Solutions des exercices 4, 5 et 6

Exercice 4:

Comme le processus $\left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors la variable aléatoire $\left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)^2$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable et comme

$$\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds = \sum_k \alpha_{t_k \wedge t}^2 \left(t_{k+1} \wedge t - t_k \wedge t\right)$$

est aussi $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout $t \geq 0$. On en déduit que la variable aléatoire M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout $t \geq 0$, qui signifie que le processus M est adapté.

Comme

$$|M_t| \leq \left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)^2 + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds,$$

alors

$$\mathbb{E}\left(|M_t|\right) \leq \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) = 2\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$$

qui signifie que le processus M est intégrable.

Exercice 5:

On a pour tout $t \geq 0$, à cause de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\{T > t\} = \underset{s \leq t}{\cap} \{|B_s| \leq 1\} = \underset{\substack{s \leq t \\ s \in \mathbb{Q}}}{\cap} \{|B_s| \leq 1\}.$$

Or chacun ndes ensembles $\{|B_s| \leq 1\} = B_s^{-1}\left([-1, 1]\right) \in \mathcal{F}_t$ et comme la tribu $\mathcal{F}_t$ est stable par rapport à l'intersection dénombrable, alors l'événement $\{T > t\}$ appartient à $\mathcal{F}_t$, d'où T est un temps d'arrêt.

Exercice 6:

Soient

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + M_t + V_t \\ &= X_0 + M_t' + V_t', \end{aligned}$$

deux représentations de la semi-martingale X, où M et M'sont des martingales et V et V' sont des processus à variations finies. Alors on a par différence $M_t - M_t' = V_t' - V_t$.

Comme $M - M'$ est une martingale et $V' - V$ est un processus à variations finies, alors $M_t - M_t' = V_t' - V_t = 0$ $p.s.$pour tout ≥ 0, doù

$M_t = M_t'$ et $V_t' = V_t$ $p.s.$pour tout ≥ 0.