TD de laminage N°2

Objectif : Discuter certains aspects du comportement rigide plastique du laminage des tôles

Hypothèses :

- Modèle rigide plastique
- Critère de Von Misés
- Ecrouissage isotrope
- Modèle d'écrouissage d'Hollomon

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

-. Expliquez et justifiez ces hypothèses.

- Rappelez les hypothèses qui permettent d'écrire ces deux tenseurs

1- Rappelez en quelques lignes la construction et l'écriture du modèle. Montrez que pour modéliser le comportement plastique avec écrouissage il faut identifier la fonction $\hat{W}(p)$: Energie d'écrouissage. Comment détermine t'on la fonction $\hat{W}(p)$.

2- Montrez qu'en repères principales

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{S_{ij}S_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_1)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

Expliquer pourquoi nous pouvons aussi écrire dans ce cas

$$f(\sigma_{ij}) = f(I_1, J_2, J_3) = f(J_2, J_3) = f(J_2)$$

3- Ecrire les lois d'évolution, vérifier que le comportement est incompressible et que $\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2 = \frac{3}{2}\dot{p}^2$. Quelle conclusion tirez-vous ?

4- On pose $\sigma_1 = 0$, calculer la contrainte équivalente. Ecrire les lois d'évolution dans ce cas. On pose aussi $\sigma_3 = 0$. Sachant que $\sigma_2 < 0$, écrire la relation entre $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3. Montrer que dans ce cas la déformation équivalente est égale à ε_2. Quel essai mécanique représente cette situation ?

5- On reprend le laminage. Au bord (zone d'élargissement) $\sigma_2 = 0$ et $\dot{\varepsilon}_1 = 0$, les tenseurs de contraintes et des vitesses de déformations s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

- Justifier l'écriture de ces tenseurs
- Montrer que $\sigma_3 = 2\sigma_1$, $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_3|$ et que $\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_3|$, Quelle conclusion tirez vous ?

6- Au centre de la tôle $\varepsilon_2 = 0$. Montrez que la déformation équivalente $p = \bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_3|$ et que la contrainte équivalente $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$. Montrez que le critère de plasticité s'écrit : $|\sigma_1 - \sigma_3| \leq A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}|\varepsilon_3|^n$, donnez la signification des coefficients A et n. Comment les identifie t'on ?

7- On pose un coefficient ξ, appelé coefficient des états de contraintes. $\xi = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)}$. Montrez qu'en déformation plane $\xi = 0$.
Montrer que ξ varie de zéro à trois suivant la direction transversale de laminage.

Montrer que la contrainte équivalente s'écrit : $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3+\xi^2}}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$

8- On reprend un tenseur de déformation volumique. En utilisant la loi d'évolution plastique et la condition d'incompressibilité. Montrer successivement que :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 3}}\dot{\bar{\varepsilon}}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{2\left[\frac{3+\xi^2}{9+\xi^2}\right]\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_3^2\right)}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{2\frac{\xi^2}{9+\xi^2}\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_3^2\right)}$$

Puis finalement

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\xi - 3}{\xi + 3}\dot{\varepsilon}_3, \qquad \dot{\varepsilon}_2 = -\left(\frac{\xi - 3}{\xi + 3} + 1\right)\dot{\varepsilon}_3 \quad et \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{\xi + 3}\sqrt{\xi^2 + 3}\left|\dot{\varepsilon}_3\right|$$

9- Montrer que le critère de plasticité s'écrit :

$$\left|\sigma_1 - \sigma_3\right| \leq A\beta(\xi)\left|\varepsilon_3\right|^n \text{ avec } \beta(\xi) = \frac{2^{n+1}}{(3+\xi)^n}\left(\xi^2 + 3\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

10- Vérifier les relations suivantes :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\xi - 3}{\xi + 3}\dot{\varepsilon}_3, \qquad \dot{\varepsilon}_2 = -\left(\frac{\xi - 3}{\xi + 3} + 1\right)\dot{\varepsilon}_3 \quad et \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{\xi + 3}\sqrt{\xi^2 + 3}\left|\dot{\varepsilon}_3\right|.$$

Solution :

Hypothèses :

- Modèle rigide plastique : C'est-à-dire que la composante élastique de la déformation est négligée. Cela s'explique par le fait que $\varepsilon^e << \varepsilon^p$, ce qui est pratiquement le cas de la tôle laminée.
- Critères de Von Misés : Voir les réponses données dans les TD passées. Ces réponses se justifient aussi dans le cas du laminage.
- Ecrouissage isotrope : D'un point de vue mécanique, cela veut dire que nous avons une dilatation homothétique de la fonction seuil, c'est-à-dire que l'écrouissage n'induit pas une anisotropie au cours de la déformation. Ce qui n'est pas vrai pour de grandes déformations à froid. Cependant, cette hypothèse nous permet une cohérence avec l'hypothèse précédente.
- Ecrouissage d'Hollomon : Le modèle d'Hollomon s'écrit : $\bar{\sigma} = A\bar{\varepsilon}^n$, cela veut dire que pour $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$. Si les coefficients A et n sont identifiés correctement, ce modèle décrit convenablement l'écrouissage isotrope.
- Le tenseur des vitesses de déformation pouvait être présenté comme décrit ci-dessus grâce aux hypothèses suivantes : Pas de cisaillement (si $i \neq j \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = 0$) et pas d'élargissement. ($b >> h \Rightarrow \dot{\varepsilon}_2 = 0$).
- Pas de cisaillement, donc si $i \neq j \Rightarrow \sigma_{ij} = 0$.

1- Construction et écriture du modèle

L'application du premier principe de la thermodynamique aux corps déformables donne : $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{W} + \phi$ où $\dot{W}$ est l'énergie élastique accumulée et ϕ l'énergie dissipée.

$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial p}\dot{p} + \phi \Rightarrow \phi = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial p}\dot{p} \geq 0$ (en vertu du second principe de la thermodynamique), $R(p) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial p}$

Le second principe de la thermodynamique permet d'écrire : $\phi = \underline{X}\,.\underline{\dot{x}} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - R(p)\dot{p} \geq 0$

X : Force thermodynamique, il caractérise l'écart par rapport à l'état d'équilibre thermodynamique.

$\dot{x}$: Flux thermodynamique, il représente la vitesse de retour à l'état d'équilibre thermodynamique.

$$\text{Où } \underline{X} = \left|\begin{array}{l} \sigma_{ij} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}} \\ -R(p) = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \dot{p}} = \dfrac{\partial \hat{W}}{\partial p} \end{array}\right. \qquad et \quad \underline{\dot{x}} = \left|\begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \\ +\dot{p} = \lambda \end{array}\right.$$

En élastoplasticité $f(X) = f(\sigma_{ij}, R(p)) \leq 0$

Ecrouissage isotrope $\Rightarrow f(X) = f(\sigma_{ij}) - R(p) \leq 0$

Plasticité $\Rightarrow f(\sigma_{ij}) - R(p) = 0 \quad où \quad \bar{\sigma} - R(p) = 0$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(H_{ijkl}\sigma_{kl})\sigma_{ij}}$$

Dans le cas isotrope, le tenseur d'anisotropie H_{ijkl} ne contient que trois coefficients et se réduit à :

$$H_{ijkl} = \begin{vmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{vmatrix}$$

$$\text{Donc : } H_{ijkl}\sigma_{kl} = \begin{vmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix}$$

Ce qui donne en repère principale $H_{ijkl}\sigma_{kl} = \begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{vmatrix}$

Du fait de l'hypothèse d'insensibilité à la pression hydrostatique, on peut poser $\bar{\sigma} = \bar{S}$

Le calcul donne $(A + 2B)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \Rightarrow A = -2B$

En posant $A = 1$ et en recalculant $\bar{\sigma}$, on retrouve la relation :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

En élastoplasticité, on écrit : $\bar{\sigma} - R(p) \le 0$

Pour modéliser un comportement plastique, il faut déterminer la fonction seuil $\bar{\sigma}$ et l'énergie d'écrouissage $\hat{W}(p)$ qui permet de prévoir le développement de la taille de $\bar{\sigma}$.

$$R(p) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial p} \Rightarrow \hat{W} = \int A p^n dp = \frac{A}{n+1} p^{n+1} + C$$

L'élastoplasticité avec écrouissage donne $W = W^e + \hat{W}(p)$ où $W^e = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \varepsilon_{ij}^e$ où A_{ijkl} est la matrice d'élasticité, elle dépend des coefficients de Young et de Poisson.

Dans notre cas, on considère un modèle rigide plastique (pas d'élasticité), donc $W^e = 0 \Rightarrow W = \hat{W}(p) = \frac{A}{n+1} p^{n+1} + C$

$R(p)$ est identifiable grâce à des essais de traction simple (T-S)

$$\text{(T-S)} \Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

La plasticité de Von Misés donne en traction simple: $\bar{\sigma} = \sigma_1 \quad et \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$, donc

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 = R(p) = A\varepsilon_1^n$$

On voit que pour identifier $R(p)$, il faut identifier A et n. $\sigma_1 \quad et \quad \varepsilon_1$ sont directement données par la machine de traction.

Deux essais de traction simple suffisent, on pose :

$$\left| \begin{matrix} \sigma_1 = A\varepsilon_1^n \\ \sigma_2 = A\varepsilon_2^n \end{matrix} \right. \Rightarrow n = \frac{\ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \quad et \quad A = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2^n - \varepsilon_1^n}$$

Remarque : si on veut déterminer $A \; et \; n$ avec plus de précision, on doit réaliser plusieurs essais de traction simple puis exploiter statistiquement les résultas obtenus.

2- Calcul de la fonction seuil

En repères principales, les tenseurs de contraintes et de déformations s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} trace(\sigma_{ij}) \delta_{ij}$$

Le calcul donne : $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)}$

Après transformation, on obtient : $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

A priori, $f(\sigma_{ij}) = f(I_1, J_2, J_3)$ c'est-à-dire que la fonction seuil dépend du premier invariant du tenseur des contraintes (responsable du changement de volume) et des deuxième et troisième invariant du tenseur déviateur (responsable du changement de forme). Cependant l'hypothèse d'insensibilité à la pression hydrostatique nous permet d'écrire : $f(\sigma_{ij}) = f(I_1, J_2, J_3) = f(J_2, J_3)$ car I_1 n'influe pas dans ce cas.

Le calcul de J_2 $\left(J_2 = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}\right)$montre sa relation avec $f(\sigma_{ij})$, ce qui nous permet de conclure que la fonction seuil $f(\sigma_{ij})$ ne dépend finalement que du deuxième et troisième invariant du tenseur déviateur.

3- Lois d'évolution

Plasticité de Von Misés, donc $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\lambda \frac{S_{ij}}{\overline{\sigma}}$

Le calcul permet de démontrer que :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \\ \dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) \\ \dot{\varepsilon}_3 = \dfrac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2 = \left(\frac{\lambda}{2\overline{\sigma}}\right)^2 \left[6\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

Le calcul donne : $\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2 = \frac{3}{2}\lambda^2$

Ecrouissage isotrope $\Rightarrow \lambda = \dot{p} = \dot{\overline{\varepsilon}} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2 = \frac{3}{2}\dot{p}^2$

Ce qui finalement donne la vitesse de déformation équivalente de Von Misés :

$$\dot{\overline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}$$

Conclusion : La vitesse de déformation équivalente de Von Misés est bien la conséquence de la plasticité de Von Misés.

4- Cas particuliers

$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_2 < 0$

Le calcul de la contrainte équivalente donne dans ce cas $\overline{\sigma} = \sigma_2$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(-\sigma_2) \\ \dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(2\sigma_2) \\ \dot{\varepsilon}_3 = \dfrac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(-\sigma_2) \end{cases} \quad avec \quad \overline{\sigma} = \sigma_2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -\dfrac{\lambda}{2} \\ \dot{\varepsilon}_2 = \lambda \\ \dot{\varepsilon}_1 = -\dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne $\dot{\varepsilon}_2 = -2\dot{\varepsilon}_1 = -2\dot{\varepsilon}_3$

Le calcul de la vitesse de déformation équivalente donne : $\dot{\overline{\varepsilon}} = |\dot{\varepsilon}_2| = \lambda$

Cette situation donne un essai de traction simple ($\overline{\sigma} = \sigma_2 < 0\, et\, \overline{\varepsilon} = \varepsilon_2 = -2\varepsilon_1 = -2\varepsilon_3$)

5- Zone d'élargissement :

Au bord libre la contrainte normale à ce bord est nulle ($\sigma_2 = 0$). Dans cette zone, l'écoulement suit les directions normale et transversale. Comme l'état de déformation est supposé plan, alors il n y'a pas d'écoulement suivant la direction longitudinale (1) $\Rightarrow \dot{\varepsilon}_1 = 0$

Comme nous sommes en repère principal, les composantes de cisaillement sont nulles.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Dans ce cas, le calcul donne $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3}$

La loi d'évolution donne : $\dot{\varepsilon}_1 = \dfrac{\lambda}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_1 - \sigma_3) = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \dfrac{\sigma_3}{2}$

En intégrant cette dernière relation dans $\bar{\sigma}$, on obtient $\bar{\sigma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_3|$.

$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_3|$ du fait de l'incompressibilité plastique qui nous a permis de poser $\varepsilon_3 = -\varepsilon_2$.

Le modèle d'écrouissage d'Hollomon donne $\bar{\sigma} = A\bar{\varepsilon}^n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_3| = A\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_3|\right)^n$

Conclusion : $|\sigma_3| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n°1}|\varepsilon_3|^n$, cette dernière relation montre qu'une loi d'écrouissage suffit pour calculer les contraintes au bord du laminé.

6- Calcul au centre de la tôle:

Au centre de la tôle $\varepsilon_2 = 0$.

$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_3|$ car $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$(comportement plastique incompressible)

La loi d'évolution donne $\dot{\varepsilon}_2 = \dfrac{\lambda}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)$

Or $\dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. En introduisant cette relation dans la contrainte équivalente, on obtient : $\bar{\sigma} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$.

La loi d'écrouissage d'Hollomon permet d'écrire : $\bar{\sigma} = A\bar{\varepsilon}^n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = A\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_3|\right)^n$

Dans le cas général (élastoplasticité), le critère s'écrit donc :

$$\left|\sigma_1-\sigma_3\right| \leq A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\left|\varepsilon_3\right|^n$$

Comportement élastique : $\left|\sigma_1-\sigma_3\right| < A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\left|\varepsilon_3\right|^n$

Comportement plastique : $\left|\sigma_1-\sigma_3\right| = A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\left|\varepsilon_3\right|^n$,- $\varepsilon_3 = \ln\frac{h}{h_f}$

Comme dit ci-dessus les coefficients A et n peuvent être identifiés suite à des essais de traction où A est un coefficient égale à la contrainte d'écoulement (contrainte nécessaire pour obtenir une déformation plastique, c'est en fait $\vec{\sigma}$) pour une déformation plastique égale à un et n est appelé exposant d'écrouissage (souvent coefficient d'écrouissage), il représente la faculté du matériau à se déformer plastiquent avant d'entamer l'endommagement.

7- On pose un coefficient ξ, appelé coefficient des états de contraintes. $\xi = \frac{2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)}$.

$$\xi = \frac{2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)} = \frac{2\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\sigma_1+\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)} = 0$$

Au bord $\sigma_2 = 0 \quad et \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_3}{2}$, dans ce cas le calcul donne $\xi = 3$

Conclusion : $0 < \xi < 3$. Quel que soit le point considéré ξ varie entre 0 et 3.

Sachant que $\xi = \frac{2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)}$, on tire σ_2, $\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\xi(\sigma_1-\sigma_3)+(\sigma_1+\sigma_3)\right]$

En introduisant cette relation dans le calcul de la contrainte équivalente, on obtient :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3+\xi^2}}{2}\left|\sigma_1-\sigma_3\right|$$

8- La loi d'évolution plastique associée à la condition d'incompressibilité plastique doivent

permettre de calculer $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2$ et $\dot{\bar{\varepsilon}}$ en fonction de ξ et de $\dot{\varepsilon}_3$.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2+\dot{\varepsilon}_2^2+\dot{\varepsilon}_3^2}$$

Sachant que $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)$, en introduisant la relation $\overline{\sigma} = \frac{\sqrt{3+\xi^2}}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$ et ξ dans $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\lambda}{2\overline{\sigma}}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)$, on obtient $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+3}}\dot{\overline{\varepsilon}}$

Calcul de la vitesse de déformation équivalente en fonction de $\xi, \dot{\varepsilon}_1 \, et \, \dot{\varepsilon}_3$, $\dot{\overline{\varepsilon}} = f(\xi, \dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_3)$

On reprend la relation $\dot{\overline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2}$. En introduisant $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+3}}\dot{\overline{\varepsilon}}$ dans $\dot{\overline{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2}$, on obtient :

$$\dot{\overline{\varepsilon}} = \sqrt{2\frac{3+\xi^2}{9+\xi^2}\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_3^2\right)}$$

Calcul de $\dot{\varepsilon}_2 = f(\xi, \dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_3)$:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\xi}{\sqrt{3+\xi^2}}\dot{\overline{\varepsilon}} = \frac{\xi}{\sqrt{3+\xi^2}}\sqrt{2\frac{3+\xi^2}{9+\xi^2}\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_3^2\right)} = \sqrt{\frac{2\xi^2}{9+\xi^2}\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_3^2\right)}$$

Calcul de $\dot{\varepsilon}_1 = f(\xi, \dot{\varepsilon}_3)$

Plasticité incompressible $\Rightarrow \dot{\varepsilon}_1 = -(\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3)$

Ce qui donne la relation : $\frac{(9+\xi^2)}{2\xi^2}(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3)^2 = (\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_3^2)$

En posant $\dot{\varepsilon}_1 = a, \dot{\varepsilon}_3 = b \quad et \quad c = \frac{2\xi^2}{9+\xi^2}$, la résolution de cette équation de second degré et en comparant les résultats obtenus, on obtient :

$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\xi - 3}{\xi + 3}\dot{\varepsilon}_3$ et donc $\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{2\xi}{\xi+3}\dot{\varepsilon}_3$ puis $\dot{\overline{\varepsilon}} = \frac{2}{\xi+3}\sqrt{\xi^2+3}|\dot{\varepsilon}_3|$

9- Le critère de plasticité s'écrit : $\overline{\sigma} \leq R(p),\ R(p)$: fonction d'écrouissage

$\overline{\sigma} = \frac{\sqrt{3+\xi^2}}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|,\ \overline{\varepsilon} = \frac{2}{\xi+3}\sqrt{\xi^2+3}|\varepsilon_3|$.

La loi d'écrouissage d'Hollomon s'écrit : $R(p) = A\overline{\varepsilon}^n$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq A\beta(\xi)|\varepsilon_3|^n \text{ avec } \beta(\xi) = \frac{2^{n+1}}{(3+\xi)^n}\left(\xi^2+3\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

10- Vérification des résultats de la question 9

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\xi-3}{\xi+3}\dot{\varepsilon}_3, \qquad \dot{\varepsilon}_2 = -\left(\frac{\xi-3}{\xi+3}+1\right)\dot{\varepsilon}_3 \quad et \quad \dot{\overline{\varepsilon}} = \frac{2}{\xi+3}\sqrt{\xi^2+3}|\dot{\varepsilon}_3|$$

Il suffit d'utiliser une loi d'évolution pour calculer $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2 \quad et \dot{\varepsilon}_3$, reprendre la relation $\xi = \dfrac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$ et comparer les résultats du calcul.