

Chapitre III : Propagation et lignes de transmission

III.1. Coefficient de réflexion

On rappelle l'expression des ondes de tension et de courant qui se propagent sur la ligne :

$$V(x) = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x} \quad (1)$$

et

$$I(x) = \frac{1}{Z_c} [V_i e^{-\gamma x} - V_r e^{\gamma x}] \quad (2)$$

Où : $Z_c = \sqrt{(R + jL\omega) / (G + jC\omega)}$ et $\gamma = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$.

L'existence d'une onde réfléchie sur une ligne peut s'expliquer, soit par la présence sur la ligne d'un élément perturbateur tel que la charge disposée en bout de ligne ou par une discontinuité dans les caractéristiques de la ligne. Nous supposons la ligne de transmission parfaite et n'étudierons que les réflexions causées par l'interposition d'une charge à l'extrémité de la ligne.

Afin de quantifier cette réflexion, on peut définir le coefficient de réflexion comme étant l'amplitude complexe de l'onde réfléchie rapportée à celle de l'onde incidente :

$$\Gamma = \frac{V_{\text{réfléchie}}}{V_{\text{incidente}}} \quad (3)$$

Le coefficient de réflexion en un point d'abscisse x quelconque est défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à l'amplitude de l'onde incidente en ce point :

$$\Gamma(x) = \frac{V_r e^{\gamma x}}{V_i e^{-\gamma x}} = \frac{V_r}{V_i} e^{2\gamma x} \quad (4)$$

En appliquant cette relation en bout de ligne ($x = l$), on trouve:

$$\Gamma(l) = \frac{V_r}{V_i} e^{2\gamma l} = \Gamma_R \quad (5)$$

d'où l'on peut tirer la valeur de V_r / V_i , on en déduit la relation:

$$\Gamma(x) = \Gamma_R e^{2\gamma(x-l)} \quad (6)$$

Cette relation n'est pas très pratique puisqu'elle dépend de la longueur l de la ligne. Or seule la distance entre la charge et le point d'observation (x) est important. C'est la raison pour laquelle on est amené à changer de repère et d'adopter une variable qui a son origine sur la charge. On a $s = l - x$, ce qui permet plus simplement d'écrire:

$$\Gamma(s) = \Gamma_R e^{-2\gamma s} \quad (7)$$

au vue de cette nouvelle variable:

$$V(s) = V_i e^{\gamma s} + V_r e^{-\gamma s} \quad (8)$$

$$I(s) = I_i e^{\gamma s} + I_r e^{-\gamma s} \quad (9)$$

Soient V_R et I_R les tension et courant au récepteur avec toujours $\frac{V_i}{I_i} = -\frac{V_r}{I_r} = Z_c$. Nous avons ici :

$$V_i = \frac{V_R + Z_c I_R}{2} \quad (10)$$

$$V_r = \frac{V_R - Z_c I_R}{2} \quad (11)$$

Comme :

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{V_R - Z_c I_R}{V_R + Z_c I_R} = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \quad (12)$$

il vient:

$$\Gamma(s) = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} e^{-2\gamma s} \quad (13)$$

Pour $s = 0$, c'est à dire sur le récepteur, nous obtenons:

$$\Gamma_R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} \quad (14)$$

Lignes à coefficient de réflexion quelconque

De la définition du coefficient en un point quelconque (7), il résulte que les formules (8) et (9) peuvent s'écrire :

$$V(s) = V_i e^{\gamma s} (1 + \Gamma_R e^{-2\gamma s}) \quad (15)$$

$$I(s) = I_i e^{\gamma s} (1 - \Gamma_R e^{-2\gamma s}) \quad (16)$$

d'où :

$$Z(s) = Z_c \frac{1 + \Gamma_R e^{-2\gamma s}}{1 - \Gamma_R e^{-2\gamma s}} = Z_c \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)} \quad (17)$$

qui peut s'écrire :

$$z(s) = \frac{1 + \Gamma(s)}{1 - \Gamma(s)} \quad (18)$$

d'où

$$\Gamma(s) = \frac{z(s) - 1}{z(s) + 1} \quad (19)$$

avec $z(s) = \frac{Z(s)}{Z_c}$ l'impédance réduite

Rapport d'ondes stationnaires (Taux d'ondes stationnaires) ROS.

Nous avons vu que selon la valeur de la charge Z_R , la ligne est parcourue par une onde incidente et une onde réfléchi ce qui se traduit par un régime d'onde stationnaire (avec la présence de maxima et de minima de tension). Quand l'onde incidente n'est pas réfléchi par la charge une simple onde

progressive se propage sur la ligne et la tension ne possède pas d'extremum. Nous allons définir un coefficient qui devra traduire cet état de fait.

On définit le rapport d'onde stationnaire (Voltage Standing Wave Ratio : VSWR) : $\rho = \frac{V_M}{V_m} = \frac{I_M}{I_m}$

Il est lié au module du coefficient de réflexion de la charge par :

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|} \quad (20)$$

Comme $0 \leq |\Gamma_R| \leq 1$, la valeur de ρ est comprise entre 1 et l'infini. ρ définit la "stationnarité" de l'onde.

Lorsque ρ est voisin de 1, on peut dire que le régime qui est établi sur la ligne étudiée est proche du régime d'ondes progressives, pas d'onde réfléchie. Dès que ρ vaut quelques unités, c'est qu'il y a une désadaptation ligne-charge assez sérieuse. Enfin, des valeurs de ρ supérieures à 10 caractérisent un régime qui se rapproche du régime d'ondes stationnaires.

III.2. Coefficient de réflexion en puissance

Quelle est la puissance dissipée (ou consommée ou transmise) dans le tronçon de ligne situé à droite d'un plan d'abscisse x et dans la charge ?

On définit la puissance moyenne consommée dans la charge par :

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[V(x)I^*(x)] \quad (21)$$

On a les expressions de $V(x)$ et $I(x)$ d'où : $V(x) = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x}$; $I(x) = \frac{1}{Z_c} (V_i e^{-\gamma x} - V_r e^{\gamma x})$

Il ne faut pas oublier dans le calcul qui va suivre que V_i et V_r sont 2 constantes complexes.

On peut encore écrire que : $V(x) = V_i e^{-\gamma x} [1 + \Gamma(x)]$ et $I(x) = \frac{V_i e^{-\gamma x}}{Z_c} [1 - \Gamma(x)]$

Donc :

$$\bar{P}(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2Z_c} |V_i|^2 e^{-(\gamma + \gamma^*)x} [1 + \Gamma(x)][1 - \Gamma^*(x)] \right) = \frac{|V_i|^2}{2} e^{-2\alpha x} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_c} [1 + \Gamma(x) - \Gamma^*(x) - |\Gamma(x)|^2] \right)$$

or si on peut considérer que la ligne est à pertes faibles (cas le plus fréquent), alors Z_c est réel donc :

$$\bar{P}(x) = \frac{|V_i|^2}{2Z_c} e^{-2\alpha x} \operatorname{Re}[1 - |\Gamma(x)|^2] \quad (22)$$

Que représente le facteur $\frac{|V_i|^2}{2Z_c} e^{-2\alpha x}$?

Pour le savoir considérons une ligne sur laquelle seule l'onde incidente se propage car le coefficient de réflexion Γ_R sur la charge est nul. Il n'y a donc pas d'onde réfléchie et donc $\Gamma(x)$ est lui aussi nul quel que soit x . On a alors :

$$\bar{P}(x) = \frac{|V_i|^2}{2Z_c} e^{-2\alpha x} \quad (23)$$

Le facteur $\frac{|V_i|^2}{2Z_c} e^{-2\alpha x}$ représente donc la puissance moyenne consommée à droite de x qui n'a pu être que transportée par l'onde incidente. Ce facteur est donc la puissance moyenne transportée par l'onde incidente. On remarque que la tension et le courant s'atténuant en $e^{-\alpha x}$ et la puissance incidente s'atténue en $e^{-2\alpha x}$.

Revenons dans le cas général d'une ligne sur laquelle circulent une onde incidente et une onde réfléchie. La puissance consommée à droite de x $\bar{P}(x)$ est donc la somme de 2 termes. Le premier terme est la puissance transportée par l'onde incidente et le second ne peut être que la puissance transportée par l'onde réfléchie de façon à ce que la différence des 2 donne la puissance restant à droite de x :

$$\bar{P}(x) = \bar{P}_{inc}(x) - \bar{P}_{ref}(x) \quad (24)$$

On remarque que l'onde réfléchie s'écrit en fonction de l'onde incidente comme :

$$\bar{P}_{ref}(x) = \frac{|V_i|^2}{2Z_c} e^{-2\alpha x} |\Gamma(x)|^2 = \bar{P}_{inc}(x) |\Gamma(x)|^2 \quad (25)$$

et donc que :

$$|\Gamma(x)|^2 = \frac{\bar{P}_{ref}(x)}{\bar{P}_{inc}(x)} \quad (26)$$

Représente le coefficient de réflexion en puissance. La puissance consommée à droite de x est finalement donnée par la relation :

$$\bar{P}(x) = \bar{P}_{inc}(x) [1 - |\Gamma(x)|^2] \quad (27)$$

III.3. Diagramme de Smith

Z et Γ sont reliés par la relation suivante :

$$\Gamma(s) = \frac{z(s) - 1}{z(s) + 1} \quad (28)$$

Si on connaît Γ , il est donc possible de calculer z . tous deux sont complexes. Le calcul est donc complexe. L'abaque de Smith, que nous allons présenter dans la suite de ce chapitre, va permettre d'effectuer ce calcul graphiquement. Il n'est pas bien entendu pas question de prétendre se passer de machine pour calculer cette transformation, mais nous verrons que, plus qu'un outil de calcul, l'abaque de Smith est un outil indispensable, d'abord pour présenter des résultats, mais surtout comme outil graphique de réflexion sur des problèmes complexes.

Fabrication de l'Abaque de Smith

On pose $z(s) = a + jb$ et $\Gamma(s) = X + jY$. La relation (27) devient :

$$\Gamma(s) = \frac{a-1+jb}{a+1+jb} = \frac{(a-1+jb)(a+1-jb)}{(a+1+jb)(a+1-jb)} = \frac{a^2-1+b^2+j2b}{(a+1)^2+b^2} = X + jY \quad (29)$$

d'où :

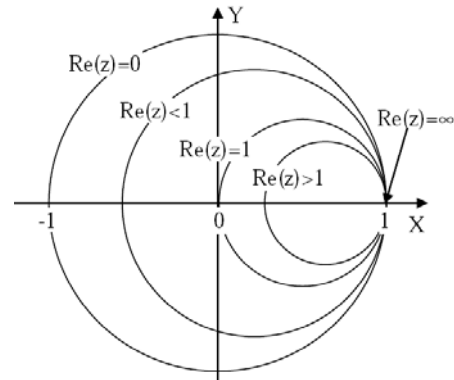
$$X = \frac{a^2-1+b^2}{(a+1)^2+b^2}; Y = \frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$$

a. Quel est le lieu de Γ lorsque la partie réelle de z est constante et que b varie ?

$$\text{On montre que : } \left(X - \frac{a}{a+1}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{(a+1)^2} \quad (30)$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon $R = 1/(a+1)$

et de centre $(X_0, Y_0) = (a/(a+1), 0)$. On est donc en présence d'une famille de cercles dont les centres sont tous alignés sur une droite horizontale passant par $Y = 0$

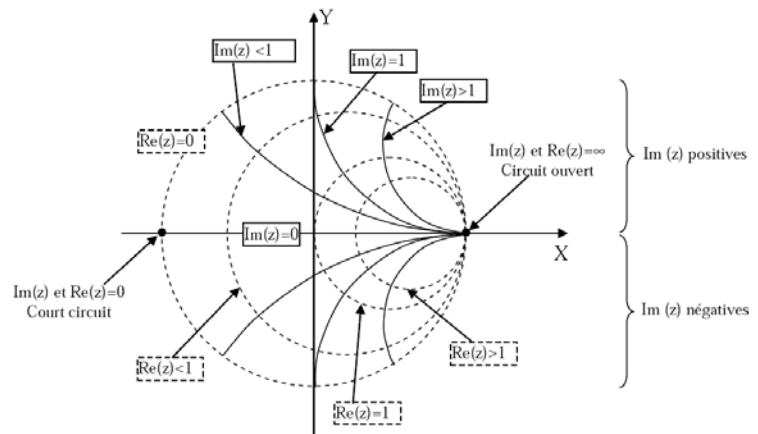
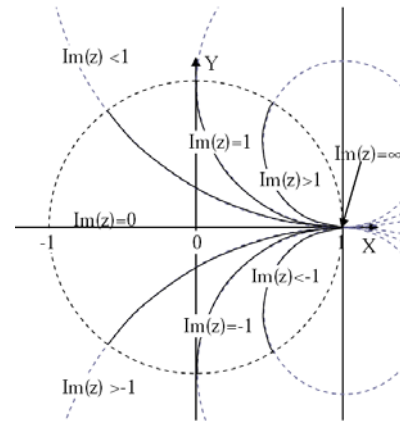


b. Quel est le lieu de Γ lorsque b la partie imaginaire de z est constante et que a varie ?

$$\text{On montre que : } (X-1)^2 + \left(Y - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2} \quad (31)$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon $R = 1/b$ et de centre $(X_0, Y_0) = (1, 1/b)$. On est donc en présence d'une famille de cercles dont les centres sont tous alignés sur une droite verticale passant par $X = 1$.

On a limité le tracé des cercles aux parties comprises à l'intérieur du cercle $|\Gamma| < 1$ car on se limite aux cas des circuits passifs pour lesquels le module de Γ ne peut être supérieur à 1. Dans le cas des circuits actifs, cette limitation "saute".



Abaque de Smith et utilisation pratique

L'abaque de Smith est donc le tracé des cercles $\text{Re}(z) = \text{cte}$ et des cercles $\text{Im}(z) = \text{cte}$ sur le plan complexe de Γ , comme le montre la figure suivante.

III.4. Adaptation d'impédance

III.4.1. Introduction

L'objectif principal de l'adaptation d'impédances est de maximiser la puissance transmise à la charge. Dans le cas d'une ligne, il s'agit de transmettre, par l'intermédiaire de cette ligne, le maximum de puissance du générateur vers le récepteur.

Le problème se pose, et se résout, à deux niveaux : au niveau du générateur et au niveau du récepteur. Il faut en effet que :

- D'une part, le générateur puisse transmettre à la ligne le maximum de puissance (puissance disponible).
- D'autre part, le récepteur reçoive de la ligne le plus possible de cette puissance.

III.4.2. Conditions d'adaptation

• Condition s'adaptation du générateur

Soit $Z_e = R_e + jX_e$ l'impédance d'entrée de la ligne. Cela veut dire que tout se passe comme si le générateur était fermé sur Z_e . Calculons quelle est la puissance active P fournie par le générateur, d'impédance interne $Z_G = R_G + jX_G$, à la ligne. Soient V_e et I_e les amplitudes complexes de la tension et du courant à l'entrée de la ligne :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_e I_e^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_e I_e I_e^*) = \frac{1}{2} R_e |I_e|^2$$

Or :

$$I_e = \frac{E}{Z_G + Z_e} = \frac{E}{(R_G + R_e) + j(X_G + X_e)}$$

Donc :

$$P = \frac{1}{2} R_e \frac{E^2}{(R_G + R_e)^2 + (X_G + X_e)^2} \quad (32)$$

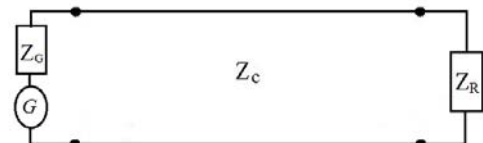
Recherchons les conditions pour que la puissance délivrée soit maximale :

- Il faut d'abord que : $X_G + X_e = 0 \rightarrow X_e = -X_G$ (33)

- Nous avons alors : $P = \frac{1}{2} R_e \frac{E^2}{(R_G + R_e)^2} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{(\frac{R_G}{\sqrt{R_e}} + \sqrt{R_e})^2}$

Au dénominateur, nous avons la somme de deux nombres positifs dont le produit est constant. Pour que sa valeur soit minimale, il faut que :

$$\frac{R_G}{\sqrt{R_e}} = \sqrt{R_e} \rightarrow R_G = R_e. \quad \text{Finalement : } Z_e = Z_G^* \quad (34)$$



Générateur, ligne et récepteur

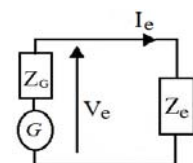


Schéma équivalent

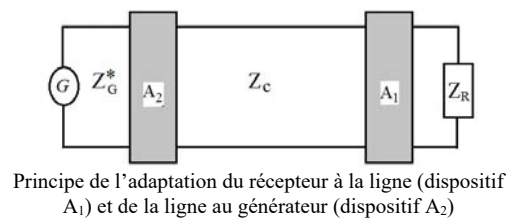
• Condition s'adaptation du récepteur

Le récepteur est adapté à la ligne lorsque $\Gamma_R = 0$, puisqu'alors il n'y a pas d'onde réfléchi ; nous sommes en régime d'ondes progressives et la puissance transmise par la ligne est uniquement de la puissance active. La condition $\Gamma_R = 0$ est réalisée lorsque : $Z_R = Z_c$.

• Synthèse de ces conditions

Nous venons de démontrer que, pour adapter le générateur d'impédance interne Z_G , au récepteur d'impédance Z_R , lorsqu'ils sont reliés par une ligne d'impédance caractéristique Z_c , il était nécessaire d'utiliser deux dispositifs d'adaptation.

- L'un A_1 , à l'interface ligne-récepteur, qui doit transformer l'impédance Z_R de la charge en une impédance Z_c . Notons que, dans ces conditions, l'impédance d'entrée de la ligne est : $Z_e = Z_c$;



- L'autre A_2 , à l'interface ligne-générateur, qui doit transformer l'impédance $Z_e = Z_c$ en Z_G^* .

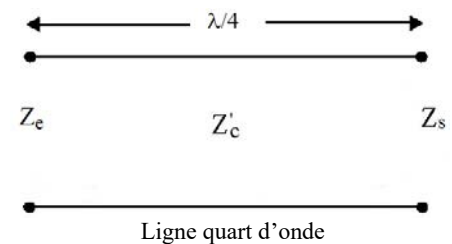
Les dispositifs d'adaptations que nous allons étudier sont de divers types :

- ✓ Adaptateurs par ligne quart d'onde ;
- ✓ Adaptateurs à l'aide d'un ou deux « stubs » qui sont des tronçons de ligne court-circuités ;
- ✓ Adaptateurs par réseau d'impédances et tronçon de ligne.

III.3.3. Adaptation par ligne quart d'onde

Considérons un élément de ligne de longueur $\lambda/4$, d'impédance caractéristique Z_c' fermé sur une impédance Z_s .

Nous avons vu qu'il ramène à son entrée une impédance :



$$Z_e = Z_c' \frac{Z_s + jZ_c' \tan(\beta\lambda/4)}{Z_c' + jZ_s \tan(\beta\lambda/4)} = Z_c' \frac{Z_s + jZ_c' \tan(2\pi\lambda/4\lambda)}{Z_c' + jZ_s \tan(2\pi\lambda/4\lambda)} = \frac{Z_c'^2}{Z_s} \quad (35)$$

Ne telle ligne peut servir d'adaptateur puisqu'elle permet d'effectuer une transformation d'impédance, dans le cas qui nous intéresse, nous avons : $Z_e = Z_c$ et $Z_s = Z_R$ d'où :

$$Z_c' = \sqrt{Z_c Z_R} \quad (36)$$

III.3.4. Adaptation à l'aide d'un stub

Un stub est un tronçon de ligne court-circuité de longueur s que l'on branche en dérivation sur la ligne principale à une distance d de la charge. Son impédance d'entrée étant :

$$Z(s) = Z_c \frac{Z_R + jZ_c \tan \beta s}{Z_c + jZ_R \tan \beta s} \Big|_{Z_R=0} = jZ_c \tan \beta s \quad (37)$$

Nous voyons qu'il est équivalent à une réactance dont on peut faire varier le signe et la grandeur en faisant varier sa longueur.

D'ailleurs, on pourrait aussi bien utiliser un élément localisé, capacitif ou inductif, placé en dérivation sur une ligne.

Les quantités connues sont : Z_R , Z_c et λ ; les inconnues sont : d et s . Nous allons raisonner :

- En admittances parce que nous avons des éléments disposés en parallèle,
- En valeurs réduites pour pouvoir les placer sur le diagramme de Smith.

Pour la charge :

$$z_R = \frac{Z_R}{Z_c} \text{ et } y_R = \frac{Z_c}{Z_R} = g_R + jb_R \quad (38)$$

Pour le stub :

$$z(s) = \frac{Z(s)}{Z_c} = j \tan \frac{2\pi}{\lambda} s = j \tan \beta s \text{ et } y(s) = -j \cotan \beta s \quad (39)$$

Nous allons calculer successivement les admittances aux divers endroits de la ligne :

- Dans le plan de la charge : $y_R = g_R + jb_R$ (41)
- Dans un plan situé à la distance d , c'est-à-dire au niveau du stub : $y = y(d) + y(s)$ (42)

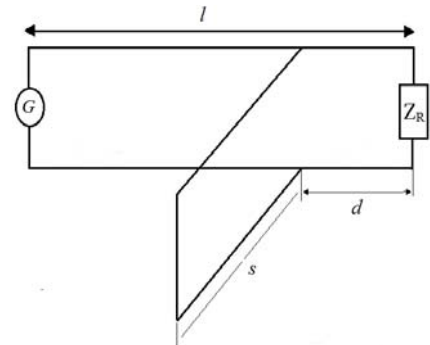
$$\text{Avec : } y(d) = \frac{y_R + j \tan \beta d}{1 + jy_R \tan \beta d} = g(d) + jb(d) \text{ et } y(s) = -j \cotan \beta s \quad (43)$$

Pour que l'adaptation soit réalisée à partir de la distance d , il faut que : $y = 1 + j0$.

On déduit de cette condition les deux équations qui vont fournir les deux inconnues d et s , on a :

$$\begin{aligned} y(d) &= \frac{y_R + j \tan \beta d}{1 + jy_R \tan \beta d} = \frac{g_R + jb_R + j \tan \beta d}{1 + j(g_R + jb_R) \tan \beta d} = \frac{g_R + j[b_R + \tan \beta d]}{1 - b_R \tan \beta d + jg_R \tan \beta d} \\ &= \frac{[g_R + j(b_R + \tan \beta d)][1 - b_R \tan \beta d - jg_R \tan \beta d]}{[1 - b_R \tan \beta d]^2 + g_R^2 \tan^2 \beta d} \\ &= \frac{g_R[1 + \tan^2 \beta d] + j[(b_R + \tan \beta d)(1 - b_R \tan \beta d) - g_R^2 \tan^2 \beta d]}{(1 - b_R \tan \beta d)^2 + g_R^2 \tan^2 \beta d} = g(d) + jb(d) \quad (44) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } g(d) = 1 \rightarrow \frac{g_R(1 + \tan^2 \beta d)}{(1 - b_R \tan \beta d)^2 + g_R^2 \tan^2 \beta d} = 1 \quad (45)$$



Adaptation à un stub

c'est une équation du second degré en $\tan(\beta d)$ qui fournit deux solutions : d et d' à $\lambda/2$ près, et :

$$b(d) = \cotan \beta s \rightarrow \frac{b_R + (1 - b_R^2 - g_R^2) \tan \beta d - b_R \tan^2 \beta d}{(1 - b_R \tan \beta d)^2 + g_R^2 \tan^2 \beta d} = \cotan \beta s \quad (46)$$

d'après cette relation, nous voyons qu'aux deux valeurs d et d' correspondent les deux valeurs s et s'

Utilisation du diagramme de Smith

La recherche des inconnues dans les adaptations est bien simplifiée si l'on utilise le diagramme de Smith.

Plaçons tout d'abord les points 1 et 2 représentatifs des impédance et admittance réduites de la charge. Le cercle à $R.O.S = Cte$ passant par ces points est le lieu des points représentatifs de toutes les impédances et admittances aux divers points de la ligne compris entre la charge et le stub exclu. C'est, en particulier un lieu de $y(d)$. Comme d'autre part $y(d) = y - y(s)$ est de la forme $1 - jb$, le cercle à $g = 1$ est un deuxième lieu de $y(d)$.

Les solutions du problème sont donc données par les deux points d'intersection 3 et 3' de ces deux cercles.

Point 3 : Le stub doit être placé à une distance d/λ de la charge qui est lue sur le bord du diagramme. (dans l'exemple

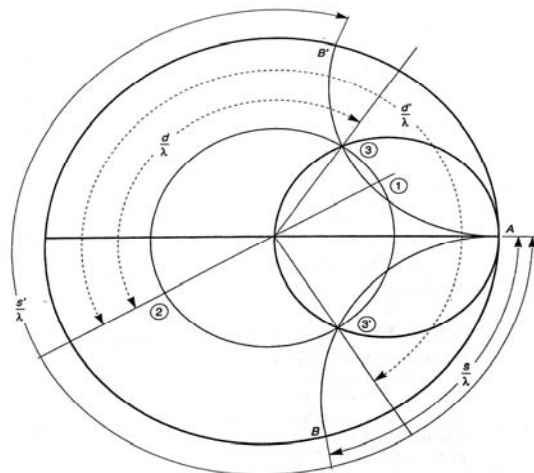
choisi :

$$d/\lambda = 0,042 + 0,170 = 0,212)$$

Soit $1 + jb_3$ l'admittance à $y(d)$; le stub doit avoir une longueur s telle que : $y(s) = -jb_3$ (ici $= -j1,3$). Comme le stub est un tronçon de ligne court-circuité, s est déterminé en lisant sur le bord du diagramme de combien il faut tourner (vers le générateur) pour passant du point A ($y = \infty$) au point B ($y = -jb_3$).

$$\text{Ici } s/\lambda = 0,354 - 0,250 = 0,104.$$

Point 3' : Le stub doit être placé à une distance d'/λ . (Ici $d'/\lambda = 0,042 + 0,33 = 0,372$). L'admittance à $y(d')$ étant $1 - jb_3$, le stub doit avoir une longueur s' telle que $y(s') = jb_3$ (ici $= j1,3$). s' est déterminé en lisant sur le bord du diagramme de combien il faut tourner (vers le générateur) pour passer du point A au point B' ($\Leftrightarrow 0 + jb_3$). Ici $s'/\lambda = 0,250 + 0,146 = 0,396$.



Adaptation à un stub

Point 1: $z_1 = 2 + j1,5$

Point B : $y(s) = -j1,3 \rightarrow \frac{s}{\lambda} = 0,104$

Point 2: $y_2 = 0,32 - j0,24$

Point 3': $y_3' = 1 - j1,3$; $\frac{d'}{\lambda} = 0,372$

Point 3: $y_3 = 1 + j1,3$; $\frac{d}{\lambda} = 0,212$

Point B': $y(s') = j1,3$; $\frac{s'}{\lambda} = 0,396$

III.3.5. Adaptation par réseau d'impédance et tronçon de ligne

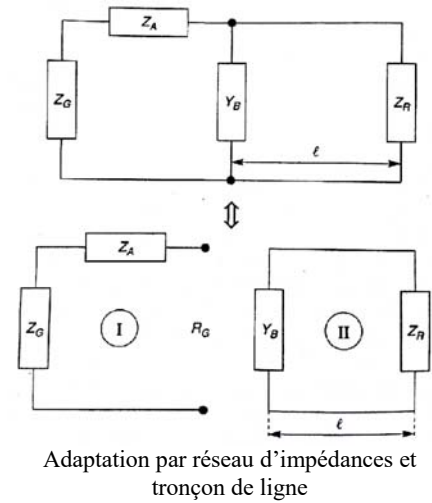
Dans les cas que nous avons traités, il s'agissant d'adapter une charge d'impédance Z_R complexe à un générateur d'impédance interne Z_G réelle et égale à l'impédance caractéristique de la ligne qui le relie à la charge.

Le cas le plus générale est celui où l'on veut adapter une charge d'impédance complexe Z_R à un générateur d'impédance interne Z_G complexe.

Pour effectuer cette adaptation, on peut placer en série avec le générateur une impédance imaginaire pure $Z_A = jX$ afin de compenser la partie imaginaire de l'impédance interne du générateur. Cette réactance peut être obtenue en plaçant en série avec le générateur soit un stub soit un composant passif inductif ou capacitif. Ainsi, l'impédance ramenée aux bornes du réseau I est R_G .

D'autre part, on place en parallèle à une distance l de la charge une admittance imaginaire pure $Y_B = jB$ qui peut être obtenue en mettant en parallèle sur la ligne soit un stub soit un composant passif inductif ou capacitif. Le réseau II constitue l'équivalent d'un dispositif d'adaptation à un stub qui doit ramener à ses bornes une impédance égale à R_G , ce qui réalise l'adaptation désirée.

Notons enfin que lorsque la distance l entre Z_G et Z_R est imposée, il est toujours possible d'utiliser, conformément au schéma de l'adaptation précédent au début, deux dispositifs d'adaptation l'un placé entre la charge et la ligne, l'autre placé entre le générateur et la ligne.



Travaux dirigés

Exercice 1 : Une ligne de longueur $l = 10$ m a les caractéristiques suivantes : $Z_c = 500\Omega$; $\alpha = 0$; $\beta = 2,856$ rad/m . L'impédance de charge est $Z_R = 2000 + j1000\Omega$. Le courant dans cette charge est : $I_R = 0,0341e^{-j45,166^\circ}$.

- En déduire la tension V_e et le courant I_e à l'entrée de la ligne ($x = l$).
- En déduire Z_e et, pour vérifier le résultat, calculer Z_e par la formule transformation des impédances.
- Puissance active transportée par la ligne.

Solution :

on a : $V(s) = V_i e^{\gamma s} + V_r e^{-\gamma s}$, $I(s) = I_i e^{\gamma s} + I_r e^{-\gamma s}$, $V_i = \frac{V_R + Z_c I_R}{2}$ et $V_r = \frac{V_R - Z_c I_R}{2}$

D'où : $V(s) = V_R \cosh \gamma s + Z_c I_R \sinh \gamma s$ et $I(s) = I_R \cosh \gamma s + \frac{V_R}{Z_c} \sinh \gamma s$

$$V(s=l) = V_e = V_R \cos \beta l + j Z_c I_R \sin \beta l = I_R (Z_R \cos \beta l + j Z_c \sin \beta l)$$

$$\beta l = 28,56 \text{ rad} = 4,5455 \cdot 2\pi = 0,5455 \cdot 360^\circ = 196,37^\circ$$

$$\begin{aligned} V_e &= 0,0341e^{-j45,166^\circ} 1000 \cdot [(2+j) \cdot \cos(196,37^\circ) + j0,5 \sin(196,37^\circ)] \\ &= -34,1e^{-j45,166^\circ} [(2+j) \cdot 0,9595 + j0,5 \cdot 0,2818] = 34,1e^{j180^\circ - j45,166^\circ} (1,919 + j1,1004) \\ &= 34,1e^{j180^\circ - j45,166^\circ} 2,2121e^{j29,8310} = 75,4326e^{j164,665^\circ} \Rightarrow V_e = 75,4326e^{j164,665^\circ} \text{ (Volts)} \end{aligned}$$

$$\text{et : } I_e = I_R \cos \beta l + j \frac{V_R}{Z_c} \sin \beta l = I_R (\cos \beta l + j \frac{Z_R}{Z_c} \sin \beta l)$$

$$I_e = -I_R [0,9595j(4+j)0,2818] = 0,0341e^{-j45,17^\circ} \cdot 1,1947e^{j70,65^\circ} e^{j180^\circ} \Rightarrow I_e = 0,0407e^{j205,48^\circ} \text{ (A)}$$

a) $Z_e = \frac{V_e}{I_e} = 1851e^{-j40,82^\circ} \text{ (}\Omega\text{)}$

On retrouve ce résultat par la formule : $Z_e = Z_c \frac{Z_R + jZ_c \tan \beta l}{Z_c + jZ_R \tan \beta l}$

b) $P_{act} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_e I_e^*) = \frac{1}{2} 75,43 \cdot 0,041 \cos 40,83^\circ = 1,16 \text{ (W)}$

Exercice 2 : Une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 75\Omega$ est terminée par une impédance de charge $Z_R = 125 + j100\Omega$.

- Calculer les valeurs de Γ_R en coordonnées polaires et en cartésiennes.
- Sachant que $|V_R| = 143,2$ V , calculer $|V_i|$ et $|V_r|$.
- Si la phase de V_i est prise pour référence, déterminer V_i, V_r, I_i et I_r .
- En déduire V_R et I_R et la puissance active absorbée par la charge.

Solution :

$$a) \Gamma_R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} = \frac{50 + j100}{200 + j100} = \frac{0,5 + j}{2 + j} = 0,5e^{j36,87^\circ} = 0,4 + j0,3$$

$$b) \text{ Sur la charge } (x=0) : \Gamma_R = \frac{V_r}{V_i} \text{ et } V_R = V_i + V_r \text{ donc : } V_R = V_i(1 + \Gamma_R) \text{ et } |V_R| = |V_i||1 + \Gamma_R|$$

$$|V_i| = \frac{|V_R|}{|1 + \Gamma_R|} = \frac{143,2}{|1,4 + j0,3|} = 100 \text{ (V)} ; |V_r| = |V_i||\Gamma_R| = 50 \text{ (V)}.$$

$$c) V_i = 100e^{j0^\circ} \rightarrow V_r = \Gamma_R V_i = 50e^{j36,87^\circ} \text{ (V)} ; \frac{V_i}{I_i} = Z_c \rightarrow I_i = 1,33e^{j0^\circ} \text{ (A)} ;$$

$$\frac{V_r}{I_r} = -Z_c \rightarrow I_r = -0,667e^{j36,87^\circ} = 0,667e^{j216,87^\circ} \text{ (A)}$$

$$d) V_R = V_i + V_r = V_i(1 + \Gamma_R) = 100(1,4 + j0,3) = 143,2e^{j12,1^\circ} \text{ (V)}$$

$$I_R = I_i + I_r = I_i(1 - \Gamma_R) = 1,33(0,6 - j0,3) = 0,895e^{-j26,56^\circ} \text{ (A)}$$

$$P_{act} = \frac{1}{2} \text{Re}(V_R I_R^*) = \frac{1}{2} |I_R|^2 \text{Re}(Z_R) = \frac{1}{2} 0,895^2 \cdot 125 = 50 \text{ W}$$

Exercice 3 : Un générateur à transistor a une impédance interne $Z_G = (7,5 + j11)\Omega$. Il est relié à une ligne de longueur l et d'impédance caractéristique Z_c qui est la moyenne géométrique entre 50Ω est la partie réelle de Z_G . La charge est un dispositif d'impédance $Z_R = 50\Omega$ avec lequel est mis en série un condensateur d'adaptation, de capacité C . On demande de calculer l et C pour que l'adaptation soit réalisée à la fréquence de 2,45 GHz.

Solution :

$$Z_c = \sqrt{50 \cdot 7,5} = 19,365\Omega$$

L'impédance d'entrée de la ligne doit être égale à Z_G^* , soit en

impédance réduite : $z_G^* = 0,387 - j0,568$ (Point A $\leftrightarrow$ 0,091)

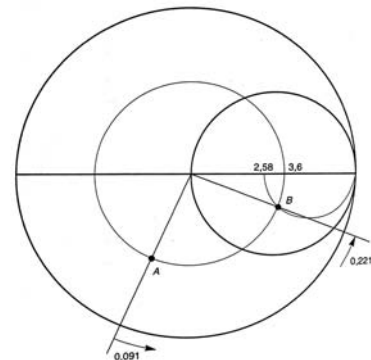
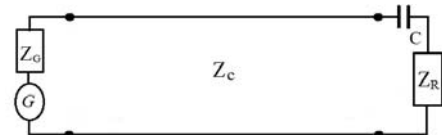
L'impédance de charge, en valeur réduite, est :

$$z_R = 2,582 + \frac{1}{jC\omega} \cdot \frac{1}{Z_c}.$$

A partir du point A, il faut se déplacer vers la charge sur le cercle à $R.O.S = 3,6$, jusqu'à la rencontre du demi-cercle à $r = 2,582$ et

$x < 0$. L'intersection est le point B ($\leftrightarrow$ 0,221) pour lequel : $Z_B = 2,852 - j1,5$

d'où : $\frac{l'}{\lambda} = 0,130$ et $\frac{1}{C\omega} \cdot \frac{1}{Z_c} = 1,5$ donc : $l' = 0,130\lambda$ et $C = 2,24 \cdot 10^{-12} \text{ F}$.



Exercice 4 : Une ligne d'impédance caractéristique $Z_c = 50\Omega$ est terminée par une impédance $Z_R = (100 + j75)\Omega$. La longueur d'onde est de 0,5m. Déterminer les caractéristiques d'une adaptation par un stub de longueur s , situé à une distance d de la charge et d'impédance caractéristique 50Ω .

Solution :

En appliquant la procédure qui a été détaillée en cours, on trouve que :

1^{ère} solution : $d = 10,6\text{cm}$ et $s = 5,3\text{cm}$. 2^{ème} solution : $d' = 18,6\text{cm}$ et $s = 19,7\text{cm}$.

Exercice 5 : Une ligne coaxiale à diélectrique air, d'impédance caractéristique $Z_c = 50\Omega$ est terminée par une impédance $Z_R = (15 - j42)\Omega$. La fréquence est de 1GHz.

On veut réaliser l'adaptation en plaçant, à une distance d de la charge, un stub en circuit ouvert, d'impédance caractéristique $Z'_c = 100\Omega$ et de longueur s .

Déterminer les caractéristiques de cette adaptation.

Solution :

$$z_R = \frac{Z_R}{Z_c} = 0,3 - j0,85 \text{ (Point A)}$$

$$y_R = 0,37 + j1,05 \text{ (Point B } \leftrightarrow 0,134 \text{)}.$$

Le stub doit être placé à un endroit de la ligne où la partie réelle de l'admittance est égale à 1. Il y a deux solutions.

1) **En C :** $y(d) = 1 + j2$. La distance de ce point à la charge est :

$$\frac{d}{\lambda} = 0,188 - 0,134 = 0,054 \rightarrow d = 1,62\text{cm}.$$

La distance d'entrée du stub devra être : $y(s) = -j2$. Or, cette admittance réduite est normalisée par rapport à $Z_c = 1/Y_c = 50\Omega$.

Donc $y(s) = Y(s)/Y_c$, où $Y(s)$ est l'admittance d'entrée du stub en valeur vraie.

Comme le stub a une impédance caractéristique $Z'_c = 1/Y'_c = 100\Omega$, la même admittance $Y(s)$

normalisée par rapport à Z'_c a pour valeur réduite : $y'(s) = \frac{Y(s)}{Y'_c} = y(s) \frac{Y_c}{Y'_c} = y(s) \frac{Z'_c}{Z_c} = -j4$.

Nous devons donc rechercher la longueur d'un stub en circuit ouvert ($y=0$) dont l'admittance

d'entrée est $-j4$ (Point D $\leftrightarrow 0,289$). $\frac{s}{\lambda} = 0,289 \rightarrow s = 8,67\text{cm}$.

2) **En C' :** $y(d') = 1 - j2$, d'où $\frac{d'}{\lambda} = 0,312 - 0,134 = 0,178 \rightarrow d' = 5,34\text{cm}$

L'admittance d'entrée du stub devra être : $y(s') = j2$, soit $y'(s') = j4$, lorsque l'on normalise par rapport à 100Ω .

