Exemple 2:

Soit α un processus adapté, continu et tel que $\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$. *Alors* $\alpha \in \overline{S}$.*é*

On considère la suite de processus tronqués (α^n) définie par $\alpha_t^n = \alpha_t \wedge n$.

Il suffit de monter que $\alpha^n \in \overline{S}$ et que (α^n) converge vers α dans $L^2(\Omega \times [0,t]$. Remarquons d'abord que α^n est adapté, continu et $|\alpha_t^n| \leq n$, d'où $\mathbb{E}(\sup\limits_{s\leq t}|\alpha_s|) \leq n < \infty$. Il résulte de l'exemple 1 que $\alpha^n \in \overline{S}$.

En fait la suite (α^n) est monotone croissante convergente ponctuellement vers α. En effet, pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ et pour tout $n \geq N_0 := [\alpha_t(\omega)] + 1$ ($[x]$ désigne la partie entière de x) on a $\alpha_t(\omega) > n$, d'où $\alpha_t^n(\omega) = \alpha_t(\omega)$ $\forall n \geq N_0$. Par suite $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_t^n = \alpha$. D'autre part, on a pour entier n et pour tout $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$:

-ou bien $\alpha_t(\omega) \leq n$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = \alpha_t^{n+1}(\omega) = \alpha_t(\omega)$,

-ou bien $n < \alpha_t(\omega) \leq n+1$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = n < \alpha_t(\omega) = \alpha_t^{n+1}(\omega)$,

-ou bien $\alpha_t(\omega) > n+1$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = n < n+1 = \alpha_t^{n+1}(\omega)$,

d'où la croissance de (α^n).

Ainsi (α^n) est une suite croissante de $\overline{S}$ convergente vers ponctuellement vers α. Il résulte du théorème de la convergence monotone que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) = \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \lim_{n\to\infty} (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) = 0,$$

qui signifie que (α^n) convergente vers α dans $L^2(\Omega \times [0,t])$.

Exemple 3 :

L'ensemble des processus adaptés continus est dense dans $\overline{S}$.

Pour le voir, il suffit d'approcher toute processus simple par une suite de processus adaptés continus.

Soient α un processus simple et $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha_t^\varepsilon := \alpha * \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[0,\varepsilon[}(t)$, d'où

$$\alpha_t^\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \alpha_s \frac{1}{\varepsilon} 1_{[0,\varepsilon[}(t-s) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^t \alpha_s ds,$$

et on a

$$\begin{aligned} |\alpha_t^\varepsilon - \alpha_t| &= |\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^t \alpha_s ds - \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^t \alpha_t ds| = \frac{1}{\varepsilon}| \int\limits_{t-\varepsilon}^t (\alpha_t - \alpha_s) ds| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^t |\alpha_t - \alpha_s| ds \\ &\leq \sup_{s\in[t-\varepsilon,t]} |\alpha_t - \alpha_s|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq |\alpha_t^\varepsilon - \alpha_t| \leq \sup_{s\in[t-\varepsilon,t]} |\alpha_t - \alpha_s|,$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_t^\varepsilon = \alpha,$$

d'où l'affirmation.

Proposition: (fondamentale)

Pour tout $\alpha \in \overline{S}$, *le processus* M *défini par* $M_t = (\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ *est une martingale.*

Notons que si $\alpha \equiv 1$ alors $M_t = B_t^2 - t$ qui est bien une martingale.

Démonstration:

En fait, il suffit de montrer que M est une martingale pour $\alpha \in S$, le cas général se déduit par par passage à la limite.

Le processus $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)_{t\geq 0}$ étant une martingale donc adaptée, alors la variable aléatoire $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Il en est de même pour

$$\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds = \sum_k \alpha_{t_k}^2 \left(t_{k+1} \wedge t - t_k \wedge t\right)$$

et donc pour M_t aussi. Le processus M est donc adapté.

De plus

$$\mathbb{E}\left(|M_t|\right) \leq \mathbb{E}\left((\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds \right) \leq \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 + \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) = 2\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$$

Il reste à montrer que $\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$.

On a :

$$M_{t+h} - M_t = (\int\limits_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 - \int\limits_t^{t+h} \alpha_s^2 ds.$$

Il résulte de la linéarité de l'espérance conditionnelle et du fait que $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)$ est une martingale, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \quad | \quad \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s) - \int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\mathbb{E}(\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s \int_0^t \alpha_s dB_s \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}((\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\int_0^t \alpha_s dB_s \mathbb{E}[(\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s) \mid \mathcal{F}_t] + (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^t \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t)$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t).$$

On a

$$\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s = \sum_k \alpha_{t_k^{"}} (B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}}),$$

où $\left(t_k^{"}\right)$ est la subdivision de l'intervalle $[t, t+h]$ construite à l'aide de $t, t+h$ et les t_k qui appartiennent à $[t, t+h]$. On pose $C_k = \alpha_{t_k^{"}} (B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})$, d'où

$$(\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 = (\sum_k C_k)^2 = \sum_{k,l} C_k C_{k+l}$$

et on a

$$\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{k,l} \mathbb{E}(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_t).$$

En fait $\mathbb{E}(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_t) = 0$ pour tout $l > 0$. En effet; comme $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t^"_{k+l}}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_k C_{k+l} \quad \mid \quad \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}\left(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_{t^"_{k+l}}\right) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_{t^"_k}(B_{t^"_{k+1}} - B_{t^"_k})\alpha_{t^"_{k+l}}\mathbb{E}((B_{t^"_{k+l+1}} - B_{t^"_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_{t^"_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(A_k \alpha_{t^"_{k+l}}\mathbb{E}(B_{t^"_{k++l1}} - B_{t^"_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t^"_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_t) = 0 \text{ car } (B_t) \text{ est une martingale.}
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \quad \mid \quad \mathcal{F}_t) &= \sum_k \mathbb{E}(C_k^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^"_k}(B_{t^"_{k+1}} - B_{t^"_k})^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\mathbb{E}(\alpha^2_{t^"_k}(B_{t^"_{k+1}} - B_{t^"_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t^"_k}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^"_k}\mathbb{E}((B_{t^"_{k+1}} - B_{t^"_k})^2 \mid \mathcal{F}_{t^"_k}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^"_k}\mathbb{E}((B_{t^"_{k+1}} - B_{t^"_k})^2) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha^2_{t^"_k}(t^"_{k+1} - t^"_k) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\sum_k \alpha^2_{t^"_k}(t^"_{k+1} - t^"_k) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t),$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.■

1 Semi-martingales

Dans la suite, on aura besoin du rappel suivant:

1.1 *Rappel*

Définition:

Une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est dite à variations finies (ou bornées) si*

$$||F||_{a,b} := sup \sum_i |F(a_{i+1}) - F(a_i)| < \infty$$

où le suprémum est pris sur l'ensemble des subdivisions

$$d = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < ..... < a_n = b\}$$

de $[a, b]$.

Note que l'ensemble des fonctions à variations finies muni de $||.||_{a,b}$ est un espace vectoriel normé

Exemple 1 :

Si F croissante alors elle est à variations finies. En effet, pour toute subdivision $d = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < ..... < a_n = b\}$ de $[a, b]$ on a

$$\sum_i |F(a_{i+1}) - F(a_i)| = F(b) - F(a),$$

d'où

$$||F||_{a,b} \leq F(b) - F(a) < \infty.$$

Il en est de même pour F est décroissante et on a par le même raisonnement

$$||F||_{a,b} \leq F(a) - F(b) < \infty.$$

Exemple 2 :

Si F est de la forme

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds$$

où f est une fonction positive, alors elle est à variations finies car elle croissante. De plus on peut montrer que $||F||_{a,b} = \int_a^b |f(s)|\, ds$.

Exemple 3 :

Si maintenant on suppose que f est de signe quelconque, alors elle est également à variations finies. En effet $f = f^+ - f^-$, où $f^+(x) = \max(f(x), 0) \geq 0$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0) \geq 0$ et donc

$$F(t) = \int_a^t f^+(s)\, ds - \int_a^t f^-(s)\, ds$$

est à variations finies comme étant la différence de deux fonctions à variations finies. On peut montrer dans ce cas que

$$F(t) = \int_a^t f^+(s)\, ds - \int_a^t f^-(s)\, ds$$

1.2 Motivation

Supposons qu'on a à résoudre l'équation suivante:

$$\Delta X_t = \sigma (X_t) \Delta B_t + V (X_t) \Delta t,$$

où X_t représente la position d'une particule (par exemple un gaz), $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien de dimension n, $\sigma (x)$ une matrice carré $n \times n$ (appelé champ des covariances) et $V (x)$ un champ de vecteur (appelé champ des vitesses). Ici, on entend par ΔX_t (resp. ΔB_t) l'accroissement $X_{t+h} - X_t$ (resp. $B_{t+h} - B_t$) et par Δt un temps infiniment petit h. Comme pour les équations différentielles ordinaires, X_t doit nécessairement satisfaire l'égalité suivante:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma (X_s) dB_s + \int_0^t V (X_s) ds \qquad (*)$$

d'où la définition suivante.

1.3 Processus d'Itô

Définition:

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P\right)$. On appelle semi-martingale (ou processus d'Itô) tout processus de la forme:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds,$$

satisfaisant les propriétés suivantes:

1) X_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,*

2) $\alpha \in \overline{S}$,

3) β *est un processus adapté tel que* $\mathbb{E}\left(\int_0^t |\beta_s| ds\right) < \infty$ (*on dira que le processus* $\beta \in L^1_{loc}$).

Remarque:

On notera que le processus (X_t) est nécessairement adapté et que le processus β est $p.s.$ à variations finies.

Définition:

Le processus $M_t := \int_0^t \alpha_s dB_s$ s'appelle la partie martingale de X_t et $V_t := \int_0^t \beta_s ds$ sa partie à variations finies.

On notera que l'ensemble des semi-martingales est un espace vectoriel et que la représentation $(*)$ est unique à une égalité $p.s.$ prés (voir T.D.).

Notation:

Au lieu d'écrire $(*)$ on écrit

$$dX_t = \alpha_t dB_t + \beta_t dt \qquad (**)$$

Définitions:

- La forme $(**)$ s'appelle la différentielle (ou la dynamique) de X.

- Lorsque α_t et β_t dépendent de X_t (i.e. $\alpha_t = \sigma(X_t)$ et $\beta_t = V(X_t)$), $(**)$ prend la forme suivante:

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t + V(X_t)\, dt \qquad (***)$$

-La forme $(***)$ s'appelle équation différentielle stochastique (EDS en abrégé). On dira dans ce cas que X_t satisfait l'EDS $(***)$, σ est sa diffusion et V est sa vitesse (ou son drift).

On notera que si $\sigma \equiv 0$, alors l'EDS $(***)$ devient une EDO.

Règle de multiplication (très importante):

Soient $(X_t), (Y_t)$ et (Z_t) trois semi-martingales définies par les différentielles suivantes:

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha_t dB_t + \beta_t dt, \\ dY_t &= \alpha'_t dB_t + \beta'_t dt \text{ et} \\ dZ_t &= \alpha''_t dB_t + \beta''_t dt\ . \end{aligned}$$

On pose par définition:

$$dX_t dY_t := \alpha_t \alpha'_t dt$$

Conséquences:

Puisque

$$dB_t = 1.dB_t + 0.dt \text{ et } dt = 0.dB_t + 1.dt,$$

alors on conclut que

$$dB_t dB_t = dt \text{ et que } dt dB_t = dt dt = 0.$$

Il résulte aussi de cette règle que

$$dX_t dY_t dZ_t = 0.$$

Dans tout ce qui suit, on convient que si $(B'_t)_{t\geq 0}$ est un autre mouvement brownien indépendant de $(B_t)_{t\geq 0}$, alors $dB_t dB'_t = 0$.

1.4 Temps d'arrêt

On aura besoin de la notion de temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suivante:

Définition:

On appelle temps d'arrêt (t.d'a. en abrégé) toute variable aléatoire $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty]$ telle que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$.

Ainsi les $v.a.$ constantes sont des $t.d'a.$

Définition:

Soient S *et* T *deux* $t.d'a.$. *On défini les intervalles stochastiques de la manière suivante:*

$$
\begin{aligned}
[S,T] &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}, \\
[S,T[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) \leq t < T(\omega)\}, \\
]S,T] &= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) < t \leq T(\omega)\}, \\
]S,T[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : S(\omega) < t < T(\omega)\}, \\
]T,\infty[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) < t\}, \\
[T,\infty[&= \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) \leq t\}.
\end{aligned}
$$

L'ensemble $|[T]| := \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : T(\omega) = t\}$ *s'appelle le graphe de* T.