1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'essentiel de ce cours. Nous en donnons une démonstration basée sur la formule d'intégration par parties, qui sera démontrée en T.D..

Théorème: (*Formule d'Itô*)

Soit X une semi-martingale bornée et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors $F(X_t)$ est une semi-martingale et on a

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F^{'}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F^{''}(X_s)dX_s dX_s$$

Démonstration:

La démonstration se fait en trois étapes.

1) *Cas où $F(x) = x^n$ est un monôme* :

Comme $F'(x) = nx^{n-1}$ et $F''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}$, on doit montrer (par récurrence) que

$$dX_t^n = nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}dX_t dX_t \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Pour $n = 2$:

On a, d'après la formule d'intégration par parties (voir T.D.):

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + dX_t dX_t$$

donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie . Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$.

On a, d'après la formule d'intégration par parties:

$$dX_t^{n+1} = d(X_t^n X_t) = X_t dX_t^n + X_t^n dX_t + dX_t dX_t^n$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que $dX_t dX_t dX_t = 0$,

$$\begin{aligned}
dX_t^{n+1} &= X_t(nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}dX_t dX_t) \\
&\quad + X_t^n dX_t + (nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}dX_t dX_t)dX_t \\
&= nX_t^n dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-1}dX_t dX_t + X_t^n dX_t + nX_t^{n-1}dX_t dX_t \\
&= (n+1)X_t^n dX_t + \frac{1}{2}n(n+1)X_t^{n-1}dX_t dX_t
\end{aligned}$$

d'où $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie. Ainsi la formule d'Itô est vraie pour F un monôme.

2) *Cas où $F(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ est un polynôme* :

Observons d'abord que la formule $(\mathcal{P}_n)$ s'écrit sous forme d'intégrale

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t nX_s^{n-1}dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t n(n-1)X_s^{n-2}dX_sdX_s \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En multipliant cette égalité par a_n et en sommant par rapport à n, on obtient par linéarité

$$\sum_{n=0}^{N} a_n X_t^n = \sum_{n=0}^{N} a_n X_0^n + \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{N} nX_s^{n-1}\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{N} n(n-1)X_s^{n-2}\right) dX_sdX_s,$$

d'où

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,dX_sdX_s,$$

qui signifie que la formule d'Itô est vraie pour les polynômes.

3) *Le Cas général* $(F \in C^2)$:

Soit K un compact qui contient toutes les valeurs de X_t. D'après le théorème de Stones-Wiestrass, il existe trois suites de polynômes $(P_n), (Q_n)$ et (R_n) telles que (P_n) (resp.$(Q_n), (R_n)$) converge uniformément vers F (resp. F', F'') sur K. De plus

$$P_n' = Q_n \text{ et } P_n'' = Q_n' = R_n,$$

d'où d'après la formule d'Itô pour chaque polynôme P_n :

$$P_n(X_t) = P_n(X_0) + \int_0^t Q_n(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t R_n(X_s)dX_sdX_s.$$

Comme X prend ses valeurs dans K et comme

$$|P_n(X_t) - F(X_t)| \leq \sup_{x\in K} |P_n(x) - F(x)|,$$

alors

$$0 \leq \mathbb{E}\left(|P_n(X_t) - F(X_t)|^2\right) \leq \left(\sup_{x\in K} |P_n(x) - F(x)|\right)^2$$

et on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|P_n(X_t) - F(X_t)|^2\right) = 0,$$

qui signifie que $(P_n(X_t))$ (resp.$(P_n(X_0))$) converge vers $F(X_t)$ (resp. $F(X_0)$) dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On conclut, d'après l'unicité de la limite, qu'il suffit de montrer que la suite $\left(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s\right)$ (resp.$\left(\int_0^t R_n(X_s)dX_s\right)$) converge vers $\int_0^t F'(X_s)dX_s$ (resp.$\int_0^t F''(X_s)dX_s$) dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Montrons par exemple la convergence de $\left(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s\right)$ vers $\int_0^t F'(X_s)dX_s$ (la démonstration de l'autre convergence se conduit exactement de la même manière).

On a :

$$\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s = \int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\alpha_s dB_s + \int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\beta_s ds,$$

d'où, en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$ pour tous réels a, b,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s\right)^2 \quad &\leq \quad 2\left\{\left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\alpha_s dB_s\right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\beta_s ds\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant dabordla linérité de l'espérance ensuite l'isométrie de l'intégrale stochastique et puis l'inégalité de Holder, on obtient:

$$\begin{aligned}0 \quad &\leq \quad \mathbb{E}(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s)^2 \\ &\leq \quad 2\left(\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\alpha_s dB_s\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)\beta_s ds\right)^2\right) \\ &\leq \quad 2\left(\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)^2 \alpha_s^2 ds\right) + t\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(Q_n(X_s) - F'(X_s)\right)^2 \beta_s^2 ds\right)\right) \\ &\leq \quad 2\left(\sup_{x\in K}\left|Q_n(x) - F'(x)\right|\right)^2\left(\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) + t\mathbb{E}\left(\int_0^t \beta_s^2 ds\right)\right),\end{aligned}$$

d'où d'après la convergence uniforme de (Q_n) vers F',

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_0^t Q_n(X_s)dX_s - \int_0^t F'(X_s)dX_s)^2 = 0,$$

ce qui achève la démonstration.■