Calcul Stochastique

1 Généralités sur les processus stochastiques

Dans cette section, on donne les définitions de base nécessaires pour la compréhension du calcul stochastique. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace des probabilités.

Définition:

On appelle filtration toute famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ (i.e.$s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$). Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ s'appelle base stochastique ou espace probabilisé filtré.

La tribu $\mathcal{F}_t$ représente le passé pris en compte à l'instant t.

Définition:

Un processus stochastique est un modéle mathématique qui permet de décrire l'évolution d'un systéme en fonction du temps et du hasard. Formellement un processus stochastique est la donnée d'une famille de variables aléatoires $X := (X_t)_{t\in T}$ à valeurs dans un espace probabilisable (E, ξ), (généralement *$T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+$). E s'appelle l'espace d'état du processus X.*

Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, *l'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ s'appelle la trajectoire de X en ω.*

Dans toute la suite on ne considère que le cas où $T = \mathbb{R}_+$.

Définition:

Soit $X := (X_t)_{t\geq 0}$un processus. La filtration $(F_t^X)_{t\geq 0}$ définie par $F_t^X := \sigma(X_u : u \leq t)$ la tribu engendrée par les variables aléatoires X_u telles que $u \leq t$; s'appelle la filtration naturelle de X:

Définition:

Un processus X est dit adapté par rapport à une filltration donnée $(F_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$ la variable aléatoire X_t est F_t-mesurable.

Ainsi tout processus est adapté par rapport à sa propre filtation naturelle.

Notation:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ une base stochastique. On note par $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendrée par $\bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$. On écrit $\mathcal{F}_\infty = \bigvee\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

Lorsqu'on ne spécifie pas la tribu $\mathcal{F}$, on prendra automatiquement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

Définition:

Soit X un processus. On dira qu'un processus Y est une modification (ou version) de X si

$$X_t = Y_t \quad p.s. \qquad \forall t \geq 0.$$

2 Mouvement brownien:

C'est le processus le plus célèbre. Il a été découvert en 1927 par le botaniste écossais Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen. Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule. Ce mouvement permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Il est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ une base stochastique.

Définition:

On appelle mouvement brownien de dimension $d \geq 1$ (réel si $d = 1$) tout processus adapté $(B_t)_{t\geq 0}$ d'espace d'état $(\mathbb{R}^d, B_{\mathbb{R}^d})$, satisfaisant les propriétés suivantes :

$1 - B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow N_d(0, hC)$ *$(B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow N(0, h\beta^2)$, $\beta > 0$, si $d = 1)$ pour tout $t, h \geq 0$, où C est une matrice carrée d'ordre d, symétrique et inversible.*

$2-(B_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants par apport au passé: la variable aléatoire $B_{t+h} - B_t$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_t$ pour tout $t, h \geq 0$*

Lorsque $B_0 = x$ p.s., on dira que $(B_t)_{t\geq 0}$ est issu de x. Lorsque $B_0 = 0$ p.s. et $C = I$ la matrice identité ($\beta = 1$ dans le cas où $d = 1$), on dira que le mouvement brownien est standard.

Dans toute la suite, on considère un mouvement brownien standard, réel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur la base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Ainsi la variable aléatoire $B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t)$ pour tout $t > 0$.

Remarques:

$1-$ *On peut montrer que presque toute les trajectoires de $(B_t)_{t\geq 0}$ sont continues i.e. $P\{\omega : t \to B_t(\omega)$ n'est pas continue$\} = 0$*

$2-$ *Si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B$, alors la propriété 2 est équivalente à la suivante: $(B_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants au sens que pour toute suite $t_0 < t_1 < .... < t_n$, les variables aléatoires $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*

3 Martingales:

Nous allons introduire une classe importante de processus, appelés martingales, qui joue un rôle prépondérant en calcul stochastique.

Définition:

On appelle martingale tout processus M satisfaisant les propriétés suivantes :

$1 - (M_t)_{t\geq 0}$ *est adapté.*

$2 - E(|M_t|) < \infty$ *pour tout $t \geq 0$.*

$3 - E(M_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) = M_t$ *pour tout $t, h \geq 0$.*

Si au lieu de la propriété 2 on a $E(|M_t|^2) < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors on dira que X est une martingale à carré intégrable.

Remarques:

$1-$*Pour un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté, la propriété 3 est équivalente à $\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$ pour tout $t, h \geq 0$ car $X_t = \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t)$.*

2$-$*L'ensemble des martingales est un espace vectoriel car l'espérance conditionnelle est linéaire.*

3$-$*Pour une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$, l'*application* $t \mapsto E(M_t)$ *est constante car*

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(M_0).$$

Exemple fondamental : (voir T.D.)

Soit X un processus a accroissements indépendants et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle tel que $\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0 \quad \forall s < t$, alors X est une martingale. En particulier le mouvement brownien est une martingale.

Proposition:

le processus M défini par $M_t = B_t^2 - t$ est une martingale.

Démonstration:

Les propriétés 1 et 2 sont évidentes. Reste à démontrer que $\mathbb{E}(B_{t+h} - B_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$. On a d'une part,

$$E((B_{t+h} - B_t)^2 \mid \mathcal{F}_t) = E((B_{t+h} - B_t)^2) = h,$$

car $(B_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants par rapport au passé et $B_{t+h} - B_t \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, h)$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((B_{t+h} - B_t)^2 \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}((B_{t+h}^2 - 2B_{t+h}B_t + B_t^2) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\mathbb{E}(B_{t+h}B_t \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(B_t^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2B_t\mathbb{E}(B_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) + B_t^2 \text{ car } B_t \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{mesurable} \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2B_tB_t + B_t^2 \text{ car } (B_t) \text{ est une martingale} \\
&= \mathbb{E}(B_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t) - B_t^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(B_{t+h}^2 - B_t^2 \mid \mathcal{F}_t) = h.$$

Par suite

$$\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(B_{t+h}^2 - B_t^2 - h \mid \mathcal{F}_t) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.■

4 Intégrale stochastique

Définition:

On appelle processus simple tout processus α de la forme:

$$\alpha_t(\omega) = \sum_k \alpha_{t_k}(\omega)\, 1_{[t_k, t_{k+1}[}(t) \qquad \text{où } \ 0 = t_0 < t_1 < .... < t_k < ....$$

est une subdivision de $\mathbb{R}_+$, satisfaisant les propriétés suivantes:

$1-\alpha$ est adapté

$2-\alpha \in L^2(\Omega \times [0,t]\,, P \otimes dt)$ (i.e. $\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$) pour tout $t \geq 0$

Soit S l'ensemble des processus simples. Il est facile d'établir que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition:

Soit $\alpha \in S$. On appelle intégrale stochastique de α par rapport à $(B_t)_{t\geq 0}$, la variable aléatoire:

$$\int\limits_0^t \alpha_s dB_s := \sum_k \alpha_{t_k}(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t}).$$

Il découle de la linéarité de la somme que l'application $\alpha \to \int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ est linéaire sur S. On peut aussi démontrer que cette définition ne dépend pas du choix de la subdivision de $\mathbb{R}_+$.

Exemple :

Si $\alpha \equiv 1$, alors $\alpha = \sum_k \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, alors

$$\int\limits_0^t dB_s := \sum_k (B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t}) = B_t.$$

Proposition:

Pour tout $\alpha \in S$, le processus M défini par $M_t = \int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ est une martingale et on a :

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds)$$

Démonstartion:

Le fait que M soit une martingale sera démontré en T.D. Pour démontrer que

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds),$$

observons d'abord que

$$M_t = \sum_k \alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k}),$$

où (t'_k) est la subdivision de l'intervalle $[0,t]$ définie par $t'_k = t_k \wedge t$. On a alors, en posant $A_k = \alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})$,

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\sum_k A_k\right)^2 = \mathbb{E}(\sum_{k,l} A_k A_{k+l}) = \sum_{k,l} \mathbb{E}(A_k A_{k+l}).$$

Montrons que pour tout $l > 0$, $\mathbb{E}(A_k A_{k+l}) = 0$. En effet, comme $\mathcal{F}_{t'_k} \subset \mathcal{F}_{t'_{k+1}} \subset \mathcal{F}_{t'_{k+l}}$ et comme α et B sont adaptés, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_k A_{k+l}) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(A_k A_{k+l} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})\alpha_{t'_{k+l}}(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}}) \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\alpha_{t'_k}(B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})\alpha_{t'_{k+l}}\mathbb{E}(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}})\right) = 0
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(B_{t'_{k+l+1}} - B_{t'_{k+l}} \mid \mathcal{F}_{t'_{k+l}}) = 0$, puisque B est une martingale. Il résulte alors que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t^2) &= \sum_k \mathbb{E}(A_k^2) = \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2 (B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})^2) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2)\mathbb{E}\left((B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k})^2\right) \text{ car } \alpha_{t'_k} \text{ et } B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k} \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t'_k}^2)\left(t'_{k+1} - t'_k\right) \text{ car } B_{t'_{k+1}} - B_{t'_k} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, t'_{k+1} - t'_k\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_k (\alpha_{t'_k}^2)\left(t'_{k+1} - t'_k\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s^2 ds).
\end{aligned}$$

■

Remarque:

L'égalité $\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s^2 ds)$*, qui signifie que*

$$\left|\left|\int_0^t \alpha_s dB_s\right|\right|_{L^2(\Omega)} = ||\alpha||_{L^2(\Omega\times[0,t])}$$

Ainsi l'application linéaire $\alpha \to \int_0^t \alpha_s dB_s$ *de* S *dans* $L^2(\Omega \times [0,t])$ *est une isométrie.*

0n pose $L^2_{\mathcal{F}_t} := \{X \in L^2(\Omega) \text{ qui admet une version } \mathcal{F}_t\text{−mesurable}\}$.

4.1 Prolongement de l'intégrale stochastique :

Soit $\overline{S}_t$ l'adhérence de S dans $L^2(\Omega \times [0,t], P \otimes dt)$ et soit

$$\overline{S} = \{\alpha \text{ processus: } \alpha_t \in \overline{S}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

L'intégrale stochastique se prolonge donc par continuité à $\overline{S}$, qui restera encore une isométrie ($i.e$: $\forall \alpha \in \overline{S}$;$\mathbb{E}((\int_0^t \alpha_s dB_s)^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right)$). Ainsi, on a définie par $\alpha \in S$, la variable aléatoire $\int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ dite integrale stochastique de α par rapport à $(B_t)_{t\geq 0}$ par sa valeur $\sum_k \alpha_{t_k}(B_{t_{k+1}\wedge t} - B_{t_k\wedge t})$ et par : Si $\alpha \in \overline{S}$, alors il existe une suite (α^n) de S qui converge vers α dans $L^2(\Omega \times [0,t])$. Dans ce cas

$$\int\limits_0^t \alpha_s dB_s \underset{L^2}{:=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^t \alpha_s^n dB_s,$$

Dans toute la suite on prendra systématiquement une version continue de l'intégrale stochastique ($i.e$ l'application $t \to \int\limits_0^t \alpha_s dB_s$ est continue) à valeurs dans $L^2_{\mathcal{F}_t}$.

Définition:

Pour tout $a < b$, on défini $\int\limits_a^b \alpha_s dB_s$ par:

$$\int\limits_a^b \alpha_s dB_s := \int\limits_0^b \alpha_s dB_s - \int\limits_0^a \alpha_s dB_s.$$

Remarque:

Si $\alpha, \alpha' \in \overline{S}$, alors on a:

$$\mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s \int\limits_0^t \alpha'_s dB_s) = \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s \alpha'_s ds),$$

qui signifie que

$$\left\langle \int\limits_0^t \alpha_s dB_s, \int\limits_0^t \alpha'_s dB_s \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \alpha, \alpha' \rangle_{L^2(\Omega\times[0,t])}.$$

E*n effet, de l'identité* $xy = \frac{1}{4}\left\{(x+y)^2 - (x-y)^2\right\}$ *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, on déduit que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s dB_s \int_0^t \alpha'_s dB_s) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{4}\left\{(\int_0^t \alpha_s dB_s + \int_0^t \alpha'_s dB_s)^2 - (\int_0^t \alpha_s dB_s - \int_0^t \alpha'_s dB_s)^2\right\}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left\{\mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s) dB_s)^2) - \mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s) dB_s)^2))\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s + \alpha'_s)^2 ds) - \mathbb{E}((\int_0^t (\alpha_s - \alpha'_s)^2 ds))\right\} \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t \frac{1}{4}((\alpha_s + \alpha'_s)^2 - (\alpha_s - \alpha'_s)^2) ds) \\
&= \mathbb{E}(\int_0^t \alpha_s \alpha'_s ds)
\end{aligned}
$$

4.2 Description de $\overline{S}$:

Il est impossible de représenter les éléments de $\overline{S}$, néanmoins on peut donner une description de $\overline{S}$ à travers les exemples suivants:

Exemple 1 : *Soit α un processus adapté, continu et tel que* $\mathbb{E}(\sup_{s\leq t} \alpha_s^2) < \infty$, *alors $\alpha \in \overline{S}$ et on a :*

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2} \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}).$$

En effet; soit (α^n) la suite des processus tassés de α sur la subdivision

$$0 < \frac{t}{n} < .... < \frac{(n-1)\,t}{n} < t < ....,$$

définie par :

$$\alpha_s^n\,(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{\frac{p}{n}t}\,(\omega)\, 1_{[\frac{p}{n}t, \frac{p+1}{n}t[}(s).$$

Il est clair que $\alpha^n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que (α^n) converge α dans $L^2(\Omega \times [0,t])$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left((\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds)\right) = 0.$$

On a, d'une part

$$(|\alpha_s^n - \alpha_s|)^2 \leq (|\alpha_s^n| + |\alpha_s|)^2 \leq 2\left(|\alpha_s^n|^2 + |\alpha_s|^2\right) \leq 4\sup_{s\leq t}\alpha_s^2.$$

D'autre part, $\alpha_s^n = \alpha_{\frac{p}{n}t}$ pour tout $s \in [\frac{p}{n}t, \frac{p+1}{n}t[$, d'où $|\alpha_s^n - \alpha_s| = |\alpha_{\frac{p}{n}t} - \alpha_s|$. Comme $|s - _{\frac{p}{n}t}| \leq \frac{t}{n}$ et comme α est continu, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_s^n - \alpha_s) = 0$.

Ainsi la suite de variables aléatoires $(\alpha_s^n - \alpha_s)^2$ est domineée par $4\sup\limits_{s\leq t}\alpha_s^2$ qui est intégrable et converge vers 0, d'où d'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_0^t(\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds) = 0.$$

Ainsi $\alpha \in \overline{S}$ et on a $\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim\limits_{L^2}\int_0^t \alpha_s^n dB_s$, or

$$\int_0^t \alpha_s^n dB_s = \sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t\wedge t} - B_{\frac{p}{n}t\wedge t}) = \sum_{p=0}^{n-1}\alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}),$$

d'où

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2}\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_{\frac{p}{n}t}(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t})$$

Remarque:
1$-$*On a aussi*

$$\int_0^t \alpha_s dB_s = \lim_{L^2}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{\frac{p}{n}\wedge t}(B_{\frac{(p+1)}{n}t\wedge t} - B_{\frac{p}{n}\wedge t})$$

Il suffit de reprendre la même démonstration en utilisant la subdivision

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < ..... < \frac{p}{n} < .....$$

2$-$ *Si f est une fonction déterministe de $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$ alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, ||f||^2_{L^2([0,t])}).$$

En effet, on a

$$\int_0^t f(s)dB_s = \lim_{L^2}\sum_{p=0}^{n-1} f(\frac{p}{n}t)(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}).$$

Comme $B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{t}{n})$ et sont indépendantes, alors

$$\sum_{p=0}^{n-1} f(\frac{p}{n}t)(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sum_{p=0}^{n-1} f^2(\frac{p}{n}t) var(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t})),$$

or

$$\sum_{0}^{n-1} f^2(\frac{p}{n}t) var(B_{\frac{p+1}{n}t} - B_{\frac{p}{n}t})) = \sum_{p=0}^{n-1} f^2(\frac{p}{n}t)\frac{t}{n} = \int_0^t f^2(s)ds,$$

d'où l'affirmation.

Par exemple

$$\int_0^t e^{-s} dB_s \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \int_0^t e^{-2s} ds) = \mathcal{N}(0, \frac{1-e^{-2t}}{2})$$

2$-$*Soit α un processus adapté, continu et tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$. Alors $\alpha \in \overline{S}$.*

On considère la suite de processus tronqués (α^n) définie par $\alpha_t^n = \alpha_t \wedge n$.

Il suffit de monter que $\alpha^n \in \overline{S}$ et que (α^n) converge vers α dans $L^2(\Omega \times [0, t]$. Remarquons d'abord que α^n est adapté, continu et $|\alpha_t^n| \leq n$, d'où $\mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |\alpha_s|) \leq n < \infty$. Il résulte de l'exemple 1 que $\alpha^n \in \overline{S}$.

En fait la suite (α^n) est monotone croissante convergente ponctuellement vers α. En effet, pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ et pour tout $n \geq N_0 := [\alpha_t(\omega)] + 1$ ($[x]$ désigne la partie entière de x) on a $\alpha_t(\omega) > n$, d'où $\alpha_t^n(\omega) = \alpha_t(\omega)$ $\forall n \geq N_0$. Par suite $\lim_{n\to\infty} \alpha_t^n = \alpha$. D'autre part, on a pour entier n et pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$:

-ou bien $\alpha_t(\omega) \leq n$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = \alpha_t^{n+1}(\omega) = \alpha_t(\omega)$,

-ou bien $n < \alpha_t(\omega) \leq n+1$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = n < \alpha_t(\omega) = \alpha_t^{n+1}(\omega)$,

-ou bien $\alpha_t(\omega) > n+1$ et dans ce cas $\alpha_t^n(\omega) = n < n+1 = \alpha_t^{n+1}(\omega)$,

d'où la croissance de (α^n).

Ainsi (α^n) est une suite croissante de $\overline{S}$ convergente vers ponctuellement vers α. Il résulte du théorème de la convergence monotone que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \lim_{n\to\infty} (\alpha_s^n - \alpha_s)^2 ds\right) = 0,$$

qui signifie que (α^n) convergente vers α dans $L^2(\Omega \times [0, t])$.

Exemple 3 :

L'ensemble des processus adaptés continus est dense dans $\overline{S}$.

Pour le voir, il suffit d'approcher toute processus simple par une suite de processus adaptés continus.

Soient α un processus simple et $\varepsilon > 0$. On pose $\alpha_t^\varepsilon := \alpha * \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{1}_{[0,\varepsilon[}(t)$, d'où

$$\alpha_t^\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \alpha_s \frac{1}{\varepsilon} 1_{[0,\varepsilon[}(t-s) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \alpha_s ds,$$

et on a

$$\begin{aligned} |\alpha_t^\varepsilon - \alpha_t| &= |\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \alpha_s ds - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \alpha_t ds| = \frac{1}{\varepsilon}|\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} (\alpha_t - \alpha_s) ds| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} |\alpha_t - \alpha_s| ds \\ &\leq \sup_{s\in[t-\varepsilon,t]} |\alpha_t - \alpha_s|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq |\alpha_t^\varepsilon - \alpha_t| \leq \sup_{s\in[t-\varepsilon,t]} |\alpha_t - \alpha_s|,$$

par suite

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_t^\varepsilon = \alpha,$$

d'où l'affirmation.

Proposition: (fondamentale)

Pour tout $\alpha \in \overline{S}$, le processus M défini par $M_t = (\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 - \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds$ est une martingale.

Notons que si $\alpha \equiv 1$ alors $M_t = B_t^2 - t$ qui est bien une martingale.

Démonstration:

En fait, il suffit de montrer que M est une martingale pour $\alpha \in S$, le cas général se déduit par par passage à la limite.

Le processus $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)_{t\geq 0}$ étant une martingale donc adaptée, alors la variable aléatoire $(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Il en est de même pour

$$\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds = \sum_k \alpha_{t_k}^2 \left(t_{k+1}\wedge t - t_k \wedge t\right)$$

et donc pour M_t aussi. Le processus M est donc adapté.

De plus

$$\mathbb{E}\left(|M_t|\right) \leq \mathbb{E}\left((\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 + \int\limits_0^t \alpha_s^2 ds \right) \leq \mathbb{E}(\int\limits_0^t \alpha_s dB_s)^2 + \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) = 2\mathbb{E}\left(\int\limits_0^t \alpha_s^2 ds\right) < \infty$$

Il reste à montrer que $\mathbb{E}(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t) = 0$.

On a :

$$M_{t+h} - M_t = (\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 - \int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds.$$

Il résulte de la linéarité de l'espérance conditionnelle et du fait que $(\int_0^t \alpha_s dB_s)$ est une martingale, que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \quad &| \quad \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s) - \int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\mathbb{E}(\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s \int_0^{t} \alpha_s dB_s \mid \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}((\int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - 2\int_0^{t} \alpha_s dB_s \mathbb{E}[(\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s) \mid \mathcal{F}_t] + (\int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - (\int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 \\
&= \mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}((\int_0^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 - (\int_0^{t} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t)$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t).$$

On a

$$\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s = \sum_k \alpha_{t''_k} (B_{t''_{k+1}} - B_{t''_k}),$$

où $\left(t_k^{"}\right)$ est la subdivision de l'intervalle $[t, t+h]$ construite à l'aide de $t, t+h$ et les t_k qui appartiennent à $[t, t+h]$. On pose $C_k = \alpha_{t_k^{"}}(B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})$, d'où

$$(\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 = (\sum_k C_k)^2 = \sum_{k,l} C_k C_{k+l}$$

et on a

$$\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{k,l} \mathbb{E}(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_t).$$

En fait $\mathbb{E}(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_t) = 0$ pour tout $l > 0$. En effet; comme $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t_{k+l}^{"}}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_k C_{k+l} \quad \mid \quad \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}\left(C_k C_{k+l} \mid \mathcal{F}_{t_{k+l}^{"}}\right) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_{t_k^{"}}(B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})\alpha_{t_{k+l}^{"}}\mathbb{E}((B_{t_{k+l+1}^{"}} - B_{t_{k+l}^{"}}) \mid \mathcal{F}_{t_{k+l}^{"}}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(A_k \alpha_{t_{k+l}^{"}}\mathbb{E}(B_{t_{k++l1}^{"}} - B_{t_{k+l}^{"}} \mid \mathcal{F}_{t_{k+l}^{"}}) \mid \mathcal{F}_t) = 0 \text{ car } (B_t) \text{ est une martingale.}
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \quad \mid \quad \mathcal{F}_t) &= \sum_k \mathbb{E}(C_k^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t_k^{"}}^2 (B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})^2 \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\mathbb{E}(\alpha_{t_k^{"}}^2 (B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k^{"}}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t_k^{"}}^2 \mathbb{E}((B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_k^{"}}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t_k^{"}}^2 \mathbb{E}((B_{t_{k+1}^{"}} - B_{t_k^{"}})^2) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \sum_k \mathbb{E}(\alpha_{t_k^{"}}^2 (t_{k+1}^{"} - t_k^{"}) \mid \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(\sum_k \alpha_{t_k^{"}}^2 (t_{k+1}^{"} - t_k^{"}) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}((\int_t^{t+h} \alpha_s dB_s)^2 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t),$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(M_{t+h} - M_t \mid \mathcal{F}_t\right) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.■