

TD 01 :

Objectif : Discuter certains aspects de la modélisation elasto-plastique d'une tôle laminée puis emboutie.

Hypothèses :

- Matériau isotrope
- Comportement élasto-plastique avec écrouissage linéaire
- Elasticité de Hooke
- Plasticité de Von Misés.

Q1 : Expliquer les hypothèses présentées ci-dessus.

Q2 : Présenter le modèle rhéologique correspondant.

Rappeler la construction et l'écriture du modèle.

Q3 : Ecrire les lois d'évolution plastique et montrer que $\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\dot{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_0}$ où $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation équivalente, S_{ij} une composante du tenseur déviateur des contraintes et σ_0 la contrainte d'écoulement.

Montrer que $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}$ en repères principales.

Q4 : Laminage à froid d'une tôle mince :

Hypothèse : - Matériau rigide plastique + déformation plane ($b \gg h_{moyen} \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$)

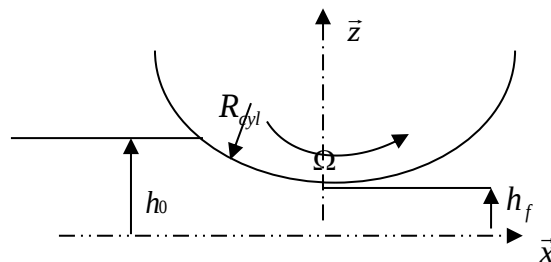


Schéma simplifié du foyer de déformation

Paramètres géométriques : h_0 , h_f , R_{cyl} , b .

Paramètres cinématiques : Ω

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$$

- Justifier l'écriture de ces deux tenseurs.

- Montrer que $\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_z|$.
- Montrer que $\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$ et que $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_x - \sigma_z|$
- Montrer que la loi de comportement s'écrit : $|\sigma_x - \sigma_z| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} a + \frac{4}{3} b \left| \ln \frac{h}{h_0} \right|$
- Au bord $\sigma_y = 0$ et $\dot{\varepsilon}_x = 0$
 - Justifier ces deux hypothèses.
 - Montrer que $\sigma_x = \frac{\sigma_z}{2}$ et que $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_z|$.
 - Montrer qu'une loi de comportement permet de calculer $|\sigma_z(x)_{au\ bord}|$ en fonction de a , b et h . On doit trouver $|\sigma_z(x)_{au\ bord}| = \frac{2}{\sqrt{3}} a + \frac{4}{3} b \left| \ln \frac{h}{h_0} \right|$.
- Au centre l'équilibre d'une tranche ($\sum \vec{F} / \vec{x} = \vec{0}$) permet d'écrire :
$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{1}{h(x)} \left\{ (\sigma_z - \sigma_x) \frac{dh}{dx} - \tau \right\}$$
 où τ est une contrainte de scission.
 - Montrer que $h(x) = h_0 - \frac{x^2}{2R}$.
 - On pose $\tau = -m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\vec{v}_g}{|\vec{v}_g|}$ où $\vec{v}_g$ est la vitesse de glissement ($v_g = v_x - v_0$), $v_0 = \Omega R$. Expliquer dans ce cas la relation entre $\tau(x)$ et $v_g(x)$.
 - Ecrire l'équation d'équilibre en fonction de x avec a, b, m, R, h_0 comme constantes. Analyser.

Q5- Emboutissage : Les tenseurs de contraintes et des vitesses de déformations s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad \text{On pose : } \rho = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} \text{ et } x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

- 1- Justifier l'écriture de ces deux tenseurs.
- 2- Calculer ρ et x dans les 4 cas suivants :

Traction simple (T-S) : $\sigma_2 = 0$

Expansion biaxiée : $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$

Déformation plane : $\varepsilon_2 = 0$

Cisaillement simple : $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$

- 3- Montrer que dans les cas de la traction simple, du cisaillement simple et en expansion biaxiée, la loi de comportement suffit pour déterminer σ_{ij} .
- 4- Donner le sens de ε_3 (épaississement ou rétrécissement dans ces quatre cas).

Solution

Q1 :

- Matériau isotrope : Cela veut dire que les propriétés mécaniques du matériau sont les mêmes dans toutes les directions. Autrement dit la contrainte d'écoulement σ_0 est invariante par rotation.
- Comportement élasto-plastique : $\varepsilon^T = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. L'écrouissage linéaire est une hypothèse qui donne une relation linéaire entre $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ dans le domaine plastique. Autrement dit, $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ est une droite dans le domaine plastique. $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente et $\bar{\varepsilon}$ est la déformation équivalente de Von Misés.
- Élasticité de Hooke : Cela veut dire que nous sommes dans le cadre des hypothèses à la base de la loi de Hooke et qui sont l'isotropie et la linéarité entre σ_{ij} et ε_{ij}^e .
- Plasticité de Von Misés : C'est le cadre basique de plasticité associée ($f(\sigma_{ij}) = g(\sigma_{ij})$) où $f(\sigma_{ij})$ est la fonction seuil et $g(\sigma_{ij})$ le potentiel plastique dans le cadre du principe du travail maximal de Hill ($\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} > 0 \Rightarrow f(\sigma_{ij})$ convexe et $\dot{\varepsilon} \perp \partial C$), ∂C tout élément appartenant à la surface seuil de $f(\sigma_{ij})$. Elle s'appuie sur les hypothèses suivantes :
 - o Matériau Isotrope.
 - o Insensibilité à la pression hydrostatique ($f(\sigma_{ij}) = f(S_{ij}) = f(J_2) = \sqrt{3J_2}$) où J_2 est le deuxième invariant du tenseur déviateur.
 - o Effet baushinger négligé.

Q2 :

- Le montage rhéologique est donné par la combinaison en série entre un ressort et un ressort avec un patin en parallèle.
 - Construction et écriture du modèle :
- L'application du premier principe de la thermodynamique aux corps déformables donne :
- $$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{W}^e + \dot{W}^p + \dot{\phi} \quad \text{où } \dot{W}^e \text{ est l'énergie élastique accumulée, } \dot{W}^p \text{ l'énergie accumulée}$$

lors de la déformation plastique (sous forme d'empilement de dislocations) et ϕ l'énergie dissipée.

$$W = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^e + \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_2^p, \quad \varepsilon_2^e = \varepsilon_2^p$$

$$\Omega(\dot{\varepsilon}^p) = K_2 |\dot{\varepsilon}^p|$$

$\phi = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} - \dot{W} = \left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1^e} \right) \dot{\varepsilon}_1^e + \left(\sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2^p} \right) \dot{\varepsilon}_2^p > 0$ (En vertu du second principe de la thermodynamique).

$$\begin{cases} X = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}_1^e} = \sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1^e} = 0 \Rightarrow \sigma = E_1 \varepsilon_1^e \\ \sigma - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2^p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}_2^p} \Rightarrow \sigma = E_2 \varepsilon_2^p + K \text{signe} \dot{\varepsilon}_2^p \\ \dot{\varepsilon}_2^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_p} \end{cases}$$

X : Force thermodynamique, il caractérise l'écart par rapport à l'état d'équilibre thermodynamique.

$\dot{\lambda}$: Flux thermodynamique, il représente la vitesse de retour à l'état d'équilibre thermodynamique.

$$\text{Où } \underline{X} = \begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}} \\ -R(p) = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \dot{p}} \end{cases} \quad \text{et } \underline{\dot{\lambda}} = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \\ + \dot{p} = \lambda \end{cases}$$

En élastoplasticité $f(X) = f(\sigma_{ij}, R(p)) \leq 0$

Ecrouissage isotrope $\Rightarrow f(X) = f(\sigma_{ij}) - R(p) \leq 0$

Plasticité $\Rightarrow f(\sigma_{ij}) - R(p) = 0$ où $\bar{\sigma} - R(p) = 0$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{(H_{ijkl} \sigma_{kl}) \sigma_{ij}} \quad \text{Où } H_{ijkl} \sigma_{kl} = \begin{vmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{12} \end{vmatrix}$$

$$\text{Ce qui donne en repère principale } H_{ijkl} \sigma_{kl} = \begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Du fait de l'hypothèse d'insensibilité à la pression hydrostatique, on peut poser $\bar{\sigma} = \bar{S}$

Le calcul donne $(A + 2B)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \Rightarrow A = -2B$

En posant $A = 1$ et en recalculant $\bar{\sigma}$, on retrouve la relation :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

En élastoplasticité, on écrit : $\bar{\sigma} - R(\) \leq 0$

Pour modéliser un comportement plastique, il faut déterminer la fonction seuil $\bar{\sigma}$ et l'énergie d'écrouissage $\hat{W}(\varepsilon)$ qui permet de prévoir le développement de la taille de $\bar{\sigma}$.

$$R(p) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon} = a + b\varepsilon \Rightarrow \hat{W} = \int (a + b\varepsilon) d\varepsilon = a\varepsilon + b \frac{\varepsilon^2}{2} + C$$

L'élastoplasticité avec écrouissage donne $W = W^e + \hat{W}(p)$ où $W^e = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \varepsilon_{ij}^e$ où A_{ijkl} est la matrice d'élasticité dépend des coefficients de Young et de Poisson.

$R(p)$ est identifiable grâce à des essais de traction simple (T-S).

Q3 :

$$\text{Loi d'évolution : } \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

Le calcul donne :

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}), \text{ or } S_{xx} = \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} \frac{3}{3} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) = \frac{3}{2} \lambda \frac{S_{xx}}{\bar{\sigma}}, \text{ or } \bar{\sigma} = \sigma_0 \text{ et } \lambda = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{S_{xx}}{\sigma_0}$$

De même, le calcul donne :

$$\begin{cases} \frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{S_{xx}}{\sigma_0} \\ \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{S_{yy}}{\sigma_0} \\ \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{\dot{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{S_{zz}}{\sigma_0} \end{cases} \Rightarrow S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_0 \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{\varepsilon}}$$

$$\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 = \left(\frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} \right)^2 [6(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_y \sigma_z - \sigma_y \sigma_x - \sigma_z \sigma_x)]$$

$$\text{Le calcul donne : } \dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 = \frac{3}{2} \lambda^2$$

$$\text{Ecrouissage isotrope } \Rightarrow \lambda = \dot{p} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 = \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}^2$$

Ce qui finalement donne la vitesse de déformation équivalente de Von Mises :

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\varepsilon}_x^2 + \dot{\varepsilon}_y^2 + \dot{\varepsilon}_z^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}$$

Conclusion : La vitesse de déformation équivalente de Von Mises est bien la conséquence de la plasticité de Von Mises.

Q4 : Modélisation du laminage.

- Justification de $\dot{\varepsilon}_{ij}$ et σ_{ij} .

$$\circ \text{ Pas de cisaillement } \Rightarrow \text{ si } i \neq j \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 (\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = 0)$$

- Tôle très large par rapport à la hauteur $\Rightarrow v_y(y) \approx \text{Const} \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = \dot{\varepsilon}_y \rightarrow 0$.
- Matériau incompressible $\Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$, or $\varepsilon_y = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = -\varepsilon_z$, donc

$$\text{le tenseur } \dot{\varepsilon}_{ij} \text{ s'écrit : } \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Pour } i \neq j \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{xy} = 3\lambda \frac{\sigma_{xy}}{\bar{\sigma}} \Rightarrow \sigma_{xy} = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{yz} = 3\lambda \frac{\sigma_{yz}}{\bar{\sigma}} \Rightarrow \sigma_{yz} = 0 \text{ car } \lambda > 0 \text{ et } \bar{\sigma} > 0 \\ \dot{\varepsilon}_{zx} = 3\lambda \frac{\sigma_{zx}}{\bar{\sigma}} \Rightarrow \sigma_{zx} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_y = 0 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) \Rightarrow 2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

Comme $\sigma_x \neq 0, \sigma_z \neq 0$ et $\sigma_x + \sigma_z \neq 0 \Rightarrow \sigma_y \neq 0 \neq 0$, ce qui donne un tenseur des contraintes du type :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$- \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_z|$$

car $\varepsilon_y = 0$ et $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$.

Remarque : On doit écrire $|\varepsilon_z|$ car $\bar{\varepsilon}$ est positive et ε_z est négative du fait qu'il y'a diminution de l'épaisseur.

$$- f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sigma_z\right)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6}{4} (\sigma_z - \sigma_x)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} |\sigma_x - \sigma_z|$$

- Ecriture de la loi de comportement s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} |\sigma_x - \sigma_z| \text{ et } \bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_z|,$$

Sachant que $\sigma_0 = a + b\bar{\varepsilon}$ on écrit $\sqrt{\frac{3}{2}}|\sigma_x - \sigma_z| \leq a + b\bar{\varepsilon}$, le calcul donne

$$|\sigma_x - \sigma_z| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}a + \frac{4}{3}b \left| \ln \frac{h}{h_0} \right|$$

- Au bord $\sigma_y = 0$ et $\dot{\varepsilon}_x = 0$.

$$\text{Au bord } v_x(x) \approx \text{Const} \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_x \rightarrow 0$$

Bord libre $\Rightarrow$ la contrainte normale à ce bord doit être nulle, comme l'élargissement est négligeable σ_y sera pratiquement normale au bord et donc ça sera σ_y qui sera nulle.

$$\dot{\varepsilon}_x = 0 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \Rightarrow 2\sigma_x - \sigma_z = 0 \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_z}{2}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}, \sigma_y = 0 \text{ et } \sigma_x = \frac{\sigma_z}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_z^2 + \sigma_z^2 + \frac{1}{4}\sigma_z^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_z|$$

La loi de comportement donne $\bar{\sigma} = a + b\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}|\varepsilon_z|, \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_z| = a + \frac{2}{\sqrt{3}}b|\varepsilon_z|$$

$$\text{Ce qui donne : } |\sigma_z| = \frac{2}{\sqrt{3}}a + \frac{4}{3}b|\varepsilon_z|, \sigma_x = \frac{\sigma_z}{2}, \sigma_y = 0$$

- En appliquant le théorème de Pythagore on obtient : $x^2 + (R - (\Delta h))^2 = R^2$, $\Delta h = h - h_f$ en posant $\Delta h^2 \rightarrow 0$, on obtient $x = \sqrt{2R_{cyl}(h - h_f)}$ et donc

$$h(x) = h_0 - \frac{x^2}{2R_{cyl}}.$$

$$\tau = -m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\bar{v}_g}{|\bar{v}_g|}$$

La contrainte de frottement τ ne dépend pas de la vitesse de glissement en module. τ dépend de $\bar{v}_g$ en direction et en sens (même direction et sens opposé). On retrouve le cadre de la plasticité indépendante des vitesses.

- $\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{1}{h(x)} \left\{ (\sigma_z - \sigma_x) \frac{dh}{dx} - \tau \right\}$, C'est une équation différentielle d'ordre un à trois inconnues $(\sigma_x(x), \sigma_z(x) \text{ et } \tau(x))$.

Sachant que $h(x) = h_0 - \frac{x^2}{2R_{cyl}}$, $\Rightarrow \frac{dh}{dx} = -\frac{x}{R}$, que la loi de comportement donne

$|\sigma_x - \sigma_z| = \frac{2}{\sqrt{3}}a + \frac{4}{3}b \left| \ln \frac{h}{h_0} \right|$ et que la loi de frottement donne $\tau = \mp m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$, l'équation

d'équilibre donne : $\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{2R}{2Rh_0 - x^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}a + \frac{4}{3}b \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \frac{x}{R} \pm m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right\}$

Avec $\sigma_0 = a + \frac{2}{\sqrt{3}}b \left| \ln \frac{h}{h_0} \right|$

On voit bien que le gradient de contrainte $\frac{d\sigma_x}{dx}$ est fonction de

a, b : Paramètres du matériau laminée

m : Paramètre de frottement, c'est en fait le coefficient de frottement de Tresca.

R, h_0, x : Paramètres géométriques lors du laminage.

Q5 : Modélisation de l'emboutissage.

- Pas de cisaillement $\Rightarrow$ si $i \neq j$ $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$ et $\sigma_{ij} = 0$

$\sigma_3 = 0$ car feuille mince et surface libre.

Donc les tenseurs de contraintes et des vitesses de déformations s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} -\dot{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}$$

- $\rho = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1}$ et $x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

T-S : $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ et $\bar{\sigma} = \sigma_1 = \sigma$

$$\sigma_2 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) = -\lambda \frac{\sigma}{2\sigma} = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) = -\lambda \frac{\sigma}{\sigma} = \lambda$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) = -\lambda \frac{\sigma}{2\sigma} = -\frac{\lambda}{2} \\ \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) = -\lambda \frac{\sigma}{\sigma} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \dot{\varepsilon}_1 = -2\dot{\varepsilon}_2 \quad \rho = -\frac{1}{2}$$

EB : $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \Rightarrow \rho = 1$

Pour calculer $x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, il faut trouver une relation entre σ_2 et σ_1 .

En utilisant une loi d'évolution, on trouve :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_1 - \sigma_2) = \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_2 - \sigma_1) \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{DP : } \dot{\varepsilon}_2 = 0 = \frac{\lambda}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_2 - \sigma_1) \Rightarrow 2\sigma_2 - \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} = 0$$

$$\text{C-S : } \rho = -1 = \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 - \sigma_2} \Rightarrow 2\sigma_2 - \sigma_1 = -2\sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_1 \Rightarrow x = -1$$

Résultats :

	E-B	D-P	T-S	C-S
ρ	1	0	- 0,5	-1
x	1	0,5	0	-1

- On montrera qu'en EB, en TS et en CS on peut calculer les contraintes suite à l'utilisation d'une loi de comportement. Dans tous les cas on réduira le calcul de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ en fonction de σ_1 ou σ_3 puis la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ en fonction de ε_3 ($\varepsilon_3 = \ln \frac{h}{h_0}$). On appliquera en suite la relation $\bar{\sigma} = a + b\bar{\varepsilon}$ et on trouvera σ_3 en fonction de a, b qui sont des paramètres du matériau et ε_3 .

EB :

$$\sigma_2 = \sigma_1 \text{ donc } \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2} = |\sigma_1|$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2}, \quad 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_3}{2} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_3^2 + \frac{2}{2}\varepsilon_3^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} |\varepsilon_3|$$

$$\bar{\varepsilon} = |\varepsilon_3|$$

$$\text{Loi d'écrouissage : } |\sigma_1| = a + b|\varepsilon_3|.$$

DP :

$$\dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \Rightarrow \bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1|$$

3

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_1| = a + b \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_3| \Rightarrow |\sigma_1| = |\sigma_2| \frac{2}{\sqrt{3}} a + \frac{4}{3} b |\varepsilon_3|, \sigma_3 = 0$$

TS :

$$\bar{\sigma} = \sigma_1, \sigma_2 = 0$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_1$$

$$\sigma_1 = a - 2b\varepsilon_3 = a + b\varepsilon_1$$

$$\text{CS : } \sigma_1 = -\sigma_2, \varepsilon_1 = -\varepsilon_2$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\sigma_1)^2 + (-\sigma_1)^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{2} |\sigma_1|$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2\varepsilon_1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_1| \quad \text{Car } \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_1) = 0$$

$$|\sigma_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} a + 2 \sqrt{\frac{2}{3}} b |\varepsilon_1|$$

Conclusion : Dans ces quatre cas limites, une loi de comportement suffit pour calculer σ_{ij}

- L'épaississement ou le rétrécissement dépend du signe de ε_3 (si $\varepsilon_3 < 0 \Rightarrow$ rétrécissement, si $\varepsilon_3 > 0 \Rightarrow$ épaississement). $\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

$$\text{EB : } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 \Rightarrow \varepsilon_3 < 0$$

$$\text{DP : } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 < 0$$

$$\text{TS : } \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 = -\varepsilon_1 / 2 \Rightarrow \varepsilon_3 > 0$$

$$\text{CS : } \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_3 = 0$$

TD 02

1. Cours

1.1

Répondez par oui ou non :

$$a : \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{cases} - \text{Tenseur purement déviateur} \\ - \text{Pas de variation de volume} \\ - \text{Pas de variation de forme} \end{cases}$$

b : Calculer les contraintes principales.

Justifiez vos choix en utilisant les résultats de ce calcul.

1-2 Soit la relation contrainte déformation dans le domaine élastique :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & E & 0 & 0 & 0 \\ B & A & E & 0 & 0 & 0 \\ E & E & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A-B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

a : répondez par oui ou non :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Elasticité non linéaire} \\ \text{Elasticité isotrope} \end{array} \right.$

b : La relation Contrainte-déformation dans le cas de Hooke s'écrit

$$(\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij})$$

c : Donnez les hypothèses à la base de cette relation.

. Remplir le tenseur d'élasticité

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

1.3 Plasticité de Von-Misés

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} - \sigma_e \leq 0$$

a: Répondez par oui ou non : Hypothèses :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{variation de volume} \\ \text{Effet Baushinger négligé} \\ \text{Matériau anisotrope} \end{array} \right.$

b: Soit les tenseurs de contraintes suivants :

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} : \text{Montrer que dans ce cas, nous n'avons pas de variation de volume.}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} : \text{Montrer que quelque-soit la valeur de } \sigma, \text{ on n'a pas de déformation}$$

plastique.

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \text{Montrer que dans ce cas, nous avons une variation de volume et une}$$

variation de forme.

c : Montrer qu'on peut aussi écrire ce critère dans la forme suivante :

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_e \leq 0. \quad J_2 \text{ est le second invariant du tenseur déviateur.}$$

2. Exercice

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

2.1 Théorie des contraintes

. Calculer les contraintes principales.

. Calculer les tenseurs sphérique et déviateur.

. Calculer la contrainte normale octaédrique, la contrainte totale octaédrique et la contrainte tangentielle octaédrique.

2.2 Comportement élastique :

a: Montrer que la loi de Hooke : $\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{KK} \delta_{ij}$ peut s'écrire :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij}^e + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \varepsilon_{KK} \delta_{ij} \text{ et que } \sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \text{ et } \varepsilon_{ij}^e = A_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}.$$

b: Présenter les matrices de rigidité A_{ijkl} et de complaisance A_{ijkl}^{-1} en fonction du module de Young et du coefficient de poisson.

c : Donner la démarche qui permet d'identifier le module de Young et le Coefficient de Poisson.

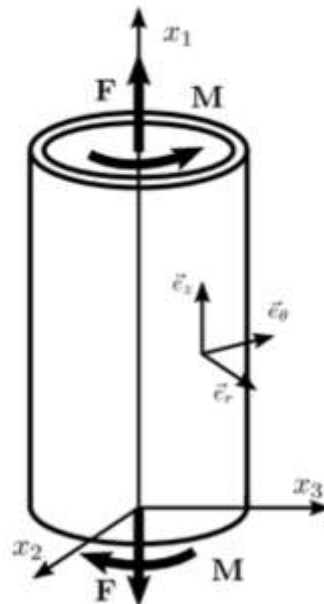
d : Calculer les composantes du tenseur de déformation élastique.

e: Pour quelle valeur du coefficient de poisson nous avons un comportement élastique incompressible.

AN :

$$\sigma_{11} = 250 \text{MPa}, \sigma_{22} = -300 \text{MPa}, \sigma_{12} = 150 \text{MPa}, E = 210 \text{GPa}, \nu = 0,3$$

3. Exercice d'application



Quel tenseur de contraintes correspond ce schéma ?

$$\left\{ \begin{array}{l} a : \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{vmatrix} \\ b : \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ c : \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Justifier votre choix. Calculer dans ce cas le tenseur sphérique et déviateur
Quelles conclusions faites-vous ?

Corrigé

1.1

$$a : \sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} - \text{Tenseur purement déviateur : oui.1} \\ - \text{Pas de variation de volume : oui.1} \\ - \text{Pas de variation de forme : non.1} \end{array} \right.$$

On pose $\det(\sigma_{ij} - \sigma) = 0$. Note : /4

Le calcul donne : $-\sigma(\sigma^2 + 2\tau^2) = 0$ et donc

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -\sqrt{2}\tau \\ \sigma_3 = +\sqrt{2}\tau \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes principales s'écrit donc :

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}\tau & 0 \\ \tau & 0 & \sqrt{2}\tau \end{vmatrix}$$

On confirme que le tenseur est purement déviateur car sa trace est nulle. Or, un tenseur déviateur n'engendre qu'une variation de volume, donc pas de variation de forme. A titre illustratif, la contrainte hydrostatique est nulle ($p = 0 + \sqrt{2}\tau - \sqrt{2}\tau = 0$).

1.2

$$a : \begin{cases} \text{Elasticité non linéaire : non.} \\ \text{Elasticité isotrope: non.} \end{cases}$$

b : Hypothèses :

- Elasticité linéaire. 1
- Elasticité complètement 1

C :

$$(\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

1.3 Plasticité de VonMises.

$$a : \begin{cases} \text{variation de volume : non.} \\ \text{Effet Baushinger négligé : oui.} \\ \text{Matériau anisotrope : non.} \end{cases} \quad b :$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}, p = -(0 + 0 + 0) = 0 \Rightarrow \text{pas de variation de volume :}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}, p = -(0 + 0 + 0) = 0 \Rightarrow \text{pas de variation de volume}$$

Noté sur 2

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -p \delta_{ij} + S_{ij} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

On voit bien nous avons un tenseur sphérique non nul et un tenseur déviateur non nul, et donc une variation de volume et une variation de forme.

C :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} - \sigma_e \leq 0 \text{ peut s'écrire : } \sqrt{3J_2} - \sigma_e \leq 0$$

$$\text{On doit démontrer que } \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] = 3J_2$$

$$J_2^2 = \frac{1}{2} (S_{ij} \cdot S_{ij}) = \frac{1}{2} [(S_1)^2 + (S_2)^2 + (S_3)^2] = \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right)^2 \right]$$

Le calcul donne :

$$J_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{9} [(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^2]$$

$$J_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{9} [2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1]. \text{ En factorisant, on obtient :}$$

$$9J_2^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \Rightarrow 3J_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

2. Exercice :

2.1

$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$ Donc la direction 3 σ_{33} est principale. Nous avons donc un tenseur plan. Pour calculer les composantes principales du tenseur.

$$\text{On pose } \det(\sigma_{ij} - \sigma) = \begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Le calcul donne :

$$\text{Le calcul donne : } \sigma^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0$$

La solution de cette équation fournit σ_1 et σ_2

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{11} + \sigma_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$- \quad |\sigma_{\bar{n}}| = \sigma_{ij} n_j n_i = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{23} n_2 n_3 + 2\sigma_{31} n_3 n_1$$

Direction octaédrique $\vec{\Delta} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ par rapport aux directions principales.

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le calcul donne : $\sigma_{n(oct)} = \sigma_{ij} n_j n_i = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}_1(M, \vec{n}_1) + \vec{T}_2(M, \vec{n}_2) + \vec{T}_3(M, \vec{n}_3) \Rightarrow$$

$$|\vec{T}(M, \vec{n})| = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1 \\ T_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_2 \\ T_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_3 \end{cases} \Rightarrow T = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_3 \right)^2}$$

$$T_{oct}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{T_{oct}^2 - \sigma_{n(oct)}^2} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}$$

2.2

b :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij}^e + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \varepsilon_{KK} \delta_{ij}$$

$$A_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{KK} \delta_{ij}$$

$$A^{-1}_{ijkl} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{vmatrix}$$

C : Un essai de traction simple permet d'identifier le module de Young E et le coefficient de Poisson ν .

E est donnée par la pente de la droite $\sigma - \varepsilon_1$ dans le domaine élastique. $\nu = -\varepsilon_T / \varepsilon_L$ sachant que les tenseurs de contraintes et de déformations dans ce cadre s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_L & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

A partir de $\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{KK} \delta_{ij}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^e = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2)] = 16.10^{-4} \\ \varepsilon_2^e = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1)] = 178.10^{-5} \\ \varepsilon_3^e = -\frac{1}{E} [\nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = 71.10^{-6} \\ \varepsilon_{12}^e = \varepsilon_{21}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = 93.10^{-5} \end{array} \right.$$

. En traction simple, $\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e = \frac{1}{E} [\sigma] - 2 \frac{\nu}{E} (\sigma) = \sigma \left(\frac{1-2\nu}{E} \right)$

Elasticité incompressible, donc $\frac{\Delta V}{V_0} = 0 = 1 - 2\nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{2}$

3 : Exercice d'application :

Tenseur b. / $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2\sigma & 3\tau & 0 \\ 3\tau & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix}$

La traction donne un tenseur sphérique non nul, donc on a une variation de volume. On a aussi un tenseur déviateur non nul, on a donc aussi une variation de forme.

TD 03

On propose de discuter l'écriture des lois de comportement dans différents cadres.

1 : Plasticité associée non quadratique avec écrouissage isotrope.

$$f(\underline{X}) = f(\sigma_{ij}, R) = f(\sigma_{ij}) - R(p) \quad f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = a \cdot \left\{ |S_1|^m + |S_2|^m + |S_3|^m \right\}$$

1. Présenter et Justifier le cadre utilisé et cette écriture.
2. Pour quelle valeur de a et de m nous obtenons le critère de Von Misés.
3. Démontrer dans le cadre de Von Misés les éléments présentés au tableau suivant :

	Traction-compression	Torsion	Laminage	Emboutissage equibiaxé
$\bar{\varepsilon}$	$\left \ln \frac{S_0}{S} \right $	$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{R\alpha}{L}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{e_0}{e}$	$\ln \frac{e_0}{e}$
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	$\frac{1}{S} \left \frac{dS}{dt} \right $	$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{R.d\alpha}{L.dt}$	$\frac{4R_{cyl} \omega \sin \varphi}{\sqrt{3}(e + 2.R_{cyl} \cdot (1 - \cos \varphi))}$	$\frac{v_z}{e}$
$\bar{\sigma}$	$\frac{F}{S}$	$\sqrt{3}\tau$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_x - \sigma_z)$	σ

Traction-compression :

S_0 : Section initiale de l'échantillon.

S : Section de l'échantillon.

F : Effort de traction ou compression

Torsion :

R : Rayon de l'échantillon.

α : Angle parcourue.

L : Longueur de l'échantillon.

τ : Contrainte de torsion

Laminage :

e_0 : Epaisseur initiale de la tôle.

e : Epaisseur de la tôle.

R_{cyl} / Rayon du cylindre.

ω : Vitesse angulaire du cylindre.

φ : Angle de laminage à la position considérée.

σ_x : Contrainte longitudinale de laminage.

σ_z : Contrainte normale.

Emboutissage équilibaxée:

v_z : Vitesse du poinçon.

σ : Contrainte appliquée.