Solution de l'exercice 2

On pose

$$dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt \text{ et } dY_t = \alpha'_t dB_t + \beta'_t dt$$

On doit montrer

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t dX_s dY_s.$$

On a

$$\begin{aligned} X_tY_t - X_0Y_0 &= \sum_{p=0}^{n-1} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} Y_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} Y_{\frac{p}{n}t} \right) \\ &= U_n + V_n + W_n, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{p=0}^{n-1} X_{\frac{p}{n}t} \left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t} \right), \\ V_n &= \sum_{p=0}^{n-1} Y_{\frac{p}{n}t} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) \text{ et} \\ W_n &= \sum_{p=0}^{n-1} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) \left(Y_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t} \right) \end{aligned}$$

On sait, d'après le cours, que la suite de variables aléatoires (U_n) (resp.(V_n)) converge vers $\int_0^t Y_s dX_s$ (resp.$\int_0^t X_s dY_s$) dans $L^1(\Omega)$. Il suffit alors de montrer que la suite (W_n) converge vers $\int_0^t dX_s dY_s = \int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds$ dans $L^1(\Omega)$.

On a, d'après l'identité

$$xy = \frac{1}{4} \left\{ (x+y)^2 - (x-y)^2 \right\} \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} W_n = \frac{1}{4} \Bigg\{ &\sum_{p=0}^{n-1} \left(\left(X_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p+1}{n}t} \right) - \left(X_{\frac{p}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t} \right) \right)^2 \\ &- \sum_{p=0}^{n-1} \left(\left(X_{\frac{p+1}{n}t} - Y_{\frac{p+1}{n}t} \right) - \left(X_{\frac{p}{n}t} - Y_{\frac{p}{n}t} \right) \right)^2 \Bigg\}. \end{aligned}$$

On considère les semi-martingales Z et Z' définies par

$$Z_t = X_t + Y_t \text{ et } Z'_t = X_t - Y_t,$$

d'où

$$dZ_t = dX_t + dY_t = (\alpha_t + \alpha'_t)\, dB_t + \left(\beta_t + \beta'_t\right) dt \text{ et } dZ_t dZ_t = (\alpha_t + \alpha'_t)^2\, dt.$$

De même

$$dZ'_t = dX_t - dY_t = (\alpha_t - \alpha'_t)\, dB_t + \left(\beta_t - \beta'_t\right) dt \text{ et } dZ'_t dZ'_t = (\alpha_t - \alpha'_t)^2\, dt.$$

On a alors

$$W_n = \frac{1}{4}\left\{\sum_{p=0}^{n-1}\left(Z_{\frac{p+1}{n}t} - Z_{\frac{p}{n}t}\right)^2 - \sum_{p=0}^{n-1}\left(Z'_{\frac{p+1}{n}t} - Z'_{\frac{p}{n}t}\right)^2\right\}.$$

Or $\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(Z_{\frac{p+1}{n}t} - Z_{\frac{p}{n}t}\right)^2$ (resp. $\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(Z'_{\frac{p+1}{n}t} - Z'_{\frac{p}{n}t}\right)^2$) converge dans $L^1(\Omega)$ vers $\int\limits_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2\, ds$ (resp. $\int\limits_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2\, ds$). Ainsi W_n converge vers

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left\{\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2\, ds - \int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2\, ds\right\} &= \int_0^t \left\{\frac{1}{4}\left\{(\alpha_s + \alpha'_s)^2 - (\alpha_s - \alpha'_s)^2\right\}\right\} ds \\
&= \int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds = \int_0^t dX_s dY_s.
\end{aligned}$$