

Lois de comportement

Problèmes de MMC

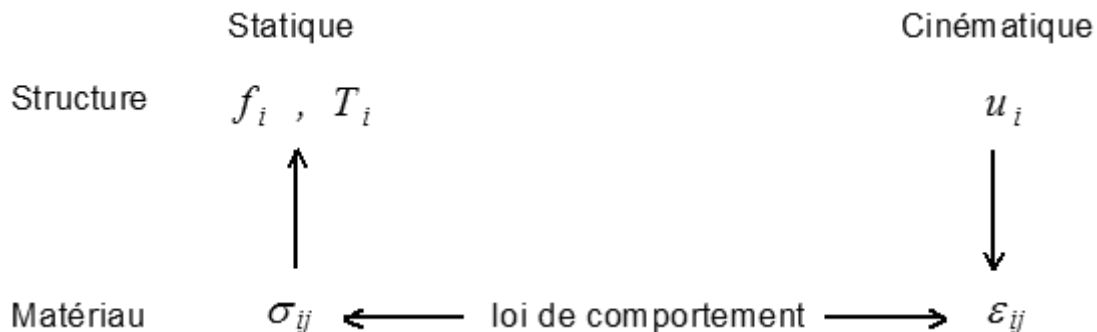
Pour un problème statique (ou quasi-statique) et dans le cadre des petites perturbations, un problème de MMC revient à calculer le champ de contrainte $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ et le champ de déplacement $u_i(\mathbf{x})$, vérifiant

- Les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$$

- les conditions aux limites statiques ou cinématiques,
- la loi de comportement.

C'est à cette dernière composante que nous nous intéressons ici. C'est par elle que l'on prendra en compte la nature physique des matériaux et elle se traduira finalement par une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.



La résolution d'un problème de structure exige, pour relier les efforts appliqués (forces de volume $\mathbf{f}$ et forces surfaciques $\mathbf{T}$) aux déplacements $\mathbf{u}$, de passer par les contraintes et les déformations qui en résultent à l'échelle du matériau.

En règle générale cette résolution sera réalisée numériquement et le plus souvent par un calcul éléments finis. Il convient donc de conserver présent à l'esprit que toutes les lois de comportement que nous développerons dans la suite de ce cours ont vocation à être intégrées dans un tel code de calcul. Nous n'évoquerons que rarement cet aspect, mais il est important.

Energie et dissipation

Les échanges d'énergie joueront, dans la caractérisation du matériau, un rôle essentiel. En négligeant les couplages thermomécaniques, le bilan énergétique fondamental est

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{w} + \phi \quad \phi \geq 0$$

La puissance mécanique fournie au système (pour le déformer ; rappelons qu'une partie sera transformée en énergie cinétique) est en partie stockée sous forme d'énergie et en partie dissipée, c'est-à-dire dégradée sous forme de chaleur.

C'est ainsi, par exemple, que nous avons construit le modèle élastique linéaire

$$w = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad \phi = 0$$
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

et, dans le cas isotrope, la loi de Hooke

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{kk} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$
$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

En mécanique des fluides

Il peut sembler (et il est effectivement) incongru de parler de mécanique des fluides dans un cours de mécanique des matériaux solides, puisque limité aux petites perturbations, et pourtant...!

Les matériaux réels peuvent, suivant leur nature et les circonstances, présenter certains aspects de comportement fluide, et nous devons intégrer cette composante dans notre panorama. En fait, la Mécanique des Matériaux, au sens où nous l'entendons ici, commence sitôt que nous quittons la mécanique des solides élastiques et la mécanique des fluides classique. Un cours de Mécanique des Matériaux exige de quitter le cadre des petites perturbations.

Si nous avons choisi de nous limiter ici au cas des petites perturbations, c'est essentiellement pour une raison technique. La plupart des concepts et modèles que nous développerons dans la suite resteront largement valables dans le cas général. Toutefois leur mise en œuvre exige le formalisme des grandes transformations, formalisme qui reste un peu lourd – beaucoup

moins lourd toutefois qu'on ne le pense habituellement. Ce formalisme fera l'objet du cours Grandes Transformations.

Les modèles de la mécanique des fluides classique (fluide parfait et fluide visqueux, compressibles ou incompressibles) font donc partie, au moins comme cas limite, de l'univers que nous nous proposons d'explorer. De plus ils vont nous fournir une illustration flagrante de l'importance du bilan énergétique fondamental qui, dans ce cas, s'écrit

$$\sigma_{ij} D_{ij} = \rho \dot{e} + \phi$$

L'énergie dans un fluide ne dépend que de la masse volumique (et bien sûr de la température, mais nous avons décidé d'ignorer les couplages thermomécaniques ; nous y reviendrons plus loin). En utilisant l'équation de continuité, la dissipation peut alors s'écrire

$$\phi = \left[\sigma_{ij} - \rho^2 \frac{de}{d\rho} \delta_{ij} \right] D_{ij}$$

On en tire pour un fluide parfait, c'est-à-dire non dissipatif ($\phi = 0$),

$$\sigma_{ij} = \rho^2 \frac{de}{d\rho} \delta_{ij} = -p(\rho) \delta_{ij} \quad p = -\rho^2 \frac{de}{d\rho}$$

et pour un fluide visqueux newtonien (c'est en fait un premier exemple d'application des relations d'Onsager)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p(\rho) \delta_{ij} + \lambda_v D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_v D_{ij} \\ \sigma_{ij} D_{ij} &= \underbrace{-p(\rho) D_{ii}}_{\rho \dot{e}} + \underbrace{\lambda_v D_{ii} D_{kk} + 2\mu_v D_{ij} D_{ij}}_{\phi} \end{aligned}$$

C'est donc un premier exemple d'une partition de la puissance mécanique fournie entre énergie et dissipation. Cette partition jouera un rôle essentiel dans la suite.

Dans le cas incompressible, $\rho = \rho_0$, donc $e = e_0$, il n'y a donc pas d'énergie stockée, et $D_{ii} = \text{div } \mathbf{V} = 0$. La dissipation devient donc

$$\phi = \sigma_{ij} D_{ij} \quad D_{ii} = 0$$

qui conduit au fluide parfait incompressible si $\varnothing = 0$ (c'est, avec le solide rigide, le seul modèle qui ne donne lieu à aucun échange d'énergie), et dans le cas dissipatif au fluide visqueux newtonien incompressible

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu D_{ij}$$

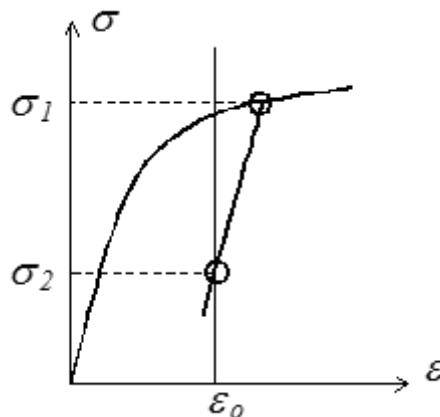
qui dissipe de l'énergie sans en stocker.

Il est remarquable que les 4 modèles de la mécanique des fluides classique illustrent les 4 variantes possibles du bilan d'énergie : avec ou sans énergie stockée, avec ou sans dissipation.

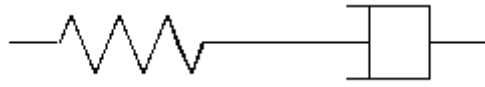
Terminons cette excursion en Mécanique des Fluides, finalement beaucoup plus raisonnable qu'il n'y paraissait au départ, en rassurant le lecteur : malgré ce qui a été dit plus haut, la Mécanique des Matériaux en petites perturbations recouvre malgré tout un très grand nombre d'applications. Le passage aux grandes transformations ne sera pas toujours indispensable.

Loi de comportement générale

La loi de comportement donne une relation entre contraintes et déformations, et effectivement la loi élastique donne σ_{ij} en fonction de ε_{ij} ou vice-versa. Il s'agit là toutefois d'un cas très particulier ; en général pour connaître la contrainte à l'instant t il ne suffira pas de connaître la déformation à l'instant t : il faut en fait également connaître toute l'histoire de déformation, c'est-à-dire la manière dont on est arrivé à cette déformation.



Un premier exemple représenté ci-contre à partir de la courbe de traction d'un acier : pour une valeur ε_0 de la déformation on pourra obtenir la contrainte σ_1 si l'on y est arrivé directement, et σ_2 s'il y a eu un retour en arrière.



Un second exemple est fourni par un modèle de Maxwell (nous anticipons ici quelque peu) pour lequel on pourra écrire

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E e^{-t/\tau} d\varepsilon(\tau)$$

De manière générale on écrira

$$\sigma(t) = \mathfrak{S}_{s \geq 0} \{ \varepsilon(t-s) \}$$

exprimant que la contrainte à l'instant t dépend de toutes les valeurs passées de la déformation.

Dans un jargon plus technique, on parle d'une fonctionnelle héréditaire causale :

- fonctionnelle, c'est ainsi que les mathématiciens appellent souvent une fonction dont l'argument est lui-même une fonction : la contrainte est une fonction de la fonction qui donne l'histoire de la déformation $\varepsilon(t-s)$ pour tout $s \geq 0$.
L'accolade est ici utilisée (plutôt qu'une simple parenthèse) pour souligner également cette dépendance fonctionnelle.
- héréditaire, car la contrainte dépend de tout ce qu'a subi le matériau. Le matériau a une mémoire.
- causale, car seule intervient l'histoire passée et non l'histoire à venir.

Remarquons par exemple, en revenant au fluide visqueux évoqué précédemment, que, en petites perturbations, le tenseur des taux de déformation est la dérivée par rapport au temps de la déformation et que ρ pourra s'exprimer à partir de la déformation. On aura donc

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

qui est bien évidemment un cas particulier de la forme générale puisque, si l'on connaît $\varepsilon(t-s)$ pour tout s , on peut bien évidemment connaître sa dérivée.

De manière complètement symétrique on peut également écrire

$$\varepsilon = \mathbb{F}_{s \geq 0} \{ \sigma(t-s) \}$$

donnant la déformation en fonction de l'histoire de la contrainte.

Revenons encore à notre fluide visqueux : la situation apparaît ici plus complexe, car la loi ne donne pas directement la déformation. Toutefois elle pourra, en principe, s'inverser en une relation $\dot{\varepsilon}(\sigma, \varepsilon)$ qui, connaissant l'histoire de σ permettra de déterminer $\varepsilon(t)$ par intégration de l'équation différentielle correspondante.

Sauf cas particulier, on n'explicitera jamais cette fonctionnelle. Il convient toutefois de bien conserver à l'esprit cette forme générale.

*Un **modèle de comportement** est un algorithme permettant à chaque instant de calculer la contrainte en fonction de l'histoire des déformations ou vice-versa.*

A

Interprétation thermodynamique

Modèles élémentaires

Le comportement élastique est conservatif et ne dissipe pas d'énergie. On écrira donc naturellement en situation uniaxiale

$$\sigma \dot{\varepsilon} = \dot{w} \quad w = w(\varepsilon) \quad \sigma = \frac{dw}{d\varepsilon}$$

Pour le ressort linéaire

$$w = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad \sigma = E \varepsilon$$

De même pour un modèle purement dissipatif $w = 0$ et donc

$$\dot{w} = \sigma \dot{\varepsilon} \geq 0$$

et sa loi de comportement donnera une relation entre la contrainte et la vitesse de déformation. Dans le cas monodimensionnel on peut introduire une fonction $\Omega(\dot{\varepsilon})$, primitive de la fonction $\sigma(\dot{\varepsilon})$. On écrira donc

$$\sigma = \sigma(\dot{\varepsilon}) = \frac{d\Omega}{d\dot{\varepsilon}} \quad \Omega(\dot{\varepsilon}) = \int \sigma(\dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon}$$

La fonction Ω est appelée potentiel de dissipation.

Pour l'amortisseur la loi est linéaire et le potentiel quadratique

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \Omega = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2$$

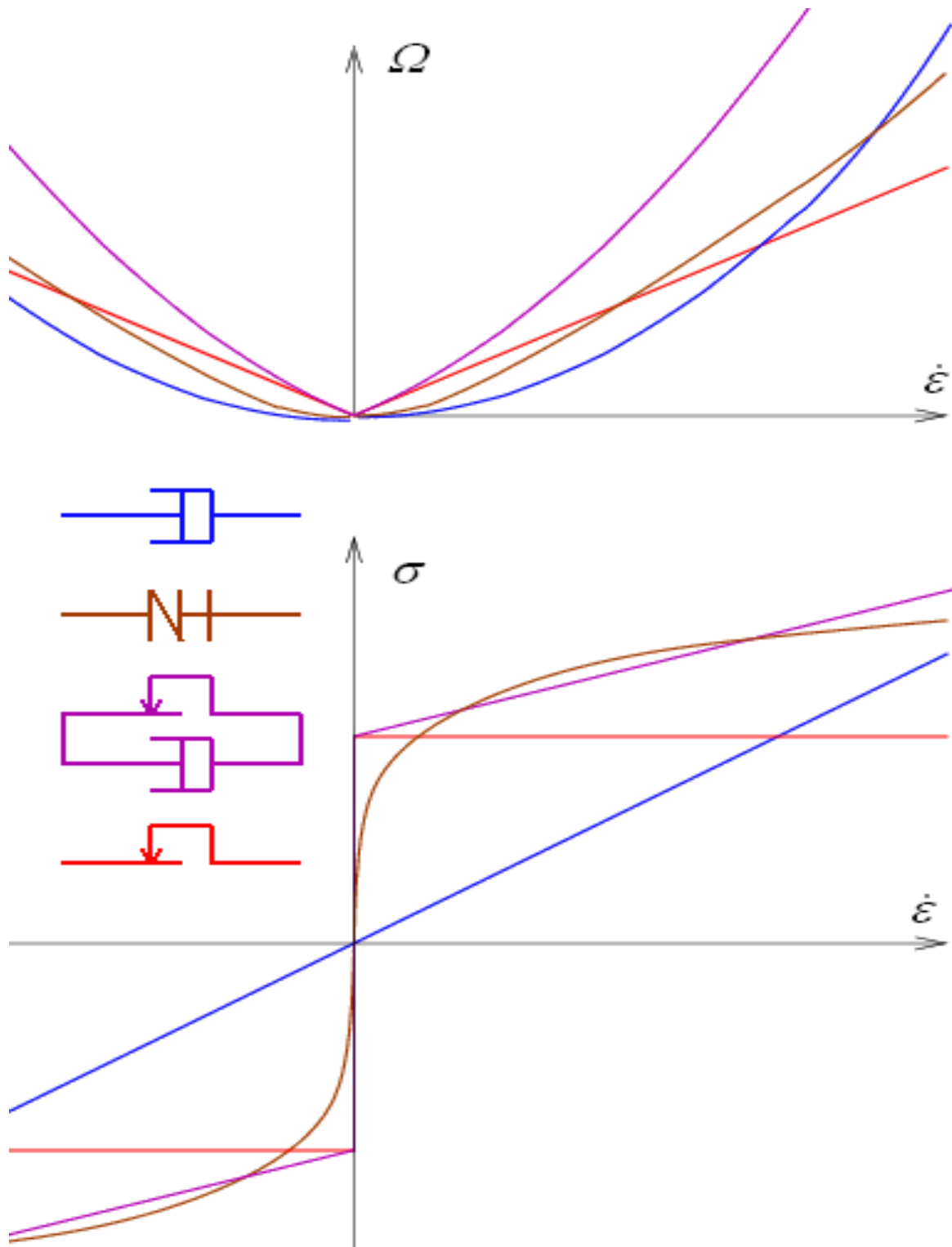
Pour le patin plastique on a de même

$$\sigma = k \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \quad \Omega = k |\dot{\varepsilon}|$$

où la fonction $\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon})$ (sgn = signe) vaut $+1$ si $\dot{\varepsilon} > 0$, -1 si $\dot{\varepsilon} < 0$ et est comprise entre -1 et $+1$ si $\dot{\varepsilon} = 0$ (donc incomplètement déterminée, ce n'est pas une fonction au sens classique du terme, il faudra, pour donner un sens

mathématique précis à cette approche, se donner quelque peine. Nous y reviendrons plus loin.)

Bingham et Norton-Hoff



Le modèle de Bingham correspond au montage parallèle d'un ressort (plutôt d'un patin selon Zaaf) et d'un amortisseur, et l'on obtient ainsi directement

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + k \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \quad \Omega = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2 + k |\dot{\varepsilon}|$$

Le modèle de Norton-Hoff, lui, correspond à une loi puissance

$$\sigma = A \dot{\varepsilon}^m \quad \Omega = \frac{A}{m+1} \dot{\varepsilon}^{m+1}$$

Toujours d'un point de vue mathématique, la fonction $\dot{\varepsilon}^m$ est étendue comme

$$\dot{\varepsilon}^m = \begin{cases} \dot{\varepsilon}^m & \text{si } \dot{\varepsilon} > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\varepsilon} = 0 \\ -|\dot{\varepsilon}|^m & \text{si } \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases}$$

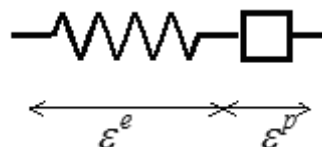
Contrairement à la fonction $\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon})$, elle est régulière et biunivoque.

Le graphique ci-contre représente pour les 4 modèles dissipatifs introduits précédemment les deux fonctions donnant σ et Ω en fonction de $\dot{\varepsilon}$.

Plus généralement, on pourra traiter de même n'importe quelle loi dissipative, par exemple les lois en sinus hyperbolique souvent rencontrées pour les mécanismes thermiquement activés. Nous imposerons néanmoins à σ d'être fonction croissante de $\dot{\varepsilon}$, ce qui conduit à une fonction $\Omega(\dot{\varepsilon})$ convexe.

Nous venons en fait d'introduire ici, dans le cas le plus simple qui puisse exister, la thermodynamique des phénomènes irréversibles (TPI). Le cas visqueux linéaire correspond à la TPI classique (relations d'Onsager) tandis que les autres cas correspondent à la TPI non-linéaire (dissipation normale).

Le modèle élasto-dissipatif



Ce modèle, important pour les applications, correspond au montage série d'un ressort et d'un élément dissipatif (amortisseur, patin, modèle de Bingham, de Norton-Hoff,...).

Dans ce montage le ressort stocke l'énergie tandis que la dissipation provient du seul élément dissipatif. L'énergie et le potentiel de dissipation sont donc respectivement

$$w = w(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} E \varepsilon^e{}^2 \quad \Omega = \Omega(\dot{\varepsilon}^p)$$

La dissipation s'obtient alors directement par

$$\begin{aligned} \phi &= \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{w} = \sigma (\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p) - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \dot{\varepsilon}^e \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \right) \dot{\varepsilon}^e + \sigma \dot{\varepsilon}^p \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à l'énergie dissipée dans le ressort, il est donc nul et

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e \quad \phi = \sigma \dot{\varepsilon}^p$$

Et on en tire tout naturellement

$$\sigma = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^p}$$

Ce qui redonne bien évidemment les équations du modèle rhéologique telles qu'on les aurait obtenues par une approche directe.

La TPI permet de formaliser cette approche selon la démarche suivante :

1. On fait une hypothèse sur l'énergie : $w = w(\varepsilon^e)$.
2. On en tire les forces et les flux thermodynamiques

$$\phi = X \cdot x \quad X = \begin{vmatrix} \sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \\ \sigma \end{vmatrix} \quad x = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}^e \\ \dot{\varepsilon}^p \end{vmatrix}$$

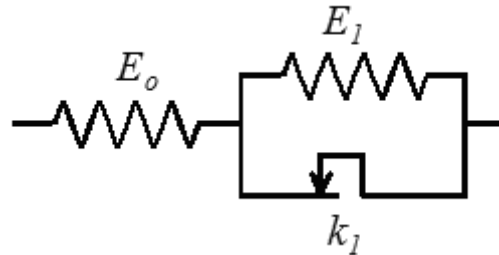
3. On fait une hypothèse sur le potentiel de dissipation : $\Omega(\dot{\varepsilon}^p)$.
4. On en tire les lois de comportement

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^e} = 0 \quad \sigma = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^p}$$

Cette démarche (cadre standard généralisé) est en fait très générale et nous en verrons de nombreuses applications.

Quelques applications

Pour nous familiariser avec cette méthode nous allons maintenant l'appliquer à quelques-uns des modèles rhéologiques classiques.



Pour décrire le modèle de Prager il faut rajouter à l'énergie du cas précédent celle d'un ressort qui se trouve en parallèle du patin

$$w = w_o(\varepsilon^e) + w_I(\varepsilon^p) = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon^{e2} + \frac{1}{2} E_1 \varepsilon^{p2}$$

Ceci rajoute un nouveau terme dans la dissipation, qui s'écrira maintenant

$$\phi = \left(\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \right) \dot{\varepsilon}^e + \left(\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^p} \right) \dot{\varepsilon}^p$$

$$X = \begin{vmatrix} \sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \\ \sigma^p = \sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^p} = \sigma - E_1 \varepsilon^p \end{vmatrix} \quad x = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}^e \\ \dot{\varepsilon}^p \end{vmatrix}$$

Le potentiel de dissipation pour un modèle de Prager est

$$\Omega(\dot{\varepsilon}^p) = k_1 | \dot{\varepsilon}^p |$$

et l'écriture des lois de la TPI donne maintenant

$$\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^e} = 0$$

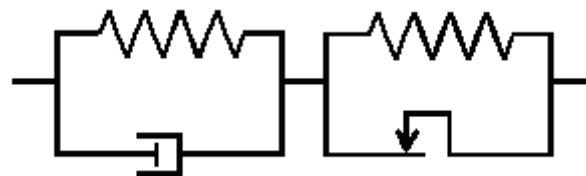
$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = E_o \varepsilon^e$$

$$\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^p} = k_l \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^p)$$

$$\sigma = E_l \varepsilon^p + k_l \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^p)$$

Si l'on veut maintenant remplacer le patin par un amortisseur (modèle de Poynting), par un modèle de Bingham (modèle souvent utilisé pour le fluage des métaux à haute température), il suffit de substituer la forme appropriée du potentiel de dissipation Ω .

Pour le modèle ci-dessous (qui a été proposé pour le bitume)



il suffit de rajouter au potentiel de dissipation du patin celui de l'amortisseur

$$\Omega = \frac{1}{2} \eta_o \dot{\varepsilon}^{e2} + k_l \left| \dot{\varepsilon}^p \right|$$

et les lois de dissipation deviennent

$$\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^e}$$

$$\sigma = E_o \varepsilon^e + \eta_o \dot{\varepsilon}^e$$

$$\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^p}$$

$$\sigma = E_l \varepsilon^p + k_l \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^p)$$

Thermodynamique des processus irréversibles

Irréversibilité - Dissipation

Dans sa formulation traditionnelle, la thermodynamique porte mal son nom et il vaudrait mieux parler de thermostatique.

D'une part elle se limite usuellement à des processus suffisamment lents pour que l'on puisse négliger l'énergie cinétique – elle se situe donc dans le cadre quasi statique tel que nous l'avons défini en MMC ($\leq$). Sinon l'énergie

cinétique intervient au même titre que l'énergie interne dans le premier principe de la thermodynamique.

D'autre part, et c'est ce qui nous importe ici, elle étudie principalement les états d'équilibre thermodynamique et donc principalement les évolutions réversibles pour lesquelles le second principe se ramène à une égalité. Dans le cas irréversible elle constate une inégalité mais s'arrête à peu près là.

Pour aller plus loin, il faut aborder un autre chapitre : la TPI, Thermodynamique des Processus (ou des Phénomènes) Irréversibles, en général non traité dans les exposés classiques. Il s'agit pourtant là d'un chapitre important et aux multiples applications.

Le point de départ en est toujours la dissipation ou production interne d'entropie que, de manière générale, on pourra décrire sous la forme d'un produit scalaire

$$\dot{\sigma} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x}$$

Les forces thermodynamiques $\mathbf{X}$ mesurent l'écart à l'équilibre, tandis que les flux thermodynamiques $\mathbf{x}$ traduisent une vitesse de retour à l'équilibre ou un taux d'évolution induite par ce déséquilibre.

Forces et flux thermodynamiques

Ainsi la première étape dans la mise en œuvre de la TPI est le calcul de la dissipation et l'identification des forces thermodynamiques et des flux associés.

Dans nos problèmes de rhéologie nous partirons de la dissipation

$$\dot{\sigma} = \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \dot{w}$$

où le produit scalaire $\sigma \cdot \dot{\epsilon}$ représente

- le produit usuel pour une sollicitation uniaxiale,
- le produit contracté $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ dans le cas général.

Si par exemple l'énergie est nulle (système purement dissipatif) on identifie directement $\mathbf{X}$ à la contrainte et $\mathbf{x}$ à la vitesse de déformation

$$\mathbf{X} = \sigma \quad \mathbf{x} = \dot{\epsilon}$$

Plus généralement, l'identification de X et x se fera naturellement sitôt que l'on aura choisi la forme de l'énergie et nous aurons l'occasion d'en voir maints exemples. On notera que, dans ce cas, le flux thermodynamique est une dérivée par rapport au temps.

La situation est un peu différente dans le cas de la conduction thermique. On montre alors que la dissipation associée est

$$\phi = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta$$

où, au coefficient $(-1/\theta)$ près, la force thermodynamique est le gradient de température (l'équilibre thermique exige une température uniforme). Ce déséquilibre thermique induit un flux de chaleur $\mathbf{q}$ du chaud vers le froid, qui vise à rétablir l'équilibre thermique. La conduction thermique est un phénomène irréversible et la dissipation ne s'annule que dans les deux cas limites d'un matériau parfaitement conducteur ($\text{grad } \theta = 0$, température uniforme) ou parfaitement isolant ($\mathbf{q} = 0$).

On retrouvera une situation analogue dans tous les problèmes de diffusion :

- Ecoulement en milieu poreux
force : gradient de pression
flux : vitesse de filtration
- Diffusion d'espèce
force : gradient de concentration
flux : vitesse de diffusion
- Conduction électrique
force : gradient du potentiel électrique
flux : intensité du courant.

Mentionnons également l'analyse des réactions chimiques où la force thermodynamique est l'affinité de la réaction et le flux la vitesse de réaction.

Relations d'Onsager

La TPI classique consiste alors à relier forces et flux, et, dans sa version la plus simple, à écrire une relation linéaire

$$X = L x \quad \text{ou} \quad x = I X \quad I = L^{-1}$$

où L ou I est un opérateur linéaire, c'est-à-dire en fait, en travaillant en composantes, une matrice.

On fait alors l'hypothèse que cette matrice est symétrique

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^T \quad \text{ou} \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}^T$$

Au départ cette symétrie a été démontrée dans un cas très particulier par un raisonnement de physique statistique. Elle a ensuite été généralisée et appliquée à toute une variété de situations physiques. Il est toutefois remarquable que, bien que d'origine purement empirique, cette extension n'ait jamais semble-t-il été contredite par l'expérience.

C'est ce que l'on appelle usuellement les relations d'Onsager (stricto sensu les relations d'Onsager consistent en fait dans la symétrie de la matrice). La matrice $\mathbf{L}$ (ou $\mathbf{I}$) est souvent appelée « matrice des coefficients phénoménologiques » soulignant ainsi le caractère empirique de cette approche.

Empirique mais remarquablement efficace, c'est en particulier cette approche qui, appliquée par exemple à la conduction thermique, conduit à la loi de Fourier

$$q_i = - k_{ij} \partial \theta / \partial x_j$$

avec un tenseur de conductivité thermique symétrique qui, dans le cas isotrope, se réduit à un scalaire.

On obtient de même

- pour la diffusion d'espèce, la loi de Fick,
- pour les milieux poreux, la loi de Darcy,
- pour la conduction électrique, la loi d'Ohm.

Ce sont également elles qui conduisent en Mécanique des Fluides au fluide visqueux newtonien et aux équations de Navier-Stokes.

Potentiel de dissipation

Une manière commode d'imposer cette symétrie est de définir, plutôt qu'une matrice $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{I}$, une forme quadratique

$$\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{L} \mathbf{x} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{1}{2} \mathbf{X} \mathbf{I} \mathbf{X}$$

imposant automatiquement la symétrie de la matrice correspondante $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{I}$. Les relations forces - flux s'écrivent alors simplement

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{L} \mathbf{x} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{l} \mathbf{X}$$

Les fonctions Ω et ω sont appelées potentiels de dissipation. On remarque aussi que si l'on s'intéresse à la valeur des fonctions $\Omega(\mathbf{x})$ et $\omega(\mathbf{X})$ on peut alors écrire

$$\Omega(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2} \phi$$

Les deux potentiels de dissipation représentent la moitié de la dissipation ϕ considérée comme fonction de $\mathbf{X}$ ou $\mathbf{x}$.

On notera qu'il ne s'agit ici que d'une commodité d'écriture. On notera aussi que les deux fonctions $\Omega(\mathbf{x})$ et $\omega(\mathbf{X})$, formes quadratiques semi-définies positives, sont des fonctions convexes.

Dissipativité normale

La TPI non linéaire

La TPI classique correspond à un modèle linéaire et, comme le montrent les exemples évoqués plus haut, elle participe au patrimoine commun de la physique du XXème siècle. Ses applications à la mécanique des matériaux restent toutefois limitées, quoique parfois importantes ; nous aurons l'occasion d'en voir quelques exemples. Le comportement des matériaux sera en général très fortement non-linéaire, et nous aurons besoin d'une extension de la TPI au cas non linéaire. Cela semble simple et l'extension que nous allons présenter peut paraître bien naturelle. Elle ne l'est pas, et il a fallu près d'un demi-siècle de tâtonnements pour y parvenir, avant d'arriver, vers 1975-1980, à la réponse finale.

L'idée de départ est très simple : si l'écriture matricielle des relations d'Onsager est par essence limitée au cas linéaire, l'écriture dérivée d'un potentiel de dissipation ne l'est par contre pas. La TPI non linéaire sera donc basée sur l'introduction d'un potentiel de dissipation $\Omega(\mathbf{x})$ ou $\omega(\mathbf{X})$ permettant d'écrire

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\partial \omega}{\partial X}$$

avec un potentiel de dissipation $\Omega(x)$ ou $\omega(X)$ non nécessairement quadratique et auquel nous n'imposerons que d'être une fonction convexe, hypothèse mathématique essentielle qui assure un développement rigoureux et harmonieux de tout ce qui va suivre. On remarque que, dans le cas d'un modèle dissipatif 1D, ceci correspond simplement au fait que $\sigma = X$ est fonction croissante du flux $x = \dot{\varepsilon}$.

Transformation de Legendre

Une loi de TPI non linéaire fait donc intervenir l'un ou l'autre des deux potentiels de dissipation $\Omega(x)$ ou $\omega(X)$. En fait, si l'on connaît l'un, on peut déterminer l'autre par une transformation de Legendre.

Partant par exemple de $\Omega(x)$, la relation

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

donne la force X en fonction du flux x . L'inversion de cette relation donne x en fonction de X . On détermine ensuite la fonction $\omega(X)$ par

$$\omega(X) = X \cdot x - \Omega(x) \quad (x = x(X))$$

En effet, en différentiant cette relation il vient

$$\begin{aligned} d\omega &= X \cdot dx + x \cdot dX - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot dx \\ &= \left(X - \cancel{\frac{\partial \Omega}{\partial x}} \right) \cdot dx + x \cdot dX \end{aligned}$$

qui montre bien que x est la dérivée de ω par rapport à X . De même

$$\Omega(x) = X \cdot x - \omega(X) \quad (X = X(x))$$

C'est la transformée de Legendre.

Dans le cas linéaire par exemple,

$$\Omega = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \mathbf{x} \quad \mathbf{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{L} \mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}$$

La transformée de Legendre sera donc

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{X}) &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{x} - \Omega = \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X} - \frac{1}{2} (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}) \cdot \mathbf{L} (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X} = \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X} \end{aligned}$$

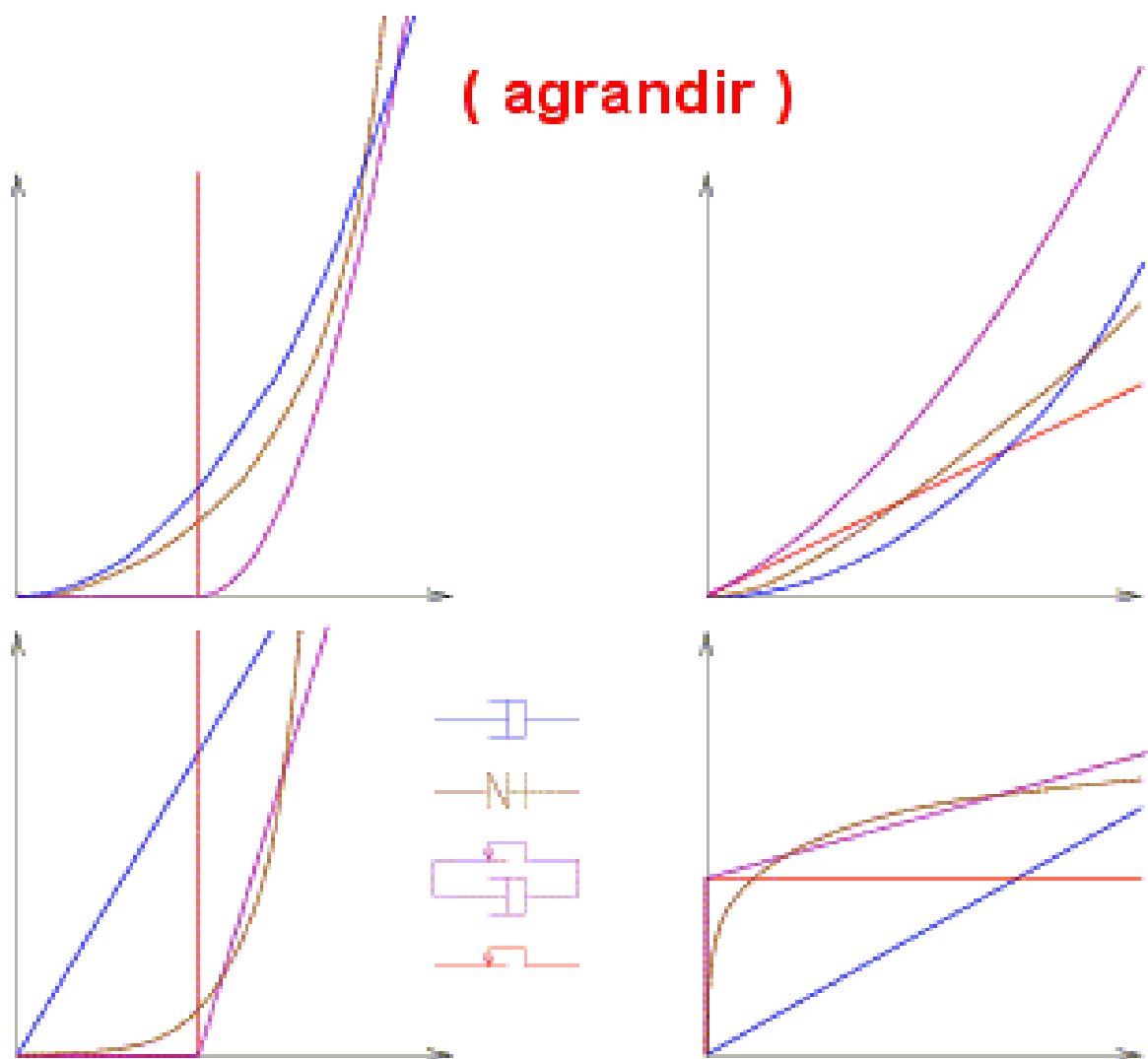
C'est-à-dire le résultat obtenu plus haut avec $\mathbf{I} = \mathbf{L}^{-1}$.

Le lecteur aura peut-être reconnu dans cette définition et ce raisonnement ce qui, en thermodynamique classique, permet de définir l'enthalpie libre (ou l'enthalpie ou l'énergie libre) à partir de l'énergie interne.

Pour être légitime, notre raisonnement exige certaines conditions de régularité (et notamment que l'on puisse inverser la relation $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ pour calculer $\mathbf{x}$ en fonction de $\mathbf{X}$). C'est justement ici qu'intervient la convexité de la fonction Ω qui permet de justifier et de généraliser ces définitions. Pour être plus précis, il faudra donc rentrer plus en détail dans la théorie mathématique des fonctions convexes.

Quelques exemples monodimensionnels

Dans le cas monodimensionnel d'un modèle purement dissipatif, $X = \sigma$ et $x = \dot{\varepsilon}$. Que deviennent dans ce cas les modèles élémentaires ?



Pour un amortisseur

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad \Omega = \frac{1}{2} \eta \dot{\epsilon}^2 \quad \omega = \frac{1}{2\eta} \sigma^2$$

Pour un modèle de Norton-Hoff

$$\begin{aligned}\sigma &= A \dot{\epsilon}^m & \Omega &= \frac{A}{m+1} |\dot{\epsilon}|^{m+1} \\ \dot{\epsilon} &= a \sigma^M & \omega &= \frac{a}{M+1} |\sigma|^{M+1} \\ M &= \frac{1}{m} & a &= A^{-1/m}\end{aligned}$$

Pour un modèle de Bingham

$$\begin{aligned}\sigma &= k + \eta \dot{\epsilon} & \text{si } \dot{\epsilon} > 0 \\ &= -k + \eta \dot{\epsilon} & \text{si } \dot{\epsilon} < 0\end{aligned}$$

d'où l'on tire directement

$$\Omega = k |\dot{\epsilon}| + \eta \dot{\epsilon}^2$$

Inversement on peut écrire

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= 0 & \text{si } |\sigma| < k \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\sigma - k}{\mu} & \text{si } \sigma > k \\ \dot{\epsilon} &= -\frac{|\sigma| - k}{\mu} & \text{si } \sigma < k\end{aligned}$$

et le potentiel s'écrit

$$\begin{aligned}\omega &= 0 & \text{si } |\sigma| = k \\ \omega &= \frac{(|\sigma| - k)^2}{2\mu} & \text{si } |\sigma| > k\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire

$$\omega = \frac{1}{2\mu} (|\sigma| - k)_+^2$$

où a_+ représente la partie positive de a ($a_+ = a$ si $a \geq 0$, 0 si $a \leq 0$).

Pour un patin plastique

$$\begin{aligned}\sigma &= +k && \text{si } \dot{\varepsilon} > 0 \\ &= -k && \text{si } \dot{\varepsilon} < 0 \\ -k &\leq \sigma \leq k && \text{si } \dot{\varepsilon} = 0\end{aligned}$$

et donc $\Omega = k \mid \dot{\varepsilon} \mid$

mais on ne peut pas calculer $\dot{\varepsilon}$ en fonction de σ .

La représentation graphique des 4 fonctions $\sigma(\dot{\varepsilon})$, $\Omega(\dot{\varepsilon})$, $\dot{\varepsilon}(\sigma)$ et $\omega(\sigma)$ donne l'interprétation de ces relations. On y constate de visu que la singularité du cas plastique était prévisible.