Solutions des exercices 4 et 5

Exercice 4:
1) On a, d'après la relation $(*)$,

$$f^s(t) = P(A) - \frac{u^2}{2}\int_s^t f^s(\tau)\,d\tau,$$

d'où en dérivant on voit que $f^s(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{u^2}{2}y \\ y(s) = P(A) \end{cases},$$

qui admet comme solution

$$f^s(t) = P(A)\, e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

2) On a d'après 1)

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\mathbf{1}_A\right) = P(A)\, e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}.$$

En particulier pour $A = \Omega$, on obtient $\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right) = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$, qui n'est autre que la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. Il résulte que $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

D'autre part, comme $P(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$ alors

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\mathbf{1}_A\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}\mathbf{1}_A\right) \text{ ceci pour tout } A \in \mathcal{F}_s.$$

Il résulte que

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)},$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right)$$

qui signifie que la variable aléatoire $e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et donc $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$ est aussi indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Ainsi le processus $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ est adapté, à accroissements indépendants du passé et l'accroissements $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$ suit la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, c'est donc un mouvement brownien.

Exercice 5:
On a

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t}\right)}{2}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right) &= \sum_{p=0}^{n-1} Y_{\frac{p}{n}t}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right)\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t}\right).\end{aligned}$$

La somme $\sum\limits_{p=0}^{n-1} Y_{\frac{p}{n}t}\left(X_{\frac{p+1}{n}t}-X_{\frac{p}{n}t}\right)$ converge dans $L^1(\Omega)$, d'après le cours, vers $\int\limits_0^t Y_s dX_s$ et la somme $\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(X_{\frac{p+1}{n}t}-X_{\frac{p}{n}t}\right)\left(Y_{\frac{p+1}{n}t}-Y_{\frac{p}{n}t}\right)$ converge, d'après l'exercice précédant, vers $\int\limits_0^t dX_s dY_s$. Il résulte que $\sum\limits_{p=0}^{n-1}\frac{\left(Y_{\frac{p+1}{n}t}+Y_{\frac{p}{n}t}\right)}{2}\left(X_{\frac{p+1}{n}t}-X_{\frac{p}{n}t}\right)$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers $\int\limits_0^t Y_s dX_s+\frac{1}{2}\int\limits_0^t dX_s dY_s=\int\limits_0^t Y_s * dX_s$.