Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Badji Mokhtar-Annaba

Master 1: -Probabilités et Statistique
-Actuariat

Série N°2

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$

Exercice 1:

Soient $s, t \in \mathbb{R}$■.

1) Calculer $\mathbb{E}\left(B_t B_s\right)$.

2) On suppose $s < t$. Donner la loi de $B_t + B_s$ et celle du couple (B_t, B_s).

Exercice 2:

Soit X processus intégrable, adapté, à accroissements indépendants par rapport au passé et tel que $\mathbb{E}\left(X_t - X_s\right) = 0$ pour tous $s, t \geq 0$.

Montrer que X est une martingale.

Exercice 3:

Soit $\alpha \in \overline{S}$. Montrer que le processus M défini par $M_t = \int_0^t \alpha_s dB_s$ est une martingale.

Exercice 4:

Soit $\alpha \in \overline{S}$. Montrer que le processus M défini par

$$M_t = \left(\int_0^t \alpha_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \alpha_s^2 ds$$

est adapté et intégrable.

Exercice5:

Montrer que

$$T := \inf\left\{s \geq 0 : |B_s| > 1\right\}$$

est un temps d'arrêt.

Exercice 6:

Montrer que que la représentation d'une semi-martingale est unique à une égalité presque surement prés.

Solutions des exercices 1,2 et 3

Exercice 1:

1) Si $s \leq t$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t B_s\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(B_t B_s \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(B_s \mathbb{E}\left(B_t \mid \mathcal{F}_s\right)\right) \text{ car } B_s \text{ est } \mathcal{F}_s-\text{mesurable} \\
&= \mathbb{E}\left(B_s^2\right) \text{ car } \left(B_t\right)_{t\geq 0} \text{ est une martingale} \\
&= s \text{ car } B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0,s\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(B_t B_s\right) = s \wedge t$$

2) Comme $B_t - B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0,s\right)$ et comme $B_t - B_s$ et B_s sont indépendantes, alors

$$B_t + B_s = \left(B_t - B_s\right) + 2B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, (t-s)+4s\right) = \mathcal{N}\left(0, t+3s\right)$$

Pour tous α, β réels la variable aléatoire

$$\alpha B_t + \beta B_s = \alpha\left(B_t - B_s\right) + \left(\alpha+\beta\right)B_s \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \alpha^2\left(t-s\right) + \left(\alpha+\beta\right)^2 s\right)$$

Le couple $\left(B_t, B_s\right)$ est donc gaussien. De plus

$$\mathbb{E}\left(B_t\right) = \mathbb{E}\left(B_s\right) = 0 \text{ et } cov\left(B_t, B_s\right) = \mathbb{E}\left(B_t B_t\right) = s$$

Il résulte que

$$\left(B_t, B_s\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\left(0,0\right), \begin{pmatrix} t & s \\ s & s \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 2:

Il suffit de montrer que $\mathbb{E}\left(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s\right) = 0$ pour tous $s \leq t$.

Comme X est à accroissements indépendants par rapport au passé, alors la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, d'où

$$\mathbb{E}\left(X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(X_t - X_s\right) = 0$$

Exercice 3:

Cas où $\alpha \in S$.

M est adapté. En effet, on a

$$M_t = \sum_k \alpha_{t_k \wedge t}\left(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k \wedge t}\right)$$

Comme $\mathcal{F}_{t_k \wedge t} \subset \mathcal{F}_{t_{k+1}\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ et comme $\left(B_t\right)$ et α sont adaptés, alors chacune des variables aléatoires $\alpha_{t_k \wedge t}, B_{t_{k+1}\wedge t}$ et $B_{t_k \wedge t}$ est $\mathcal{F}_t-$ mesurable. Il résulte que M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, comme étant la somme de produit de différences de variables aléatoires mesurables. M est donc adapté.

Comme $\mathbb{E}\left(M_t^2\right)=\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right)$ alors $\mathbb{E}\left(|M_t|\right)\leq \mathbb{E}\left(M_t^2\right)<\infty$.

On a,

$$M_{t+h}-M_t=\sum_k \alpha_{\widehat{t}_k}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t}_k}\right)$$

où $\left(\widehat{t}_k\right)$ est la subdivision de l'intervalle $[t,t+h]$ formée à l'aide de $t,t+h$ et des k qui appartiennent à $[t,t+h]$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(M_{t+h}-M_t \mid \mathcal{F}_t\right) &= \sum_k \mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t}_k}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t}_k}\right)\mid \mathcal{F}_t\right)\\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t}_k}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t}_k}\right)\mid \mathcal{F}_t\right)\\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t}_k}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t}_k}\right)\mid \mathcal{F}_{\widehat{t}_k}\right)\mid \mathcal{F}_t\right)\\
&= \sum_k \mathbb{E}\left(\alpha_{\widehat{t}_k}\mathbb{E}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t}_k}\mid \mathcal{F}_{\widehat{t}_k}\right)\mid \mathcal{F}_t\right) \text{ car } \alpha \text{ est adapté}\\
&= 0 \text{ car } \mathbb{E}\left(B_{\widehat{t}_{k+1}}-B_{\widehat{t}_k}\mid \mathcal{F}_{\widehat{t}_k}\right)=0 \text{ (} (B_t) \text{ est une martingale)}
\end{aligned}$$

M est doc une martingale.

Cas où $\alpha\in\overline{S}$

Soit (α_n) une suite de S qui converge vers α dans $L^2\left(\Omega\times[0,t]\right)$. On pose $M_t^n=\int\limits_0^t \alpha_s^n dB_s$. On sait, par définition de l'intégrale stochastique, que la suite de variables aléatoires (M_t^n) converge dans $L^2(\Omega)$ vers M_t. Il résulte alors que M est adapté et appartient à $L^2(\Omega)$ donc intégrable.

il suffit de montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n\mid\mathcal{F}_t\right)\right)$ converge vers $\mathbb{E}\left(M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)$ dans $L^2(\Omega)$ grâce à l'unicité de la limite.

On a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n\mid\mathcal{F}_t\right)-\mathbb{E}\left(M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n-M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)^2\right)\\
&= \left|\left|\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n-M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)\right|\right|_2^2\\
&\leq \left|\left|M_{t+h}^n-M_{t+h}\right|\right|_2^2
\end{aligned}$$

car l'espérance conditionnelle contracte la norme.

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(M_{t+h}^n\mid\mathcal{F}_t\right)-\mathbb{E}\left(M_{t+h}\mid\mathcal{F}_t\right)\right)^2\right)=0$, d'où l'affirmation. M est donc une martingale.