1 Intégrale d'Ito-Stratonovitch

Soient X et Y deux semi-martingales définies par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds \text{ et } Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha'_s dB_s + \int_0^t \beta'_s ds$$

tels que

$$\mathbb{E}(\int_0^t \left(Y_s^2 \alpha_s^2 + |Y_s \beta_s| + |\alpha_s \alpha'_s|\right) ds) < \infty,$$

de sorte que les intégrales $\int_0^t Y_s dX_s$ et $\int_0^t dY_s dX_s$ aient un sens.

On pose:

$$\int_0^t Y_s * dX_s := \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t dY_s dX_s.$$

Définition:

$\int_0^t Y_s * dX_s$ *est appelée intégrale d'Itô-Stratonovitch ou intégrale symétrique (on la note aussi* $\int_0^t Y_s \circ dX_s$ *).*

On notera que que si X ou Y est un processus à variations finies, alors $\int_0^t Y_s * dX_s = \int_0^t Y_s dX_s$.

Notation différentielle:

On note $Y_t * dX_t = Y_t dX_t + \frac{1}{2} dY_t dX_t$.

Théorème: (Formule d'Itô-Stratonovitch*)*

Soient X *une semi-martingale bornée et* F*:*$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^3*. Alors on a la formule suivante:*

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s) * dX_s$$

Remarque:

En notation différentielle, la formule d'Itô-Stratonovitch s'écrit:

$$dF(X_t) = F'(X_t) * dX_t.$$

Le cas vectoriel :(sans démonstration)

Si $\vec{X}_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ est un vecteur de semi-martingales et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3, alors la formule d'Itô-Stratonovich vectorielle prend la forme suivante:

$$F(\vec{X}_t) = F(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_s) * dX_s^i,$$

qui s'écrit sous forme différentielle

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_t) * dX_t^i,$$

ou encore

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F\left(\overrightarrow{X}_t\right) * \overrightarrow{dX_t} \right\rangle.$$

Démonstration:

Comme $F' \in C^2$ alors $F'(X_t)$ est une semi-martingale on a d'après la formule d'Itô appliquée avec F':

$$dF'(X_t) = F''(X_t)dX_t + \frac{1}{2}F'''(X_t)dX_t dX_t.$$

D'autre part, on a d'après la définition de l'intégrale d'Itô-Stratonovich,

$$\int_0^t F'(X_s) * dX_s = \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t dF'(X_s)dX_s,$$

or

$$dF'(X_s)dX_s = \left(F''(X_s)dX_s + \frac{1}{2}F'''(X_s)dX_s dX_s\right)dX_s = F''(X_s)dX_s dX_s$$

d'où, d'après la formule d'Itô appliquée avec F,

$$\int_0^t F'(X_s) * dX_s = \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)dX_s dX_s = F(X_t) - F(X_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.■

Nous terminons cette section par noter que cette formule est dangereuse dans le sens où dans sa formulation la fonction F''' (ni F'' d'ailleurs) n'apparaissent pas mais pour l'appliquer, il faut bien s'assurer que F est de classe C^3.