Proposition:

Soit (X_t) *un semi-martingale bornée a partie à variations finies nulle (i.e.* $X_t = X_0 + M_t$*), Alors on a :*

1) $\sum\limits_{p=0}^{n-1}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2 \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

2) $M_t^2 = 2\int\limits_0^t M_s dM_s + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds.$

Remarque:

Si $X_t = B_t$*, ce qui correspond au cas* $\alpha \equiv 1$*, alors l'inégalité* 2) *entraîne que*

$$B_t^2 = 2\int\limits_0^t B_s dB_s + t.$$

Démonstration:

On a:

$$\sum_{p=0}^{n-1}(M^2_{\frac{p+1}{n}t} - M^2_{\frac{p}{n}t}) = M_t^2 - M_0^2 = M_t^2.$$

D'après la proposition précédente, on peut écrire :

$$2\sum_{p=0}^{n-1} M_{\frac{p}{n}t}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t}) \text{ converge vers } 2\int\limits_0^t M_s dM_s \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

et par la différence, on obtient:

$$\sum_{p=0}^{n-1}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2 \text{ converge vers } M_t^2 - 2\int\limits_0^t M_s dM_s \text{ dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

Il suffit de démontrer alors que $M_t^2 - 2\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds.$

Comme le processus $\sum\limits_{p=0}^{n-1}(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2$ est une somme de nombres positifs, alors il est croissant par rapport à t donc de limite également croissante. Il résulte que sa limite est à variations finies, ce qui nous permet d'écrire que $M_t^2 - 2\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t \beta_s ds$, d'où

$$M_t^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds - 2\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t \beta_s ds - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$$

On sait que $M_t^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ et $\int\limits_0^t M_s dM_s = \int\limits_0^t M_s \alpha_s dB_s$ sont des martingales. Par suite

$$M_t^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds - 2\int\limits_0^t M_s dM_s$$

est également une martingale, qui est égale à un processus à variations finies donc nulle *p.s.*, d'où

$$\int\limits_0^t \beta_s ds - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds = 0 \ p.s.,$$

ce qui achève la démonstration.■

Proposition:

Soit X une semi martingale bornée, et soit γ un processus adapté, continu et borné. Alors on a la convergence suivante :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} (X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t})^2 \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_0^t \gamma_s \alpha_s^2 ds$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Remarque: *Sans perdre la généralité, on peut prendre $X = M$ (donc $X_0 =$* 0) une *martingale, car la partie à variations finies n'a aucune contribution dans la formule.*

Démonstration:

On considère la semi-martingale $N_t := M_t^2 = 2\int\limits_0^t M_t \alpha_s dB_s + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ d'après la proposition précédente. D'après l'avant dernière proposition, on a:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} (N_{\frac{p+1}{n}t} - N_{\frac{p}{n}t}) = \int\limits_0^t \gamma_s dN_s = 2\int\limits_0^t \gamma_s M_s \alpha_s dB_s + \int\limits_0^t \gamma_s \alpha_s^2 ds$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On a aussi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} 2\gamma_{\frac{p}{n}t} M_{\frac{p}{n}t} (M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t}) = \int\limits_0^t 2\gamma_s M_s dM_s = 2\int\limits_0^t \gamma_s M_s \alpha_s dB_s$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et par différence on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} (M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t})^2 = \int\limits_0^t \gamma_s \alpha_s^2 ds$$

dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.■

Définition:

On appelle variation quadratique d'un processus X, le processus croissant défini par:

$$\langle X\rangle_t := \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{n-1}(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t})^2 \text{ en probabilitité.}$$

Remarque:

Comme la convergence $L^1(\Omega)$ entraîne la convergence en probabilité, alors la proposition précédante avec $\gamma \equiv 1$, signifie que la variation quadratique d'une semi-martingale X est

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds,$$

Ainsi $d\langle X\rangle_t = \alpha_t^2 dt = dX_t dX_t$.

Conséquence:

$$\langle B\rangle_t = t.$$

1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'essentiel de ce cours. Nous en donnons une démonstration basée sur la formule d'intégration par parties, qui sera démontrée en T.D..

Théorème: (*Formule d'Itô*)

Soit X une semi-martingale bornée et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors $F(X_t)$ est une semi-martingale et on a

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F^{'}(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F^{''}(X_s)dX_s dX_s$$

Remarque:

La formule d'Itô sous forme différentielle s'écrit:

$$dF(X_t) = F^{'}(X_t)dX_t + \frac{1}{2}F^{''}(X_t)dX_t dX_t.$$

Compte tenu de la dernière remarque, la formule d'Itô s'écrit aussi

$$dF(X_t) = F'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)\,d\langle X\rangle_t.$$

Cette formule signifie aussi que

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F^{'}(X_s)\alpha_s dB_s + \int_0^t \left[F^{'}(X_s)\beta_s + \frac{1}{2}F^{''}(X_s)\alpha_s^2\right] ds$$

$\int\limits_0^t F^{'}(X_s)\alpha_s dB_s$ étant la partie martingale de $F(X_t)$ et $\int\limits_0^t \left[F^{'}(X_s)\beta_s + \frac{1}{2}F^{''}(X_s)\alpha_s^2\right] ds$ sa partie à variations finies. En fait, on peut montrer que cette formule reste valable même si X n'est pas bornée, pourvu que tous les termes aient un sens.

Exemple :

Si $Y_t = e^{B_t}$, la formule d'Itô avec $X_t = B_t$ et $F(x) = e^x$ ($F'(x) = F''(x) = e^x$), donne

$$dY_t = e^{B_t} dB_t + \frac{1}{2} e^{B_t} dt,$$

d'où

$$e^{B_t} = 1 + \int\limits_0^t e^{Bs} dB_s + \frac{1}{2} \int\limits_0^t e^{Bs} ds$$

et

$$\langle Y_t \rangle = e^{2B_t}.$$

On notera que Y_t est solution de l'EDS

$$dY_t = Y_t dB_t + \frac{1}{2} Y_t dt.$$

Le cas vectoriel :(sans démonstration)

Si $\vec{X}_t = (X_t^1, ..., X_t^n)$ est un vecteur de semi-martingales et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors la formule d'Itô vectorielle prend la forme suivante:

$$F(\vec{X}_t) = F(\vec{X}_0) + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}(\vec{X}_s) dX_s^i dX_s^j,$$

qui s'écrit sous forme différentielle

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}(\vec{X}_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}(\vec{X}_t) dX_t^i dX_t^j,$$

ou encore

$$dF\left(\overrightarrow{X}_t\right) = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} F\left(\overrightarrow{X}_t\right), \overrightarrow{dX_t} \right\rangle + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{dX_t}\right)^T . \mathcal{H}F\left(\overrightarrow{X}_t\right) . \overrightarrow{dX_t},$$

où $\mathcal{H}F(x)$ est la matrice hessienne de F en x et $\left(\overrightarrow{dX_t}\right)^T$ est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne $\overrightarrow{dX_t} = \begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ . \\ . \\ . \\ dX_t^n \end{pmatrix}$.