Remarque:

Soit T une v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Alors on a les équivalences suivantes:
T est un t.d'a. $\Longleftrightarrow \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$
$\Longleftrightarrow$ le processus $X := 1_{[0,T[}$ est adapté.

Définition:

Soient X processus et T un t.d'a.. Le processus $X^{|T}$ défini par $X_t^{|T} = X_{t\wedge T}$ pour tout $t \geq 0$ s'appelle le processus arrêté de X à T.

Lemme:

Soient $\alpha \in \overline{S}$ et T un t.d'a.. Alors le processus $\alpha 1_{[0,T[} \in \overline{S}$. En particulier si X est une semi-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $X^{|T}$.

Preuve:

On considère le processus $u := \mathbf{1}_{[0,T[}$ et on pose $u^\varepsilon = u * \left(\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors les processus u^ε sont adaptés continus et convergent ponctuellement vers u. Ainsi, si α est adapté continu (donc $\alpha \in \overline{S}$), alors il en est de même pour le processus αu^ε, d'où $\alpha u^\varepsilon \in \overline{S}$. Il résulte que $\alpha u^\varepsilon \in \overline{S}$ pour tout $\alpha \in \overline{S}$. Comme αu^ε converge vers αu, alors $\alpha u \in \overline{S}$.

Si maintenant $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds$ est une semi-martingale, alors

$$\begin{aligned} X_t^{|T} &= X_0 + \int_0^{t\wedge T} \alpha_s dB_s + \int_0^{t\wedge T} \beta_s ds \\ &= X_0 + \int_0^t \alpha_s \mathbf{1}_{[0,T[}(s,.)\, dB_s + \int_0^t \beta_s \mathbf{1}_{[0,T[}(s,.)\, ds \end{aligned}$$

Comme $\alpha \mathbf{1}_{[0,T[} \in \overline{S}$ et comme

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\beta_s \mathbf{1}_{[0,T[}(s,.)\right| ds\right) \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t |\beta_s|\, ds\right) < \infty,$$

alors le processus $X^{|T}$ est également une semi-martingale.■

Remarque:

Il résulte de cette démonstration que l'arrêté d'une martingale (resp. d'un processus à variations finies) est également une martingale (resp. un processus à variations finies).

La proposition suivante nous permet de montrer que la représentation d'une semi-martingale $X_t = X_0 + M_t + V_t$ est unique à une égalité $p.s.$près.

Proposition:

Soit X une martingale à variations finies. Alors $X_t = 0$ p.s. pour tout $t \geq 0$.

Preuve:

Comme $X_t^2 \geq 0$, il suffit de montrer que $\mathbb{E}\left(X_t^2\right) = 0$ pour tout $t \geq 0$. La démonstration se fait en deux étapes.

1) *Cas où* X_t *est bornée* : $|X_t| \leq a$ $(a > 0)$

Observons d'abord que le fait que X soit une martingale entraîne que pour tout $t \geq s \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2\right) = \mathbb{E}\left({X_t}^2 - X_s^2\right).$$

En effet;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left((X_t - X_s)^2 \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 - 2X_sX_t + X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2\mathbb{E}\left(X_sX_t \mid \mathcal{F}_s\right) + \mathbb{E}\left(X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2X_s\mathbb{E}\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) + X_s^2\right) \text{ car } X_s \text{est } \mathcal{F}_s - \text{mes.} \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 \mid \mathcal{F}_s\right) - 2X_s^2 + X_s^2\right) \text{ car } X \text{ est une martingale} \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_t^2 - X_s^2 \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \text{ car } X_s \text{ est } \mathcal{F}_s - \text{mes.} \\
&= \mathbb{E}\left(X_t^2 - X_s^2\right).
\end{aligned}$$

On a

$$X_t = \int_0^t \alpha_s dB_s = \int_0^t \beta_s ds,$$

où $\alpha \in \overline{S}$ et $\beta \in L^1_{loc}$. Soit $(d_n) = (\{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_N^n = t\})$ une suite de subdivision de $[0,t]$ dont le pas $\delta_n := \max\limits_{1\leq k\leq N} \left|t_k^n - t_{k-1}^n\right|$ tends vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Comme

$$X_t^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(X_{t_k^n}^2 - X_{t_{k-1}^n}^2\right)$$

et comme X est une martingale, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_t^2\right) &= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left(X_{t_k^n}^2 - X_{t_{k-1}^n}^2\right) = \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left(\left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)^2\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left(\left|X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right| \max_{1\leq l\leq N}\left|X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n}\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\max_{1\leq l\leq N}\left|X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n}\right| \sum_{k=1}^{N}\left|X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right|\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $X_t = \int\limits_0^t \beta_s ds$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| &= \sum_{k=1}^{N} \left| \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \beta_s ds \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |\beta_s| \, ds = \int\limits_0^t |\beta_s| \, ds,\end{aligned}$$

et comme

$$\max_{1 \leq l \leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \leq 2a,$$

alors

$$\max_{1 \leq l \leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \sum_{k=1}^{N} \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| \leq 2a \int\limits_0^t |\beta_s| \, ds,$$

qui et intégrable. Il résulte du théorème de la convergence, puisque

$$\lim_{n \to \infty} \left(\max_{1 \leq l \leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \right) = 0 \text{ grâce à la continuité de } X,$$

que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq l \leq N} \left| X_{t_l^n} - X_{t_{l-1}^n} \right| \sum_{k=1}^{N} \left| X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right| \right) = 0.$$

Par suite $\mathbb{E}\left(X_t^2\right) = 0$.

2) *Le cas général* :

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire

$$T_n := \inf \{ t \geq 0 : |X_t| > n \} .$$

Comme $\{T_n > t\} = \{|X_t| \leq n\} = X_t^{-1}([-n, n]) \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$, alors (T_n) est une suite de $t.d'a.$. Comme $\{t \geq 0 : |X_t| > n + 1\} \subset \{t \geq 0 : |X_t| > n\}$ alors $T_n \leq T_{n+1}$. De plus, pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ on a pour tout $n \geq N_0 := [|X_t(\omega)|]$, $|X_t(\omega)| < n$. Il résulte que $t \leq T_n$, qui signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$. Ainsi (T_n) est une suite croissante de $t.d'a.$ divergente.

Soit maintenant le processus arrêté $X^{|T_n}$. D'aprés les deux propositions précédentes ce processus est une martingale à variations finies, d'où $X_{t \wedge T_n} = X_t^{|T_n} = 0$ $p.s.$ pour tout $t \geq 0$ et comme le processus X est continu alors $X_t = \lim\limits_{n \to +\infty} X_{t \wedge T_n} = 0$ $p.s.$.$\blacksquare$

0.1 Semi-martingales et convergence

Les trois propositions suivantes sont cruciales pour montrer la formule d'intégration par parties. Dans toute la suite on adopte la notation suivante pour une semi martingale:

$$X_t = X_0 + M_t + V_t \text{ où } M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s \text{ et } V_t = \int_0^t \beta_s ds.$$

Proposition:
Soient X une semi-martingale et γ un processus adapté continu et borné par $a > 0$. Alors on a la convergence dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivante:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s + \int_0^t \gamma_s \beta_s ds,$$

d'où la définition:
Définition:
L'intégrale stochastique

$$\int_0^t \gamma_s dX_s := \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s + \int_0^t \gamma_s \beta_s ds$$

s'appelle l'intégrale stochastique du processus γ par rapport à la semi-martingale X.
Preuve:
On a

$$\sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(X_{\frac{p+1}{n}t} - X_{\frac{p}{n}t} \right) = U_t^n + W_t^n, \text{ où}$$

$$U_t^n = \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t} \right) \text{ et } W_t^n = \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \left(V_{\frac{p+1}{n}t} - V_{\frac{p}{n}t} \right).$$

Comme $V_t = \int_0^t \beta_s ds$ est dérivable $\left(\frac{dV_t}{dt} = \beta_t \right)$, alors on a la convergence dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ suivante

$$W_t^n \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \gamma_s dV_s = \int_0^t \gamma_s \beta_s ds.$$

Il suffit alors de montrer que $U_t^n \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^t \gamma_s \alpha_S dB_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit (γ^n) (resp.(α^n)) la suite des processus tassés de γ (resp.α) sur la subdivision:

$$0 < \frac{t}{n} < \frac{2t}{n} < \frac{3t}{n} < ..... < t < ...$$

On a:

$$M_{\frac{p+1}{n}t} - M_{\frac{p}{n}t} = \sum_{k=0}^{p} \alpha_{\frac{k}{n}t}(B_{\frac{k+1}{n}t} - B_{\frac{k}{n}t}) - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{\frac{k}{n}t}(B_{\frac{k+1}{n}t} - B_{\frac{k}{n}t}) = \alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}),$$

d'où

$$U_t^n = \sum_{p=0}^{n-1} \gamma_{\frac{p}{n}t} \alpha_{\frac{k}{n}t}(B_{\frac{k+1}{n}t} - B_{\frac{k}{n}t}) = \int_0^t \gamma_s^n \alpha_s^n dB_s$$

Il suffit donc de montrer que $\int_0^t \gamma_s^n \alpha_s^n dB_s$ converge vers $\int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On a, d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^t \gamma_s^n \alpha_s^n dB_s - \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s\right)^2 &= E\left(\int_0^t (\gamma_s^n \alpha_s^n - \gamma_s \alpha_s) dB_s\right)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t (\gamma_s^n \alpha_s^n - \gamma_s \alpha_s)^2 ds\right) \end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$ pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned} (\gamma_s^n \alpha_s^n - \gamma_s \alpha_s)^2 &= (\gamma_s^n (\alpha_s^n - \alpha_s) + \alpha_s (\gamma_s^n - \gamma_s))^2 \\ &\leq 2\left((\gamma_s^n)^2 (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 + (\alpha_s)^2 (\gamma_s^n - \gamma_s)^2\right) \\ &\leq 2\left(a^2 (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 + (\alpha_s)^2 (\gamma_s^n - \gamma_s)^2\right), \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq \mathbb{E}\left(\int_0^t (\gamma_s^n \alpha_s^n - \gamma_s \alpha_s)^2 ds\right) \leq 2\left(a^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^t (\alpha_s)^2 (\gamma_s^n - \gamma_s)^2 ds\right)\right)$$

On conclut, du théorème de la convergence dominée, que les deux espérances du second membre convergent vers 0, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t (\gamma_s^n \alpha_s^n - \gamma_s \alpha_s)^2 ds\right) = 0,$$

ce qui achève la démonstration.■

Remarque:

Avec la même démonstration avec (γ^n) *(resp.*(α^n)*) la suite des processus tassés de* γ *(resp.*α*) sur la subdivision:*

$$0 < \frac{1}{n} \wedge t < \frac{2}{n} \wedge t < \frac{3}{n} \wedge t < ..... < \frac{n+1}{n} \wedge t < ...,$$

on montre que la convergence suivante:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{\frac{p}{n} \wedge t} \left(X_{\frac{p+1}{n} \wedge t} - X_{\frac{p}{n} \wedge t} \right) \underset{n \to \infty}{\to} \int_0^t \gamma_s \alpha_s dB_s + \int_0^t \gamma_s \beta_s ds$$

a lieu dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.