4. Le potentiel électrique :

Une particule chargée, placée dans un champ électrostatique possède une certaine énergie potentielle parce que le champ exerce sur elle une force et que le travail a du être fourni pour amener la charge en un point donné du champ.

Le travail est effectué par le champ électrique lorsqu'une charge se déplace d'un point à un autre. Le potentiel électrique en un point du champ est défini comme ***énergie potentielle*** d'une ***charge unité*** placée en ce point. Le potentiel électrique est donc une grandeur scalaire. Si l'on désigne le potentiel électrique en un point donné par **V** et l'énergie potentielle $\mathbf{E_p}$.

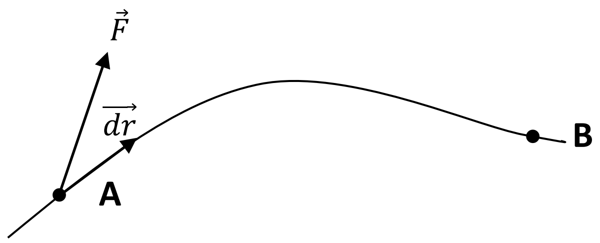
Alors on a : $\boxed{\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E_p}}{\mathbf{q}}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E_p = V.q}}$ **(*)**

Unités *(MKSA) :* **Volt = Joule/Colomb (J/C)**

4-1. Circulation du champ électrique d'une charge ponctuelle :

Supposons qu'une charge q se déplace de **A** vers **B** dans champ électrique, le travail élémentaire dW pour déplacer la charge **q** pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ est :

$$dW = \int \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} = \int q.\vec{E}.\overrightarrow{dr}\,, \qquad \text{avec } \vec{F} = q.\vec{E}$$



Alors, si on veut déplacer la charge **q** suivant un chemin quelconque A⟶B, il faut fournir un travail W_{AB} :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,.\overrightarrow{dr} = q\int_A^B \vec{E}\,.\overrightarrow{dr}$$

L'intégrale $\int_A^B \boldsymbol{\vec{E}\,.\overrightarrow{dr}}$ s'appelle circulation du champ électrique sur tout le long de la courbe de A jusqu'à B.

Alors, d'après la relation (*) on a :

$$E_{p_A} = V_A.q \quad \text{et} \quad E_{p_B} = V_B.q$$

d'où $$E_{p_A} - E_{p_B} = V_A.q - V_B.q = q(V_A - V_B)$$

$$\boldsymbol{E_{p_A} - E_{p_B} = q(V_A - V_B).}$$

Mais, d'après la définition de l'énergie potentielle, le terme de ***gauche*** donne le travail fourni à la charge lorsqu'elle se déplace de **A** vers **B.**

En désignant le travail $\boldsymbol{W_{AB}}$ **, on a :**

$$\boldsymbol{W_{AB} = q(V_A - V_B).}$$

Et comme la force électrique agissant sur la charge est $\vec{F} = q.\vec{E}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,.\,\overrightarrow{dr} = q\int_A^B \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr}$$

et $$q\int_A^B \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr} = q(V_A - V_B) \longrightarrow \int_A^B \boldsymbol{\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr} = (V_A - V_B)} \quad (**).$$

***Remarque* :** Si A et B coïncident c'est-à-dire le chemin d'intégration est une courbe fermée, alors

$$\oint_A^B \boldsymbol{\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr} = 0}\ .$$

4-2. Potentiel électrique :

En se référant à la relation (**) :

$$\int_A^B \boldsymbol{\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr} = (V_A - V_B) = -(V_B - V_A) = -\int_A^B dV}$$

$$\longrightarrow \quad \int_A^B \boldsymbol{\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dr} = -\int_A^B dV} \quad \longrightarrow \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dr} = -dV}$$

La grandeur $V_B - V_A$ est appelé tension ou différence de potentiel entre les point B et A, on la note par V_{AB}, telle que :

$$\boldsymbol{V_{AB} = V_B - V_A}$$

4-3.Passage du champ au potentiel et du potentiel au champ :

A chaque point de l'espace M(x, y, z) sont associés deux fonctions, l'une vectorielle et l'autre scalaire, qui permettent de décrire l'espace électrique:

Le champ $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$; le potentiel V= V(x,y,z).

On sait que :

$$\boldsymbol{-dV = \vec{E}.\overrightarrow{dr} = E_x\,dx + E_y dy + E_z dz}$$

et $\boldsymbol{dV}$ est une différentielle totale $\longrightarrow$ $\boldsymbol{dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial x}dx}$

$$\boldsymbol{-dV = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dx = E_x\, dx + E_y dy + E_z dz}$$

Par identification :

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}} \\[2em] \boldsymbol{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}} \\[2em] \boldsymbol{E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}} \end{array}\right\} \longrightarrow \qquad \boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V}$$

4. 4. Le potentiel électrique produit par une charge ponctuelle:

On a vu que le champ E produit par une charge **q** est radial,

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}}$$

pour obtenir le potentiel électrique V dû à une charge, on utilise la relation :

$$\boldsymbol{dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dr}} \longrightarrow \boldsymbol{V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2}} = \boldsymbol{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}}\frac{1}{r} + C^{te}$$

En supposant que V = 0 quand r tend vers l'infini on aura la C^{te} = 0 volt.

On obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}}$$

Le potentiel électrique est négatif ou positif suivant le signe de la charge qui le produit. Si on a plusieurs charges q_1, q_2, q_3,……….q_n, le potentiel en un point M est la somme scalaire de leurs potentiels individuels.

$$V(M) = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + V_n.$$

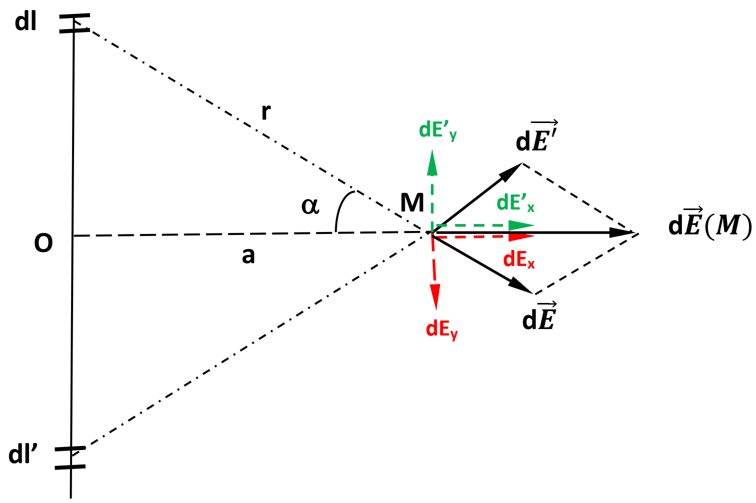
$$V(M) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_3} + \cdots \qquad \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}}}$$

4.5. Exemple de calcul de champ et de potentiel électrique :

- **Champ et potentiel électriques créés par un fil infiniment long**

Soit une charge **q** uniformément répartie, avec une densité linéique λ > 0, sur un fil infiniment long. Calculer le champ **E** et le potentiel **V** en point M situé à une distance r.



Soient **dl** un élément du fil et **dl'** sa symétrie par rapport à O, les champs élémentaires $\boldsymbol{d\vec{E}}(\boldsymbol{dE_x},\boldsymbol{dE_y})$ et $\boldsymbol{d\vec{E}'}(dE_x', dE_y')$. Les projections suivant l'axe Oy, dE_y et dE_y' s'annulent entre elles (voir figure). Alors nous prenons uniquement les composantes parallèles à OM (perpendiculaire au fil), le champ est dirigé suivant OM.

En raison de la symétrie sur ox le champ total créé par le fil est :

$$\boldsymbol{dE(M)} = dE_x + dE_x' = \boldsymbol{dE}\cos\propto + \boldsymbol{dE}'\cos\propto,$$

$$\text{avec} \qquad \boldsymbol{dE} = \boldsymbol{dE}' = \frac{dq}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\longrightarrow \qquad \boldsymbol{dE(M)} = 2\,dE\cos\propto \quad \longrightarrow E(M) = \int 2dE\cos\propto = \int 2\frac{dq}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r^2}}\cos\propto$$

$$\text{Avec } \lambda = dq/dl \ \longrightarrow dq = \lambda.dl$$

$$\int 2\frac{\lambda.dl}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r^2}}\cos\propto, \quad \text{nous avons aussi, } \tan\propto = \frac{l}{a} \quad \longrightarrow l = a.\tan\propto$$

$$Alors \quad dl = a.\frac{1}{\cos^2\propto}d\alpha \qquad et \qquad \cos\propto = \frac{a}{r} \quad \longrightarrow \quad r = \frac{a}{\cos\propto}$$

Faisant cette substitution, en intégrant de $\alpha = 0$ à $\alpha = \pi/2$

$$E(M) = \int 2\frac{\lambda.\mathrm{dl}}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 r^2}} = 2\frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}}\int \frac{a}{\cos^2\propto}\frac{\cos^2\propto}{a^2}\cos\propto.d\alpha = 2\frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\propto.d\alpha$$

$$\rightarrow \quad E(M) = 2.\frac{\lambda}{4\pi\boldsymbol{\varepsilon_0 a}}.(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$$

D’où

$$\mathrm{E(M)} = \frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}\mathbf{a}}$$

Le champ électrique varie comme a^{-1} sous forme vectorielle

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{M}) = \frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}\mathbf{a}}.\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{a}}$$

Pour trouver le potentiel électrique on utilise la relation :

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{a}}, \text{ Ce qui nous donne } \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{da}} = -\boldsymbol{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\boldsymbol{\varepsilon_0}\mathbf{a}}$$

$$\rightarrow \quad V = \int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \mathrm{a}}\,da = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{da}{\mathrm{a}} \quad \rightarrow \boldsymbol{V} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\mathrm{a} + \mathrm{C^{te}}$$

$$\mathbf{V = 0 \quad pour\ a = 1} \ \rightarrow \ \mathrm{C^{te}} = 0$$

donc $\mathbf{V}(\mathbf{M}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{2\pi\varepsilon_0}}\mathbf{ln\,a}$