

Lois de comportement

Problèmes de MMC

Pour un problème statique (ou quasi-statique) et dans le cadre des petites perturbations, un problème de MMC revient à calculer le champ de contrainte $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ et le champ de déplacement $u_i(\mathbf{x})$, vérifiant

- Les équations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$$

- les conditions aux limites statiques ou cinématiques,
- la loi de comportement.

C'est à cette dernière composante que nous nous intéressons ici. C'est par elle que l'on prendra en compte la nature physique des matériaux et elle se traduira finalement par une relation entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.



La résolution d'un problème de structure exige, pour relier les efforts appliqués (forces de volume \mathbf{f} et forces surfaciques \mathbf{T}) aux déplacements \mathbf{u} , de passer par les contraintes et les déformations qui en résultent à l'échelle du matériau.

En règle générale cette résolution sera réalisée numériquement et le plus souvent par un calcul éléments finis. Il convient donc de conserver présent à l'esprit que toutes les lois de comportement que nous développerons dans la suite de ce cours ont vocation à être intégrées dans un tel code de calcul. Nous n'évoquerons que rarement cet aspect, mais il est important.

Energie et dissipation

Les échanges d'énergie joueront, dans la caractérisation du matériau, un rôle essentiel. En négligeant les couplages thermomécaniques, le bilan énergétique fondamental est

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{w} + \phi \quad \phi \geq 0$$

La puissance mécanique fournie au système (pour le déformer ; rappelons qu'une partie sera transformée en énergie cinétique) est en partie stockée sous forme d'énergie et en partie dissipée, c'est-à-dire dégradée sous forme de chaleur.

C'est ainsi, par exemple, que nous avons construit le modèle élastique linéaire

$$w = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad \phi = 0$$
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

et, dans le cas isotrope, la loi de Hooke

$$w = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{kk} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$
$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

En mécanique des fluides

Il peut sembler (et il est effectivement) incongru de parler de mécanique des fluides dans un cours de mécanique des matériaux solides, puisque limité aux petites perturbations, et pourtant...!

Les matériaux réels peuvent, suivant leur nature et les circonstances, présenter certains aspects de comportement fluide, et nous devons intégrer cette composante dans notre panorama. En fait, la Mécanique des Matériaux, au sens où nous l'entendons ici, commence sitôt que nous quittons la mécanique des solides élastiques et la mécanique des fluides classique. Un cours de Mécanique des Matériaux exige de quitter le cadre des petites perturbations.

Si nous avons choisi de nous limiter ici au cas des petites perturbations, c'est essentiellement pour une raison technique. La plupart des concepts et modèles que nous développerons dans la suite resteront largement valables dans le cas général. Toutefois leur mise en œuvre exige le formalisme des grandes transformations, formalisme qui reste un peu lourd – beaucoup

moins lourd toutefois qu'on ne le pense habituellement. Ce formalisme fera l'objet du cours Grandes Transformations.

Les modèles de la mécanique des fluides classique (fluide parfait et fluide visqueux, compressibles ou incompressibles) font donc partie, au moins comme cas limite, de l'univers que nous nous proposons d'explorer. De plus ils vont nous fournir une illustration flagrante de l'importance du bilan énergétique fondamental qui, dans ce cas, s'écrit

$$\sigma_{ij} D_{ij} = \rho \dot{e} + \phi$$

L'énergie dans un fluide ne dépend que de la masse volumique (et bien sûr de la température, mais nous avons décidé d'ignorer les couplages thermomécaniques ; nous y reviendrons plus loin). En utilisant l'équation de continuité, la dissipation peut alors s'écrire

$$\phi = \left[\sigma_{ij} - \rho^2 \frac{de}{d\rho} \delta_{ij} \right] D_{ij}$$

On en tire pour un fluide parfait, c'est-à-dire non dissipatif ($\phi = 0$),

$$\sigma_{ij} = \rho^2 \frac{de}{d\rho} \delta_{ij} = -p(\rho) \delta_{ij} \quad p = -\rho^2 \frac{de}{d\rho}$$

et pour un fluide visqueux newtonien (c'est en fait un premier exemple d'application des relations d'Onsager)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p(\rho) \delta_{ij} + \lambda_v D_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu_v D_{ij} \\ \sigma_{ij} D_{ij} &= \underbrace{-p(\rho) D_{ii}}_{\rho \dot{e}} + \underbrace{\lambda_v D_{ii} D_{kk} + 2 \mu_v D_{ij} D_{ij}}_{\phi} \end{aligned}$$

C'est donc un premier exemple d'une partition de la puissance mécanique fournie entre énergie et dissipation. Cette partition jouera un rôle essentiel dans la suite.

Dans le cas incompressible, $\rho = \rho_0$, donc $e = e_0$, il n'y a donc pas d'énergie stockée, et $D_{ii} = \text{div } \mathbf{V} = 0$. La dissipation devient donc

$$\phi = \sigma_{ij} D_{ij} \quad D_{ii} = 0$$

qui conduit au fluide parfait incompressible si $\phi = 0$ (c'est, avec le solide rigide, le seul modèle qui ne donne lieu à aucun échange d'énergie), et dans le cas dissipatif au fluide visqueux newtonien incompressible

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu D_{ij}$$

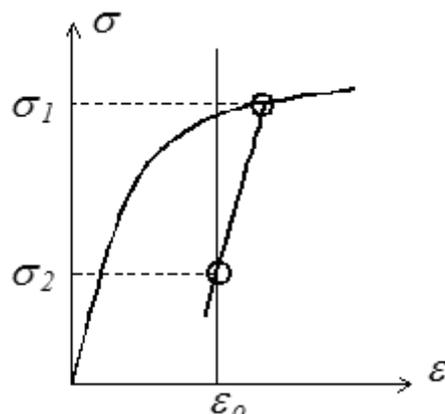
qui dissipe de l'énergie sans en stocker.

Il est remarquable que les 4 modèles de la mécanique des fluides classique illustrent les 4 variantes possibles du bilan d'énergie : avec ou sans énergie stockée, avec ou sans dissipation.

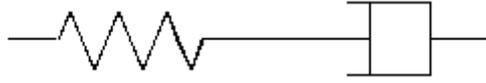
Terminons cette excursion en Mécanique des Fluides, finalement beaucoup plus raisonnable qu'il n'y paraissait au départ, en rassurant le lecteur : malgré ce qui a été dit plus haut, la Mécanique des Matériaux en petites perturbations recouvre malgré tout un très grand nombre d'applications. Le passage aux grandes transformations ne sera pas toujours indispensable.

Loi de comportement générale

La loi de comportement donne une relation entre contraintes et déformations, et effectivement la loi élastique donne σ_{ij} en fonction de ε_{ij} ou vice-versa. Il s'agit là toutefois d'un cas très particulier ; en général pour connaître la contrainte à l'instant t il ne suffira pas de connaître la déformation à l'instant t : il faut en fait également connaître toute l'histoire de déformation, c'est-à-dire la manière dont on est arrivé à cette déformation.



Un premier exemple représenté ci-contre à partir de la courbe de traction d'un acier : pour une valeur ε_0 de la déformation on pourra obtenir la contrainte σ_1 si l'on y est arrivé directement, et σ_2 s'il y a eu un retour en arrière.



Un second exemple est fourni par un modèle de Maxwell (nous anticipons ici quelque peu) pour lequel on pourra écrire

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E e^{-t/\tau} d\varepsilon(\tau)$$

De manière générale on écrira

$$\sigma(t) = \mathfrak{S}_{s \geq 0} \{ \varepsilon(t-s) \}$$

exprimant que la contrainte à l'instant t dépend de toutes les valeurs passées de la déformation.

Dans un jargon plus technique, on parle d'une fonctionnelle héréditaire causale :

- fonctionnelle, c'est ainsi que les mathématiciens appellent souvent une fonction dont l'argument est lui-même une fonction : la contrainte est une fonction de la fonction qui donne l'histoire de la déformation $\varepsilon(t-s)$ pour tout $s \geq 0$.
L'accolade est ici utilisée (plutôt qu'une simple parenthèse) pour souligner également cette dépendance fonctionnelle.
- héréditaire, car la contrainte dépend de tout ce qu'a subi le matériau. Le matériau a une mémoire.
- causale, car seule intervient l'histoire passée et non l'histoire à venir.

Remarquons par exemple, en revenant au fluide visqueux évoqué précédemment, que, en petites perturbations, le tenseur des taux de déformation est la dérivée par rapport au temps de la déformation et que ρ pourra s'exprimer à partir de la déformation. On aura donc

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

qui est bien évidemment un cas particulier de la forme générale puisque, si l'on connaît $\varepsilon(t-s)$ pour tout s , on peut bien évidemment connaître sa dérivée.

De manière complètement symétrique on peut également écrire

$$\varepsilon = \mathcal{F} \left\{ \sigma(t-s) \right\}_{s \geq 0}$$

donnant la déformation en fonction de l'histoire de la contrainte.

Revenons encore à notre fluide visqueux : la situation apparaît ici plus complexe, car la loi ne donne pas directement la déformation. Toutefois elle pourra, en principe, s'inverser en une relation $\dot{\varepsilon}(\sigma, \varepsilon)$ qui, connaissant l'histoire de σ permettra de déterminer $\varepsilon(t)$ par intégration de l'équation différentielle correspondante.

Sauf cas particulier, on n'explicitera jamais cette fonctionnelle. Il convient toutefois de bien conserver à l'esprit cette forme générale.

*Un **modèle de comportement** est un algorithme permettant à chaque instant de calculer la contrainte en fonction de l'histoire des déformations ou vice-versa.*

A

Interprétation thermodynamique

Modèles élémentaires

Le comportement élastique est conservatif et ne dissipe pas d'énergie. On écrira donc naturellement en situation uniaxiale

$$\sigma \dot{\varepsilon} = \dot{w} \quad w = w(\varepsilon) \quad \sigma = \frac{dw}{d\varepsilon}$$

Pour le ressort linéaire

$$w = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad \sigma = E \varepsilon$$

De même pour un modèle purement dissipatif $w = 0$ et donc

$$\sigma \dot{\varepsilon} \geq 0$$

et sa loi de comportement donnera une relation entre la contrainte et la vitesse de déformation. Dans le cas monodimensionnel on peut introduire une fonction $\Omega(\dot{\varepsilon})$, primitive de la fonction $\sigma(\dot{\varepsilon})$. On écrira donc

$$\sigma = \sigma(\dot{\varepsilon}) = \frac{d\Omega}{d\dot{\varepsilon}} \quad \Omega(\dot{\varepsilon}) = \int \sigma(\dot{\varepsilon}) d\dot{\varepsilon}$$

La fonction Ω est appelée potentiel de dissipation.

Pour l'amortisseur la loi est linéaire et le potentiel quadratique

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \Omega = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2$$

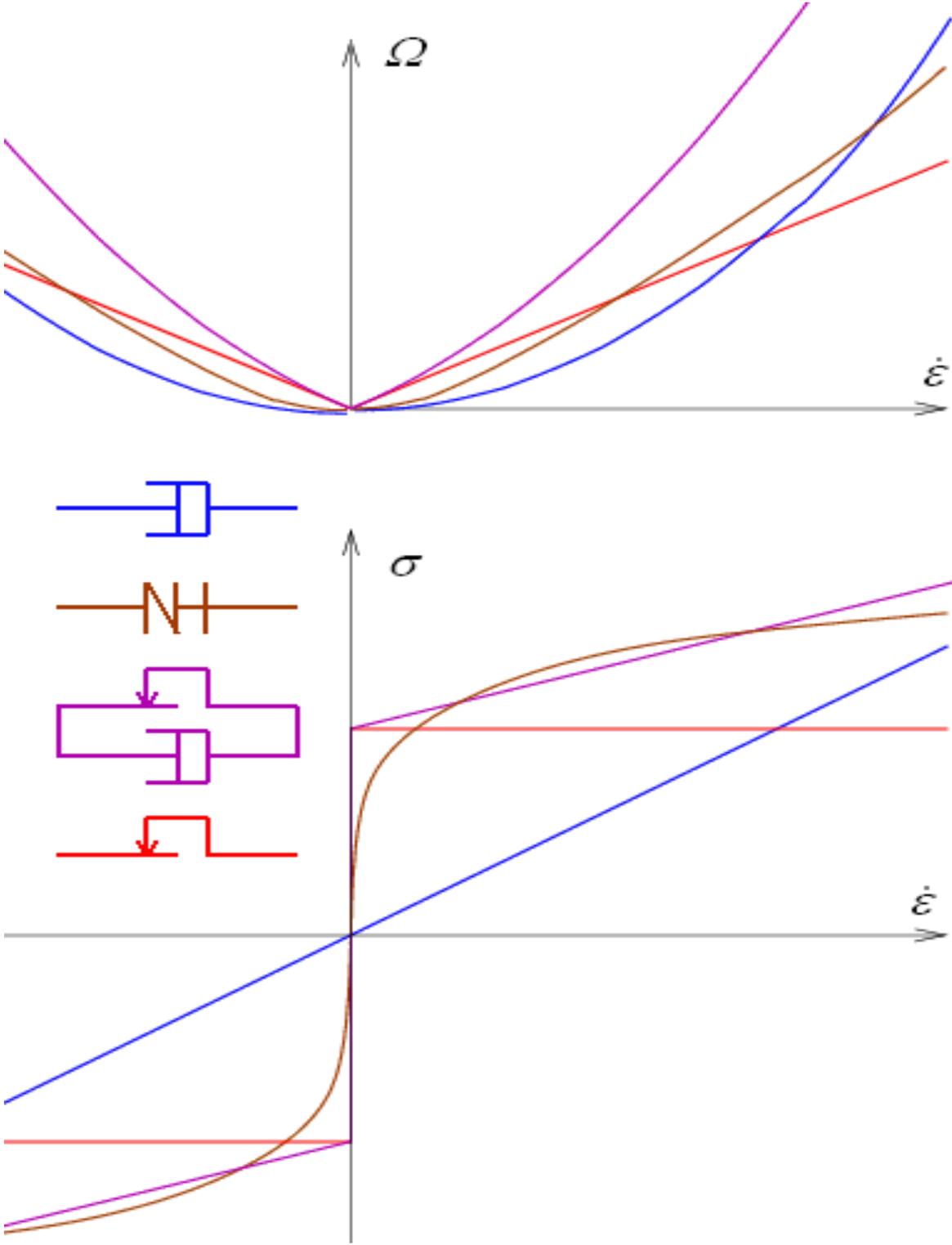
Pour le patin plastique on a de même

$$\sigma = k \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \quad \Omega = k |\dot{\varepsilon}|$$

où la fonction $\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon})$ (sgn = signe) vaut $+1$ si $\dot{\varepsilon} > 0$, -1 si $\dot{\varepsilon} < 0$ et est comprise entre -1 et $+1$ si $\dot{\varepsilon} = 0$ (donc incomplètement déterminée, ce n'est pas une fonction au sens classique du terme, il faudra, pour donner un sens

mathématique précis à cette approche, se donner quelque peine. Nous y reviendrons plus loin.)

Bingham et Norton-Hoff



Le modèle de Bingham correspond au montage parallèle d'un ressort (plutôt d'un patin selon zaaf) et d'un amortisseur, et l'on obtient ainsi directement

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + k \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) \quad \Omega = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2 + k |\dot{\varepsilon}|$$

Le modèle de Norton-Hoff, lui, correspond à une loi puissance

$$\sigma = A \dot{\varepsilon}^m \quad \Omega = \frac{A}{m+1} \dot{\varepsilon}^{m+1}$$

Toujours d'un point de vue mathématique, la fonction $\dot{\varepsilon}^m$ est étendue comme

$$\dot{\varepsilon}^m = \begin{cases} \dot{\varepsilon}^m & \text{si } \dot{\varepsilon} > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{\varepsilon} = 0 \\ -|\dot{\varepsilon}|^m & \text{si } \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases}$$

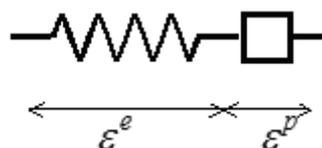
Contrairement à la fonction $\operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon})$, elle est régulière et biunivoque.

Le graphique ci-contre représente pour les 4 modèles dissipatifs introduits précédemment les deux fonctions donnant σ et Ω en fonction de $\dot{\varepsilon}$.

Plus généralement, on pourra traiter de même n'importe quelle loi dissipative, par exemple les lois en sinus hyperbolique souvent rencontrées pour les mécanismes thermiquement activés. Nous imposerons néanmoins à σ d'être fonction croissante de $\dot{\varepsilon}$, ce qui conduit à une fonction $\Omega(\dot{\varepsilon})$ convexe.

Nous venons en fait d'introduire ici, dans le cas le plus simple qui puisse exister, la thermodynamique des phénomènes irréversibles (TPI). Le cas visqueux linéaire correspond à la TPI classique (relations d'Onsager) tandis que les autres cas correspondent à la TPI non-linéaire (dissipation normale).

Le modèle élasto-dissipatif



Ce modèle, important pour les applications, correspond au montage série d'un ressort et d'un élément dissipatif (amortisseur, patin, modèle de Bingham, de Norton-Hoff,...).

Dans ce montage le ressort stocke l'énergie tandis que la dissipation provient du seul élément dissipatif. L'énergie et le potentiel de dissipation sont donc respectivement

$$w = w(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} E \varepsilon^{e2} \quad \Omega = \Omega(\dot{\varepsilon}^p)$$

La dissipation s'obtient alors directement par

$$\begin{aligned} \phi &= \sigma \dot{\varepsilon} - \dot{w} = \sigma (\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p) - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \dot{\varepsilon}^e \\ &= \left(\sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \right) \dot{\varepsilon}^e + \sigma \dot{\varepsilon}^p \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à l'énergie dissipée dans le ressort, il est donc nul et

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e \quad \phi = \sigma \dot{\varepsilon}^p$$

Et on en tire tout naturellement

$$\sigma = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^p}$$

Ce qui redonne bien évidemment les équations du modèle rhéologique telles qu'on les aurait obtenues par une approche directe.

La TPI permet de formaliser cette approche selon la démarche suivante :

1. On fait une hypothèse sur l'énergie : $w = w(\varepsilon^e)$.
2. On en tire les forces et les flux thermodynamiques

$$\phi = \mathbf{X} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} \\ \sigma \end{vmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}^e \\ \dot{\varepsilon}^p \end{vmatrix}$$

3. On fait une hypothèse sur le potentiel de dissipation : $\Omega(\dot{\varepsilon}^p)$.
4. On en tire les lois de comportement

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} \quad \sigma - \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^e} = 0 \quad \sigma = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\varepsilon}^p}$$

Cette démarche (cadre standard généralisé) est en fait très générale et nous en verrons de nombreuses applications.