1 Lien entre les EDS et les EDP

On voudrait associer à chaque EDS une EDP et étudier le lien entre ces deux types d'équations différentielles à travers trois exemples, de la manière suivante:

Soient $V, A_1, ..., A_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des champs de vecteurs, satisfaisant les hypothèses suivantes: pour $H = V, A_1, ..., A_d$,

1−Condition de Lipchitz:

$$|H(x) - H(y)| \leq C_1 |x - y| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n\text{, où } C_1 \text{ est une constante positive}$$

2−Conditions de croissance linéaire:

$$|H(x)| \leq C_2 (1 + |x|) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n\text{, où } C_1 \text{ est une constante positive.}$$

En fait ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité, que nous admettrons dans ce cours, de l'EDS vectorielle suivante:

$$(E) \qquad \begin{cases} dX_t = \sum\limits_{k=1}^{d} A_k(X_t)\, dB_t^k + V(X_t)\, dt \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

où $B_t = \left(B_t^1, B_t^2, ..., B_t^d\right)$ est un mouvement brownien de dimension d. On note par X_t^x le solution de (E). Cette EDS signifie qu'on a n EDS réelles: pour tout $i = 1, 2, ..., n$,

$$\begin{cases} dX_t^i = \sum\limits_{k=1}^{d} A_k^i(X_t)\, dB_t^k + V^i(X_t)\, dt \\ X_0^i = x_i \end{cases},$$

A l'EDS (E) on associe l'opérateur différentiel semi-elliptique du second ordre suivant:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} V^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} A_k^i(x)\, A_k^j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

On admettra que si f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à support compact, alors $u(t, x) = \mathbb{E}(f(X_t^x))$ est l'unique solution de l'EDP suivante:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{L}u(t, x) \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

Notation:

On note par $\sigma(x)$ la matrice dont les colonnes sont $A_1(x), A_2(x), ..., A_d(x)$. C'est une matrice à n lignes et d colonnes. Alors l'EDS (E) s'écrit

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + V(X_t)\, dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

En notant par $(a_{i,j}(x))$ la matrice carré la matrice carré $\sigma(x)\, \sigma^*(x)$ (matrice d'ordre n), l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} V^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Exemple 1 :

On considère le cas où $a = I$ la matrice identité et $V = 0$, d'où $\mathcal{L} =\frac{1}{2}\Delta$; Δ étant le laplacien sur $\mathbb{R}^n$. Le problème $(\mathcal{P})$ devient alors:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \end{array} \right. ,$$

qui n'est autre que l'équation de la chaleur. L'équation (E) devient

$$\left\{ \begin{array}{c} dX_t = dB_t \\ X_0 = x \end{array} \right. ,$$

qui admet comme solution évidente $X_t = x + B_t$. Comme $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, tI)$ de densité

$$\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{2t}},$$

alors la solution de $(\mathcal{P})$ est

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(X_t)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{2t}} dy = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)\, e^{-\frac{|z-x|^2}{2t}} dz$$

qui est bien connu comme solution de l'équation de la chaleur.

Exemple 2 :

On considère le cas où $n = 1, a(x) = x^2$ et $V(x) \equiv 0$, d'où $\sigma(x) = x$ et $\mathcal{L} =x^2\frac{d^2}{dx^2}$. L'EDS (E) devient alors

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{c} dX_t = X_t dB_t \\ X_0 = x \end{array} \right. .$$

Montrons que $X_t = xe^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}$ est la solution de (E). En effet, d'après la formule d'Itô avec $Y_t = B_t - \frac{t}{2}$ et $F(y) = xe^y$, on a

$$dX_t = F'(Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2}F''(Y_t)\, dY_t dY_t,$$

or $F'(y) = F''(y) = F(y) = xe^y, dY_t = dB_t - \frac{1}{2}dt$ et $dY_t dY_t = dt$, d'où

$$dX_t = X_t\left(dB_t - \frac{1}{2}dt\right) + \frac{1}{2}X_t dt = X_t dB_t,$$

d'où l'affirmation.

Si $x = 0$, alors $X_t \equiv 0$.

Si $x > 0$.

Comme $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,t)$ de densité $\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{y^2}{2t}}$, alors la solution du problème $(\mathcal{P})$ est

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(xe^{y-\frac{t}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy,$$

d'où en posant $z = xe^{y-\frac{t}{2}} > 0$, $y = \frac{t}{2} + Log\frac{z}{x}$ et

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\, e^{-\frac{1}{2t}\left(\frac{t}{2}+Log\frac{z}{x}\right)^2} dz$$

Exemple 3 :

On considère le cas où $n = 1, a(x) = x^2$ et $V(x) \equiv \lambda \in \mathbb{R}$. L'EDS correspondante est

$$(E) \quad \begin{cases} dX_t = X_t dB_t + \lambda dt \\ X_0 = x \end{cases},$$

et

$$\mathcal{L} = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \lambda \frac{d}{dx}.$$

La solution de l'équation homogène $dX_t = X_t dB_t$ étant, d'après l'exemple précédant, $X_t = Ce^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}$ où C est une constante.

Méthode de la variation des cons tan *tes*

La méthode la variation des constantes consiste à chercher la solution de (E) sous la forme

$$X_t = C_t e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)},$$

où C_t est un processus à variations finies.

On a, d'après la formule d'intégration par parties,

$$dX_t = dC_t e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} + C_t d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right) + dC_t d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right),$$

or

$$d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right) = e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} dB_t \text{ et } dC_t d\left(e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)}\right) = 0,$$

et puisque X_t est solution de (E),

$$dX_t = dC_t e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} + X_t dB_t = X_t dB_t + \lambda dt,$$

d'où

$$dC_t = \lambda e^{-\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} dt$$

et par suite

$$C_t = \lambda \int_0^t e^{-\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} ds + c, \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Ainsi

$$X_t = \lambda e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} \int_0^t e^{-\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} ds + c e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)},$$

et comme $X_0 = x$ alors $c = x$, d'où

$$X_t = \lambda e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)} \int_0^t e^{-\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} ds + x e^{\left(B_t - \frac{t}{2}\right)},$$

cependant on ne peut pas la forme explicite de $u\left(t,x\right)$. Bien entendu, lorsque $\lambda = 0$ on retrouve la solution de l'exemple 2.