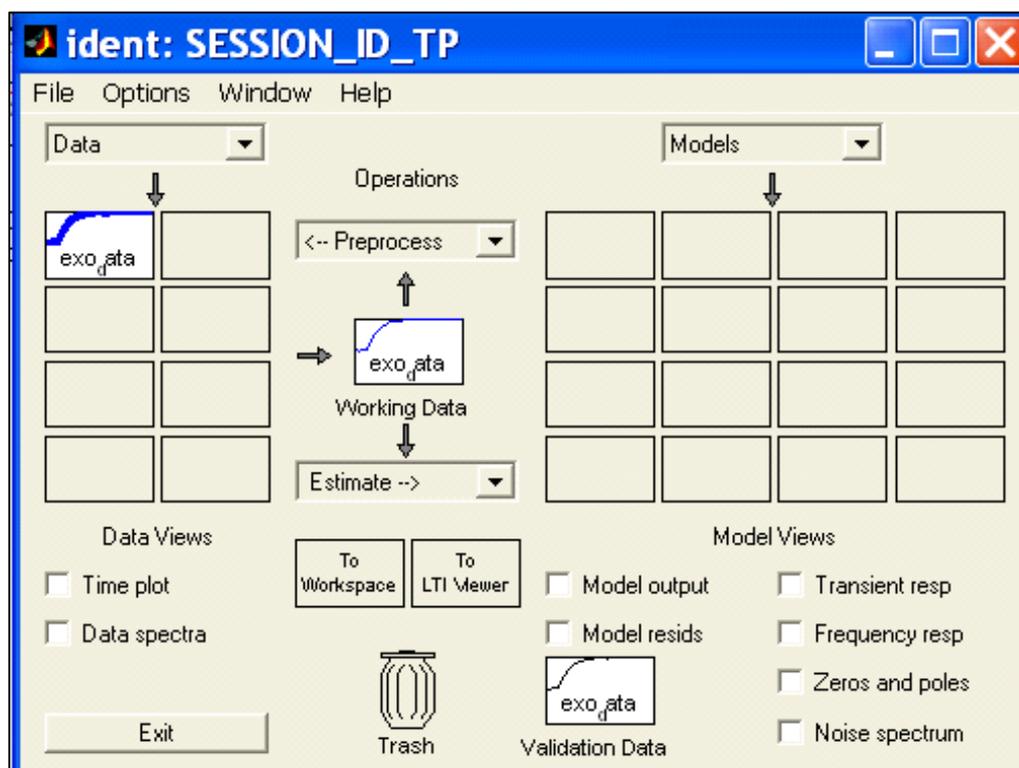


FIG. 4.3. Importation des données dans l'interface

4.5 Analyse et examen des données : Data Views

Après avoir inséré les données, il faut examiner l'allure des données à l'aide des réponses temporelles ou fréquentielle en sélectionnant l'option **Time Plot** ou **Data**

Spectra (au dessous de la partie **Data Views**) (fig.4.4). Les réponses fréquentielles peuvent être changées à l'aide du menu option dans la fenêtre data spectra.

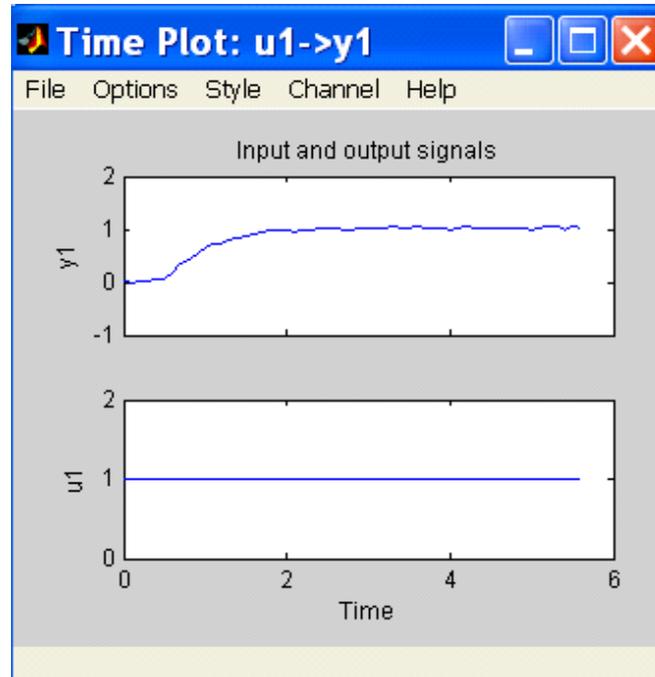


FIG. 4.4. Vues des réponses temporelles et fréquentielles des données

Le but de l'analyse de ces courbes est de vérifier s'il n'existe pas une partie des données qui ne sont pas adaptées à l'identification (tronquées, trop bruitées, ...) ou examiner les paramètres intéressants pour l'opération (fréquences critiques).

4.6 Traitement préliminaire des données

Avant de lancer la procédure d'estimation, il est recommandé de subir un traitement préliminaire aux données.

4.6.1 Suppression des valeurs moyennes : Remove trends ou Remove means

Permet de supprimer les valeurs moyennes. Il est recommandé de lancer au moins cette opération (en sélectionnant à partir du menu déroulant **Preprocess Remove Means** ou **Remove Trends**) avant la phase d'estimation des paramètres.

4.6.2 Sélection d'une partie des données : select data Range

Si quelques données sont omises (du à un problème pendant l'expérience) ou trop de perturbations sont présentes alors il est conseillé de sélectionner uniquement une partie des données à traiter par **Preprocess>Select Range**. Il suffit alors à l'aide de la souris de sélectionner par un rectangle les données qui nous paraissent importantes (fig. 4.5).

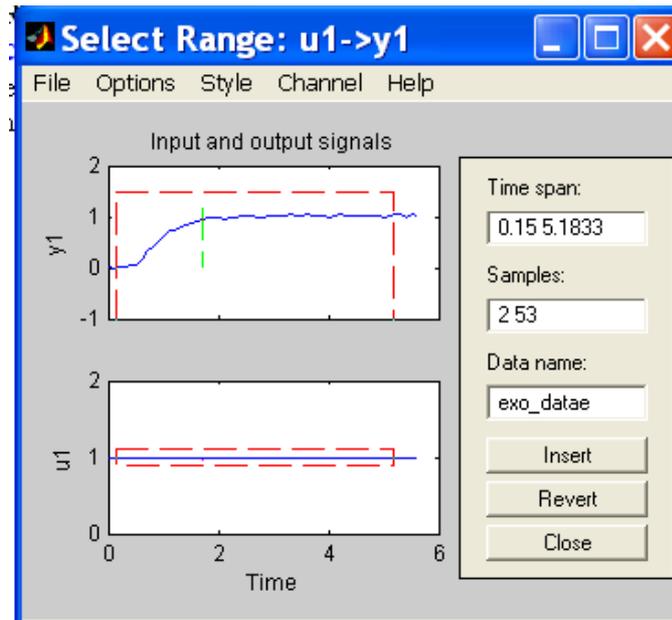


FIG. 4.5. Sélection des données

On peut aussi dans le cas multivariable sélectionner une entrée particulière ou un ensemble d'entrées par : **Preprocess>Channels**

4.6.3 Filtrage préliminaire : Filter

Le préfiltrage est important pour supprimer les bruits à hautes fréquences à partir de la bande passante

En filtrant les données avec un même filtre, on supprime les dérives du signal et les effets indésirables des perturbations à hautes fréquence. ceci n'affecte pas évidemment la phase de l'estimation du modèle. Le filtrage est réalisé par : **Preprocess> Filter**. La fenêtre de la figure 4.6 est ouverte.

On sélectionne alors sur la courbe fréquentielle la bande passante puis on vérifie l'effet du filtrage par "**Filter**". Si l'effet est satisfaisant alors on confirme par "**insert**" (cf. fig. 4.6). Les données sélectionnées sont alors insérées dans les données de travail.

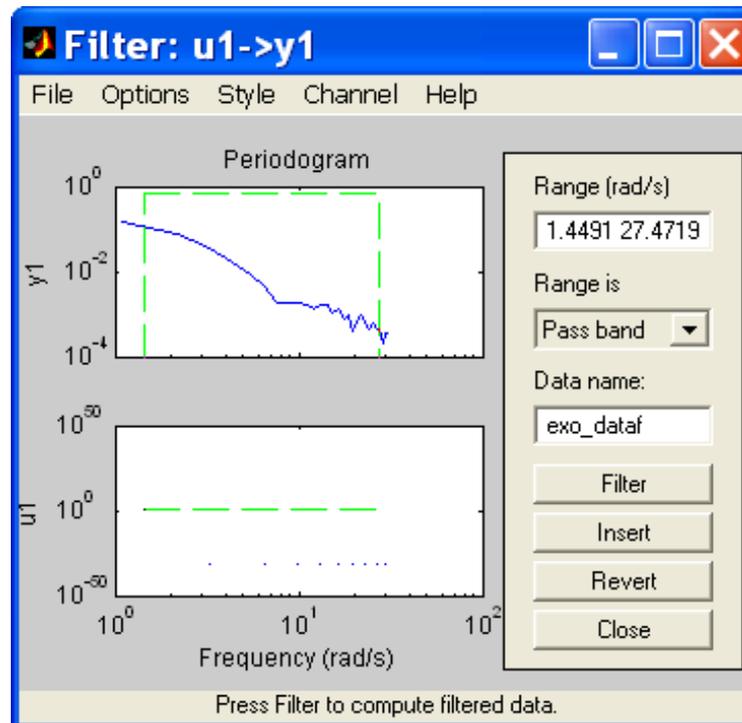


FIG. 4.6. Filtrage des données

4.6.4 Rééchantillonnage : Resampling

On peut rééchantillonner les données par : **Preprocess**> **Presampling**

4.6.5 Démarrage rapide : Quickstart

Le menu déroulant "**Preprocess**> **Quickstart**" exécute les opérations suivantes :

- Ouvrir la réponse temporelle des données (**Time Plot view**)
- Supprimer les valeurs moyennes du signal
- diviser ces données en deux parties : la première partie est insérée comme données de travail et la seconde comme données de validation.

Ces données pourront servir comme support pour l'estimation et la validation du modèle.

4.6.6 Fusion de d'expériences multiple : Merge Experiments

Si plusieurs jeux de données issus d'expériences différentes sont disponibles, alors il est intéressant de les fusionner en une seule. Quelques-unes peuvent aussi être issues d'une partie d'expériences obtenues par "select Data range" (voir paragraphe plus

haut). L'instruction est obtenu du menu déroulant : **Preprocess**> **Merge Experiments**

Chapitre 5

ESTIMATION

L'estimation des modèles à partir des données expérimentales (prétraitées comme expliqué plus haut) est l'activité centrale de la boîte à outil de l'identification. Toutes les fonctionnalités sont accessibles à partir du menu déroulant **Estimate** (fig.4.1).

Les modèles estimés sont déduits à partir des données qui sont dans la boîte des données de travail (**Working Data**).

On distingue deux types de méthodes d'estimation :

- Estimation directe de la réponse impulsionnelle ou de la réponse fréquentielle. Ces méthodes sont dites non paramétriques, la structure du modèle est supposée linéaire.
- Méthodes paramétriques. Une structure spécifique du modèle est fixée. Les paramètres du modèle sont estimés à partir de cette structure en utilisant les données expérimentales. Globalement les modèles sont déduits sous forme d'équation d'état ou d'équations aux récurrences.

L'identification est dite paramétrique, si elle consiste à la détermination d'un ensemble de valeurs constantes (Paramètres de) (fonctions de transfert) . Elle est par contre dite non paramétrique, si elle a pour but déterminer une fonction continue du temps (caractéristique transitoire) ou de fréquences (caractéristiques fréquentielles)

5.1 Estimation de la réponse impulsionnelle

Un système linéaire peut être décrit par une réponse impulsionnelle g_k , avec la propriété telle que :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (g_i u(t - i)) \quad (5.1)$$

En choisissant le menu déroulant **Estimate>Correlation Model** les coefficients de la réponse impulsionnelle sont estimés directement à partir des données E/S ; en utilisant la réponse impulsionnelle. La réponse impulsionnelle identifiée est affichée avec le nom par défaut **imp**. Ce nom peut être changé en double cliquant sur l'icône du modèle.

5.2 Estimation paramétrique des modèles

Un ensemble de structures des modèles linéaires est proposé dans le menu déroulant **Estimate>Parametric Models**. La boîte de dialogue suivante (fig 5.1) est

affichée)

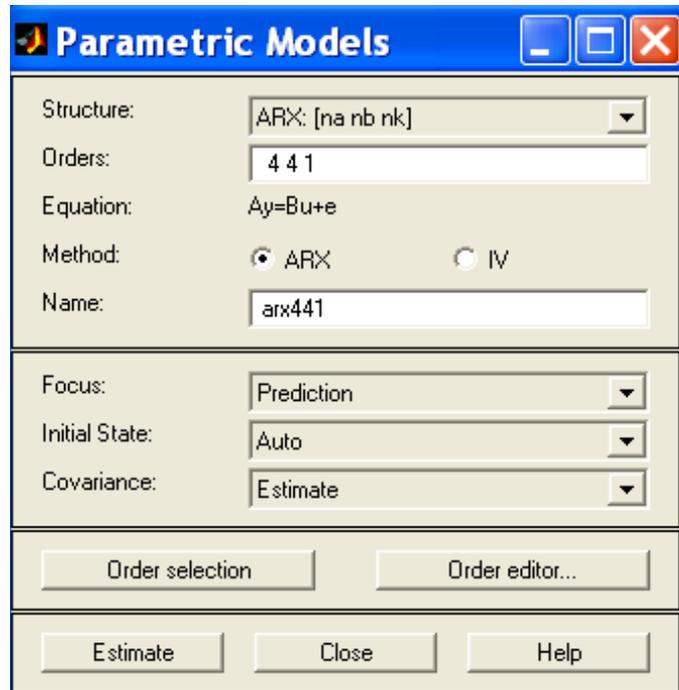


FIG. 5.1. Boite de dialogue pour l'estimation à l'aide des modèles paramétriques

Cette boite de dialogue fonctionne comme suit

- En sélectionnant **estimer (estimate)**, un modèle est estimé à partir des données de travail (working data) (données importées et en fonctionnement).
- La structure de ce modèle est définie par le menu déroulant **Structure** ensemble avec le menu "**Orders**" et le nom de la méthode, c.-à-d. si on sélectionne un modèle $ARX[na\ nb\ nk]$, on peut définir les ordres (définis plus bas dans le texte) de na, nb et nk (exemple 4 4 1) le nom ARX441 sera affiché. Par défaut les ordres 4, 4 1 sont proposés. *Remarque : Evitez d'introduire un nom avec un espace si vous devez exporter le modèle.*

5.2.1 Interprétation de la structure du modèle

Les entiers [na nb nk] dans la boite "orders" dépendent de la **structure** choisie dans le menu. La structure du modèle étant choisie, la détermination des paramètres du modèle peut se faire suivant deux classes de méthodes : celle basée sur l'**erreur de sortie** (fig.5.2a) ou celle basée sur l'**erreur d'équation ou de prédiction** (fig. 5.2b).

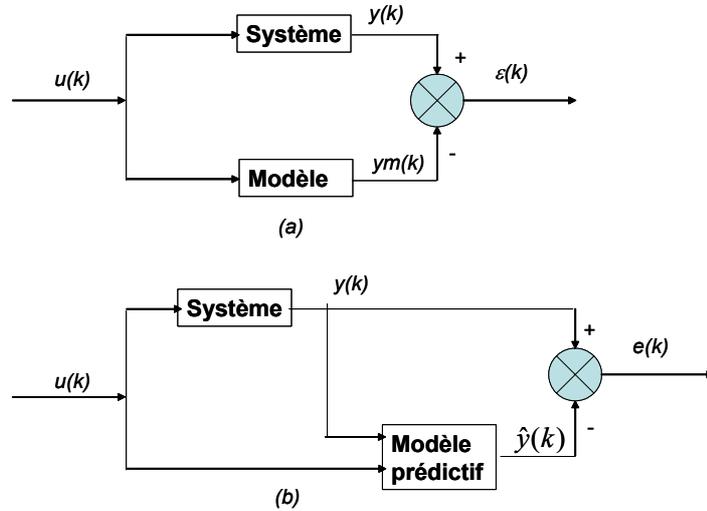


FIG. 5.2. Estimation selon l'erreur de sortie (a) et l'erreur d'équation ou de prédiction (b)

Si l'on suppose que le modèle cherché y_m est une équation de récurrence de la forme :

$$y_m(k) + a_1 y_m(k-1) + \dots + a_n y_m(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u_m(k-n) \quad (5.2)$$

le modèle prédictif sera :

$$\hat{y}(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{nb} u_m(k-nb) - a_1 y(k-1) - \dots - a_{na} y(k-na) \quad (5.3)$$

Supposons que le système est bruité et que le bruit $e(k)$ agit à l'entrée (fig.5.3) du système on pose :

$$u(k) = u_b(k) + e(k) \quad (5.4)$$

on peut écrire alors après quelques transformations et en supposant que la sortie est affectée d'un retard pur n_k :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1}).z^{-n_k}.u(k - n_k) + e(k) \quad (5.5)$$

où A et B sont des polynômes en z^{-1}

Les différents types de modèles seront obtenus en fonction du type de modélisation du résidu $e(k)$ qui est le résultat du filtrage d'un bruit blanc $V(k)$ (fig.5.4)

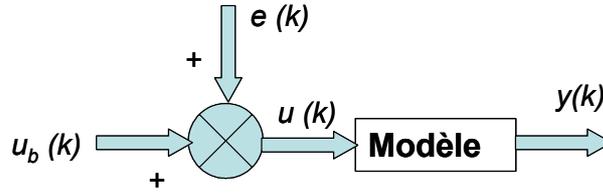


FIG. 5.3. Bruit agissant à l'entrée du système

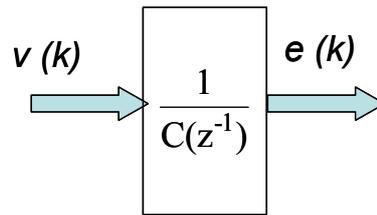


FIG. 5.4. Génération du résidu

Différents types de modèles La structure du modèle sera définie en fixant le retard pur et les ordres des polynômes c.-à-d. le nombre de pôles et de zéros de la dynamique du modèle de u vers y ainsi que de la perturbation (bruit e) vers y .

1. Modèle ARX AutoRégressive à entrée eXogène : $\mathbf{A}y = \mathbf{A}u + e$

Dans ce cas on pose $C(z^{-1}) = 1$. On retrouve alors la méthode des moindres carrés classique simple les paramètres du modèle minimisant $e(k)$. On doit alors déterminer les paramètres du modèle suivant :

$$y(k) = \frac{B(z^{-1}) \cdot z^{-n_k}}{A(z^{-1})} \cdot u(k) + e(k) \quad (5.6)$$

ou sous forme de récurrence

$$y(k) = \sum_{j=0}^{n_b} b_j u(k - j - n_k) - \sum_{i=0}^{n_a} a_i y(k - i) + e(k) \quad (5.7)$$

Les paramètres du modèle **ARX** donné sous forme fréquentielle sont trois entiers : n_a : le nombre de pôles, $n_b - 1$: le nombre de zéros et n_k le retard pur (voir fig. 5.1).

– Estimation des paramètres

Plusieurs combinaisons des ordres du modèle ARX peuvent être introduites. Alors les modèles obtenus sont comparés aux observations réelles, en double cliquant sur

ModelOutput. On obtient les courbes (fig.5.5 Les ordres sélectionnés sont affichés (à gauche de la figure)

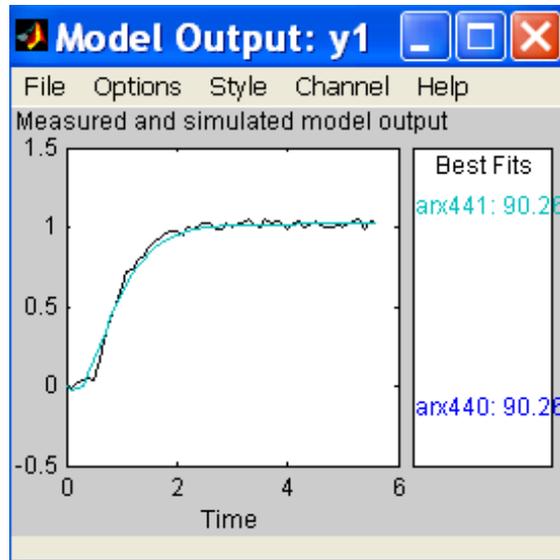


FIG. 5.5. Comparaison entre le modèle ARX sélectionné et les observations réelles

– **Information sur le modèle obtenu**

Les informations sur le modèle : les valeurs des coefficients de $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ sont affichées en double cliquant sur l'icône du modèle de travail ou en cliquant sur la partie droite de la souris). La fenêtre de la figure 5.6 est alors proposée à l'utilisateur.

– **Comment travailler avec le modèle sur l'espace de travail**

Afin de réutiliser le modèle, on glisse avec la souris vers "**To Work Space**". Il suffit alors d'appliquer n'importe quel instruction de Matlab. Sur l'espace de travail tapez le nom du modèle : *exemple arx441* , on obtient les informations (fig.5.7) nécessaires.

On peut aussi obtenir à partir de ce modèle d'autres représentation :

- Transformer le modèle discret en continu : $d2c(arx441)$
- Convertir vers l'espace d'état : $ss(arx441)$
- Transformer vers une forme de fonction de transfert discrète : $tf((arx441)$

vers

dans notre exemple de type `ssdata`, `tfddata`, `d2c`

2. Modèle ARMAX : $AY = Bu + Ce$

Le modèle Auto Régressive à Moyenne Ajustée et entrée eXogène) est obtenu en posant

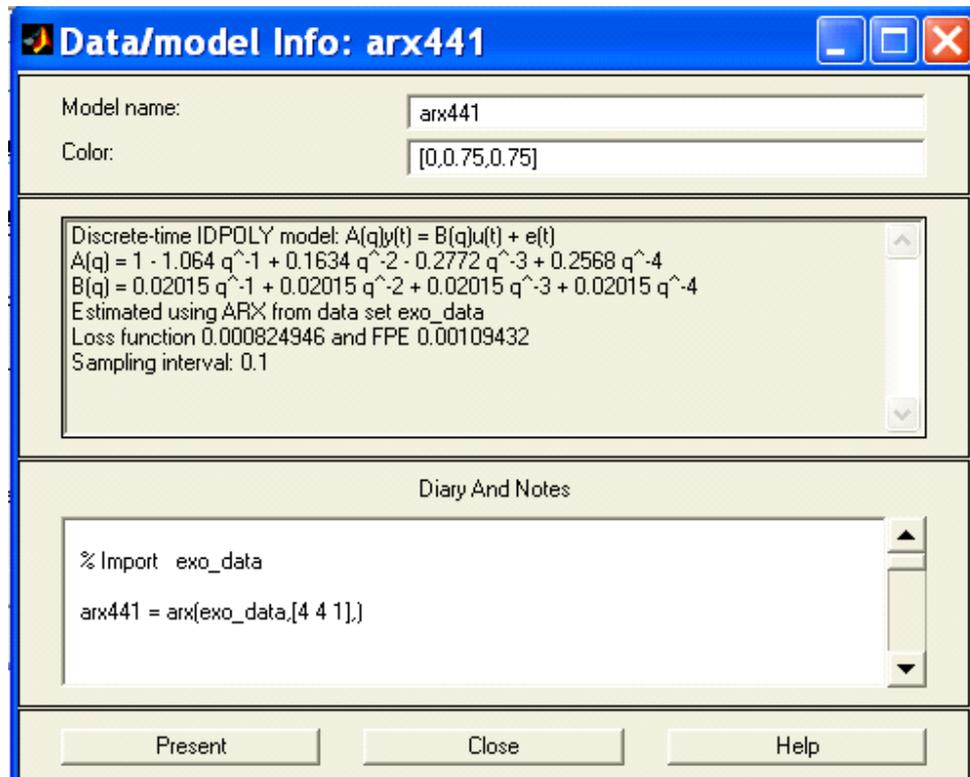


FIG. 5.6. Informations sur le modèle sélectionné

$$\frac{1}{C(z^{-1})} = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{nc} z^{-nc} \quad (5.8)$$

Le modèle sous forme récurrent sera alors :

$$y(k) = \sum_{j=0}^{nb} b_j u(k-j-n_k) - \sum_{i=0}^{na} a_i y(k-i) + e(k) + \sum_{l=1}^{nc} c_l e(k-l) \quad (5.9)$$

et sous forme fréquentielle :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1}).z^{-n_k}.u(k) + C(z^{-1}).e(k) \quad (5.10)$$

$A(z^{-1})$ est le polynôme caractéristique dont les pôles sont communs entre la dynamique du modèle et celle du bruit $e(t)$. Ceci est intéressant si le bruit est appliqué à l'entrée du système.

Les paramètres du modèle **ARMAX** donné sous forme fréquentielle sont trois entiers :

```

>>arx441
Discrete-time IDPOLY model: A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)
A(q) = 1 - 1.064 q^-1 + 0.1634 q^-2 - 0.2772 q^-3 + 0.2568 q^-4

B(q) = 0.02015 q^-1 + 0.02015 q^-2 + 0.02015 q^-3 + 0.02015 q^-4

Estimated using ARX from data set exo_data
Loss function 0.000824946 and FPE 0.00109432
Sampling interval: 0.1

```

FIG. 5.7. Export du modèle vers l'espace de travail de Matlab

n_a : le nombre de pôles, $n_b - 1$: le nombre de zéros, n_k le retard pur et n_c l'ordre du modèle de la dynamique du filtre du bruit.

On sélectionne ce type de structure en choisissant dans le menu déroulant de "**Estimate>Parametric model**" ARMAX (fig.5.8).

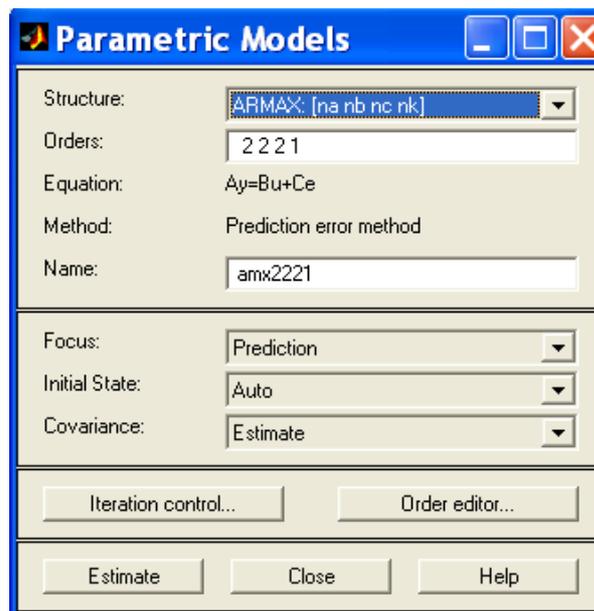


FIG. 5.8. Modèle ARMAX

ARMAX est une estimation itérative (contrairement à ARX) basée sur l'erreur de prédiction. On peut alors affiner le modèle par des procédures itératives en cliquant sur "**Iteration control...**" (cf. fig.5.8). On pourra alors sélectionner le meilleur modèle.

Le modèle ARMAX est bien adapté quand on veut représenter ensemble l'effet de la commande et des perturbations sur la sortie du procédé

3. **Modèle basé sur l'erreur de sortie (Output-Error (OE) models) : $y = (B/F)u + e$**

Cette méthode consiste à déterminer les valeurs des paramètres du modèle en minimisant un critère sur l'erreur de sortie.

Le modèle est obtenu en posant $A(z^{-1}) = 1, 1/C(z^{-1}) = 1$

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot z^{-n_k} \cdot u(k) + e(k) \quad (5.11)$$

Le modèle sous forme récurent sera alors :

$$y(k) = \sum_{j=0}^{nb} b_j u(k-j-n_k) - \sum_{i=1}^{nf} a_i y(k-i) + e(k) \quad (5.12)$$

Les paramètres du modèle **OE** donné sous forme fréquentielle sont trois entiers :nb, nf et nk.

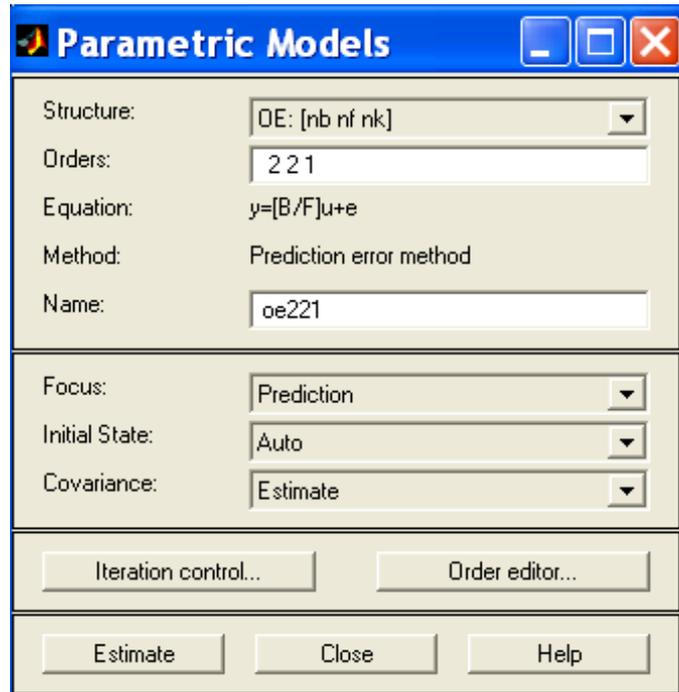


FIG. 5.9.

4. **Modèle sous forme d'équation d'état**

L'équation d'état est identifiée sous forme :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Ke(k) \\y(k) &= C.x(k) + Du(k) + e(k)\end{aligned}\tag{5.13}$$

Deux paramètres à fixer l'ordre du système n et le retard nk (fig.5.10)

La matrice K détermine les propriétés des perturbations. Si $K=0$, le bruit affecte uniquement la sortie, il n'existe alors aucun modèle spécifique pour le bruit. $D=0$ signifie qu'il n'existe pas d'influence de u sur y .

Fixer $K=0$ introduit un modèle de type OE (erreur sur la sortie), c.à.d. la minimisation de la différence entre la sortie simulée du modèle et la sortie mesurée. Le retard entre l'entrée la sortie nk est fixé généralement égal à 1. S'il est supérieur à 1 alors D est pris égal à 0.

Il existe deux méthodes pour estimer ces paramètres :

PEM : Prediction Error/ Maximum likelihood (maximum de vraisemblance) est basée sur une estimation itérative du critère d'optimalité. L'itération commence à partir des valeurs des paramètres calculés par la méthode `n4sid`

PEM améliore généralement la précision du modèle

`model = pem(Données)` retourne un modèle d'état d'ordre de 1 à 10. On peut fixer l'ordre : `model = pem(Données, n)`

`N4sid` n'utilise pas une forme itérative

5. Modèle BJ (Box Jenkins)

Le modèle BJ possède un avantage sur les autres de distinguer les dynamiques du modèle et les dynamiques du générateur des résidus. Le modèle est donné sous forme

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot z^{-nk} \cdot u(k) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} e(k)\tag{5.14}$$

On fixe alors 5 paramètres (fig. 5.11 nb, nc, nd, nf, nk).

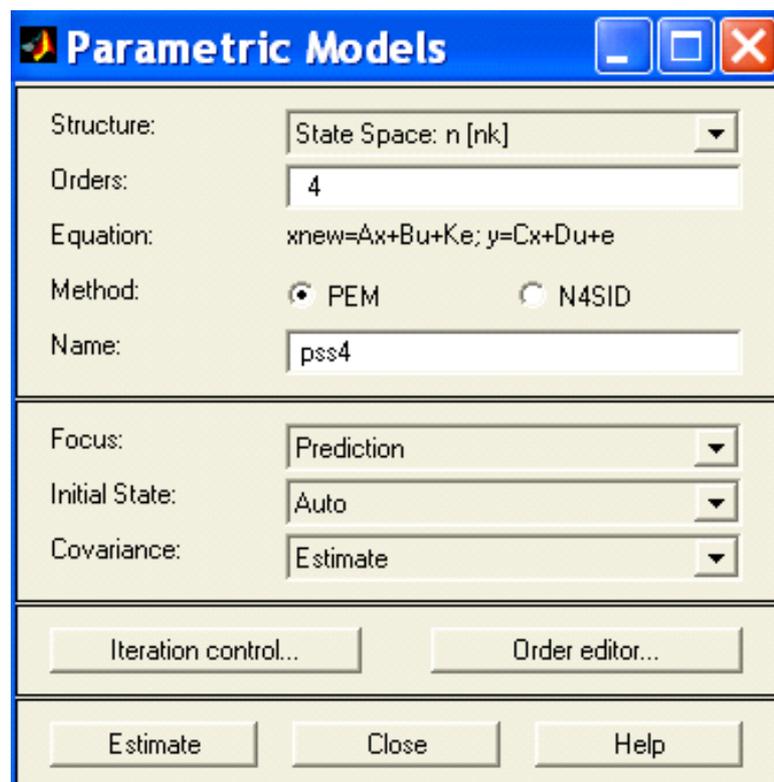


FIG. 5.10. Modèle sou forme d'équation d'état

Parametric Models

Structure: BJ: [nb nc nd nf nk]

Orders: 2 2 2 2 1

Equation: $y=[B/F]u+[C/D]e$

Method: Prediction error method

Name: bj22221

Focus: Prediction

Initial State: Auto

Covariance: Estimate

Iteration control... Order editor...

Estimate Close Help

FIG. 5.11. Modèle de Box-Jenkins

Chapitre 6

QUESTIONS RELATIVES À L'IDENTIFICATION À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES MMC

1. Reprenez le modèle identifié en boucle ouverte
2. Examiner les réponses et appliquez éventuellement un prétraitement préalable (filtrage des données, élimination de la valeur moyenne, ..)
3. Trouvez le modèle de récurrence adéquat en utilisant les méthodes proposées par le logiciel
4. Trouvez la fonction de transfert (voir les instructions appropriées)
5. Sélectionnez le meilleur modèle

Annexe A
COURBES EXPÉRIMENTALES

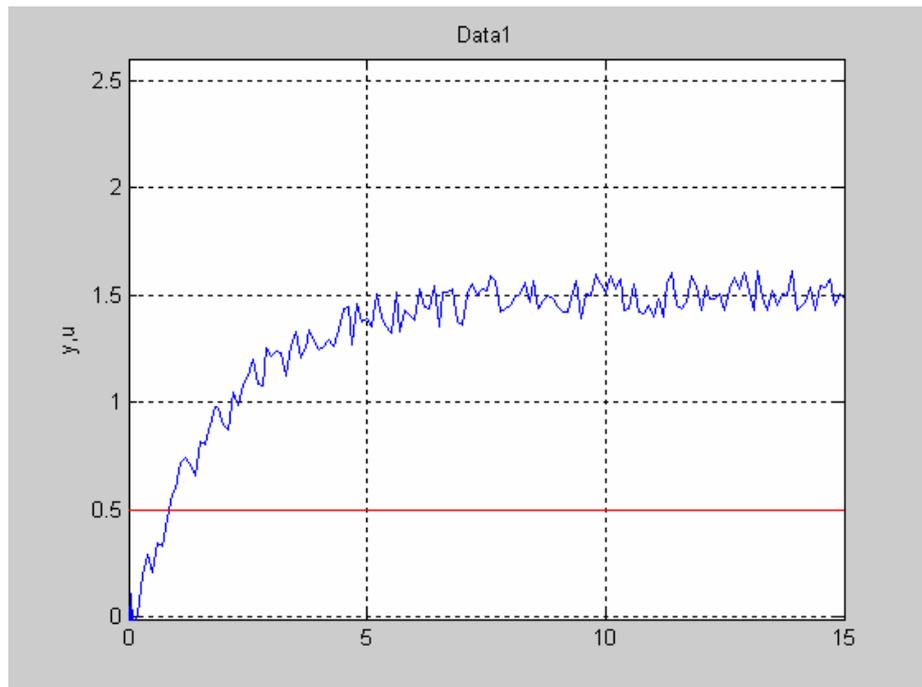


FIG. A.1.

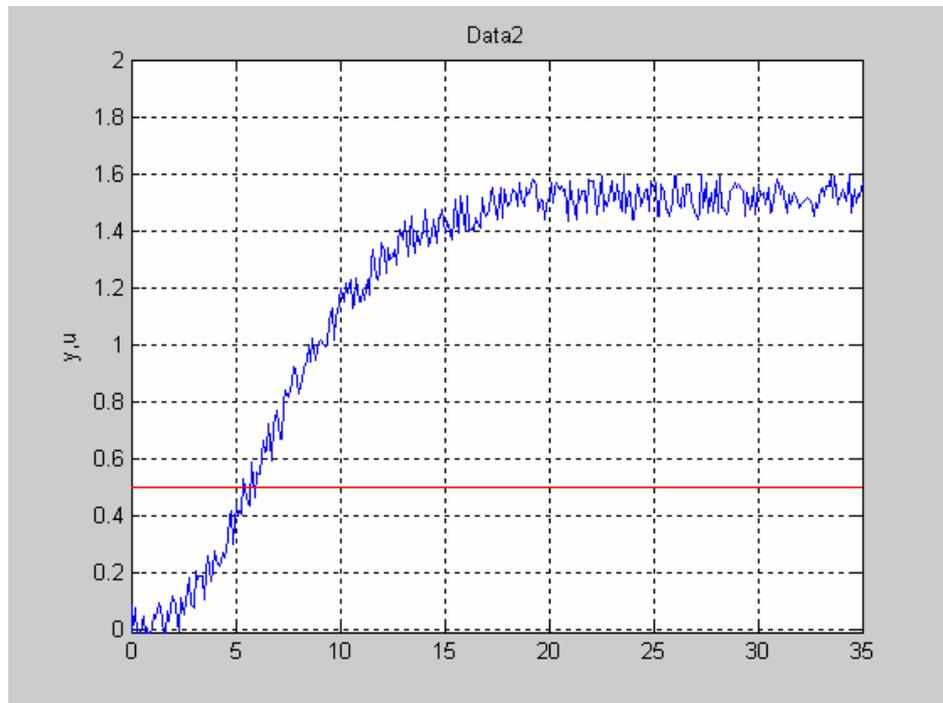


FIG. A.2.

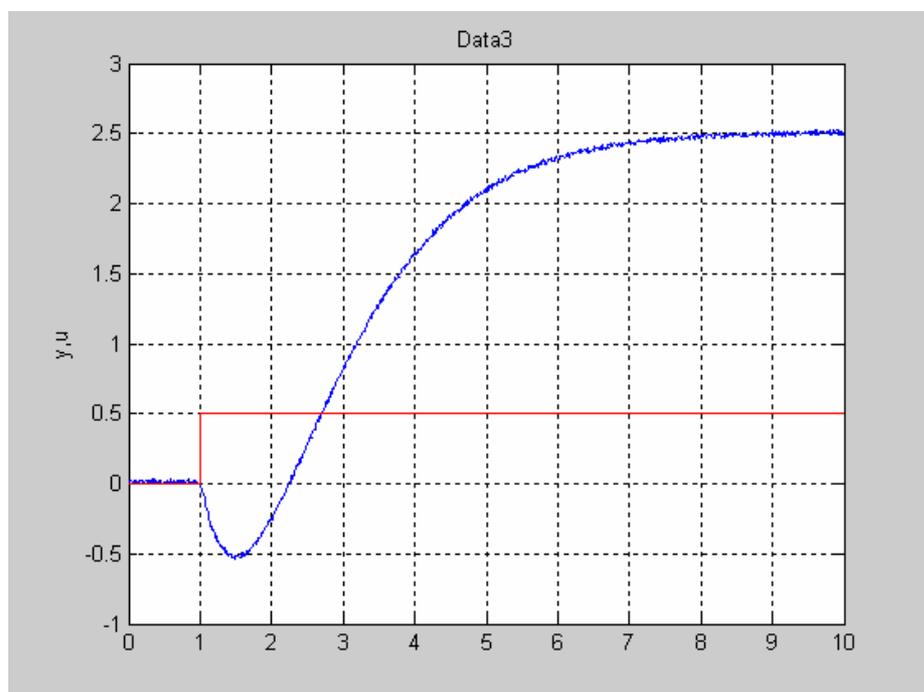


FIG. A.3.

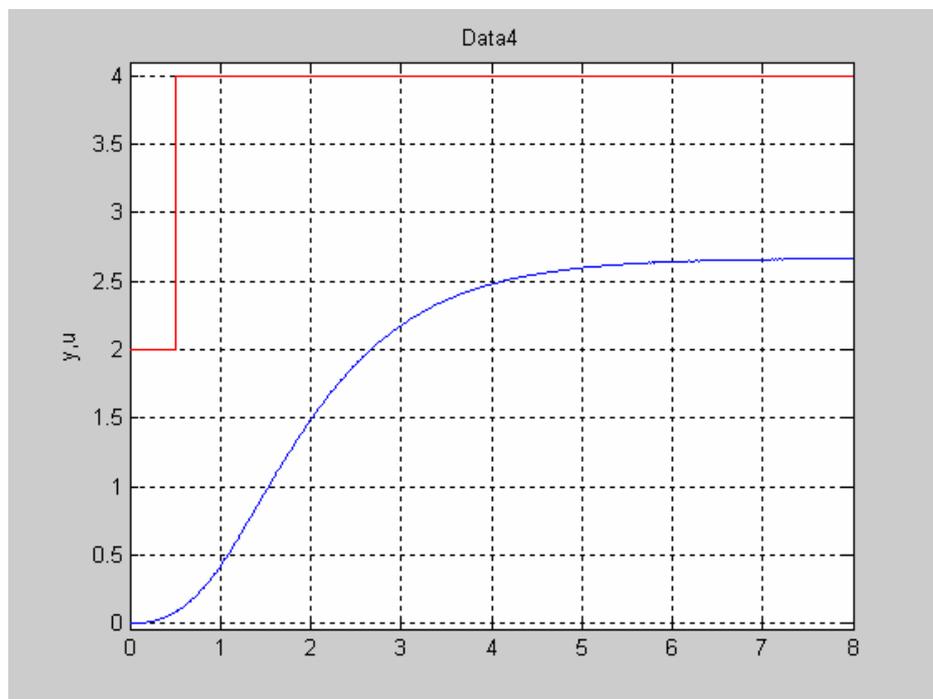


FIG. A.4.

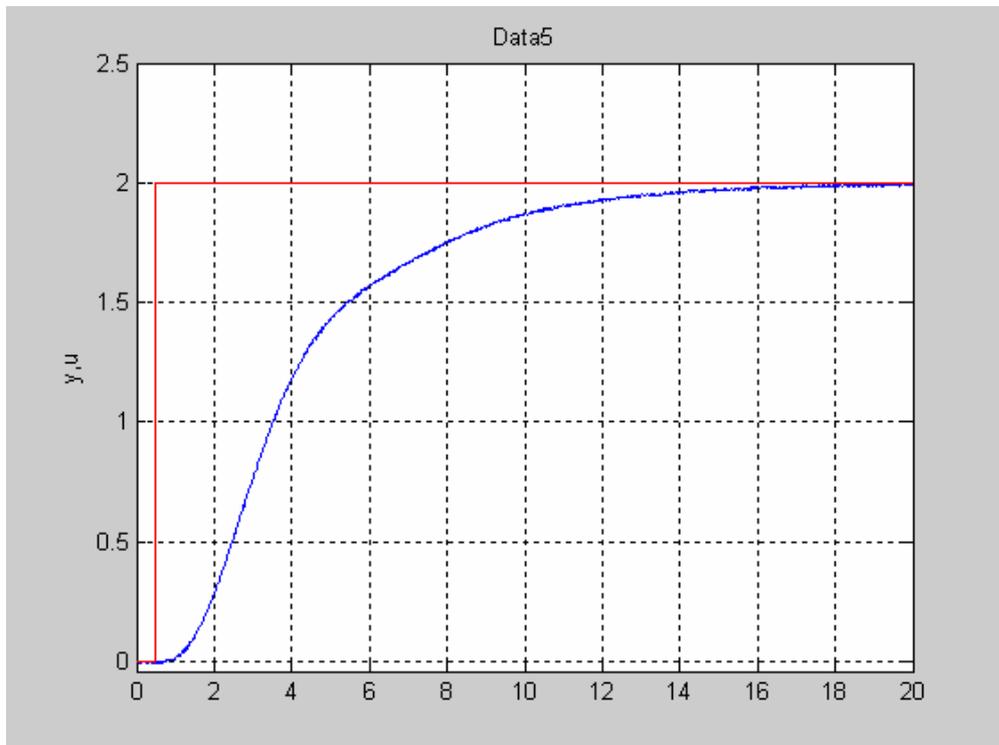


FIG. A.5.

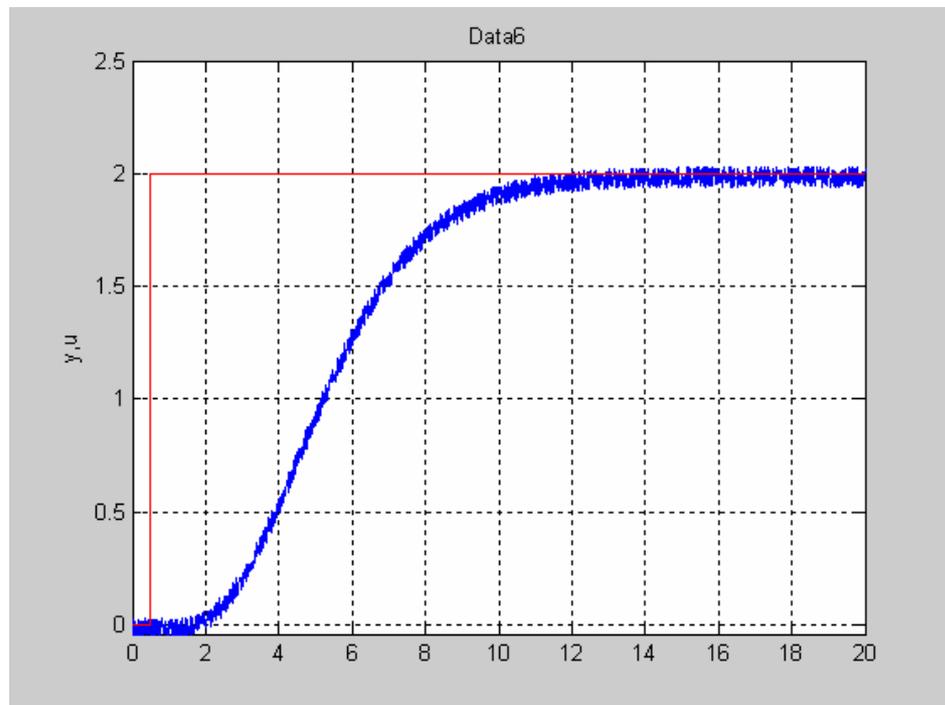


FIG. A.6.