Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Master 1: -Probabité et Statistique
-Actuariat
Série N°3

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.

Exercice 1:

Soient S et T deux $t.d'a.$.

Montrer que $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont également des $t.d'a.$.

Exercice 2:(formule d'intégration par parties)

Soient X et Y deux semi-martingales.

Montrer que

$$d\left(X_t Y_t\right) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

Indication: Utilisé le fait que

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \sum_{p=0}^{n-1} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} Y_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} Y_{\frac{p}{n}t} \right).$$

Exercice 3:

Soient X une semi-martingale et $F \in C^2\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\right)$.

Ecrire $F\left(t, X_t\right)$ sous forme de semi-martingale.

Exercice 4:

Soit $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ un processus tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in \mathcal{F}_s$ $(s < t)$

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mathbf{1}_A\right) = P(A) - \frac{u^2}{2} \int_s^t \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_\tau - \widetilde{B}_s\right)} \mathbf{1}_A\right) d\tau \quad (*)$$

1) Résoudre l'EDO satisfaite par

$$f^s(t) = \mathbb{E}\left(e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} \mathbf{1}_A\right).$$

2) Montrer que $\left(\widetilde{B}_t\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 5:

Soient X et Y deux semi-martingales tels que $\int_0^t Y_s * dX_s$ soit définie.

Montrer que

$$\int_0^t Y_s * dX_s \underset{L^1}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\left(Y_{\frac{p+1}{n}t} + Y_{\frac{p}{n}t}\right)}{2} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t}\right).$$

Solutions des exercices 1 et 3

Exercice 1:

On a pour tout $t \geq 0$

$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des $t.d'a.$.

Généralisation: Si (T_n) est une suite de $t.d'a.$ alors comme

$$\left\{ \underset{n\in\mathbb{N}}{\wedge} T_n \leq t \right\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\left\{ \underset{n\in\mathbb{N}}{\vee} T_n \leq t \right\} = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $\underset{n\in\mathbb{N}}{\wedge} T_n$ et $\underset{n\in\mathbb{N}}{\vee} T_n$ sont également des $t.d'a.$

Exercice 3:

On a $dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt$, d'où d'après la formule d'Itô à deux variables:

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \\ & \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, X_t)\, dtdt + 2\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t, X_t)\, dtdX_t + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)\, dX_t dX_t \right\}. \end{aligned}$$

Comme $dtdt = dtdX_t = 0$ et $dX_t dX = \alpha_t^2 dt$, alors

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)\,(\alpha_t dB_t + \beta_t dt) + \frac{\alpha_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)\, dt \\ &= \alpha_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)\, dB_t + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \beta_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) + \frac{\alpha_t^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt, \end{aligned}$$

d'où en intégrant

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \alpha_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \beta_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) + \frac{\alpha_s^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds.$$

$M_t = \int_0^t \alpha_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\, dB_s$ est la partie martingale de $F(t, X_t)$ et

$$V_t = \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \beta_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) + \frac{\alpha_s^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \right) ds$$

est sa partie à variations finies.