Chapitre II

Forces et Moment des forces

FORCES ET MOMENTS DE FORCES

I. Notions de “force”

I.1. Généralités

Une utilisation importante de l’algèbre vectorielle est l’application qu’on en fait à la composition des forces.

Intuitivement, la notion de force est liée physiologiquement à l’idée d’effort musculaire. Plus précisément, on peut introduire des forces mécaniques de manière statique ou dynamique. Si un corps au repos est mis en mouvement, la cause du mouvement sera une force (notion dynamique)

I.2. Domaine d’application et unités de forces

A) Point matériel et solide

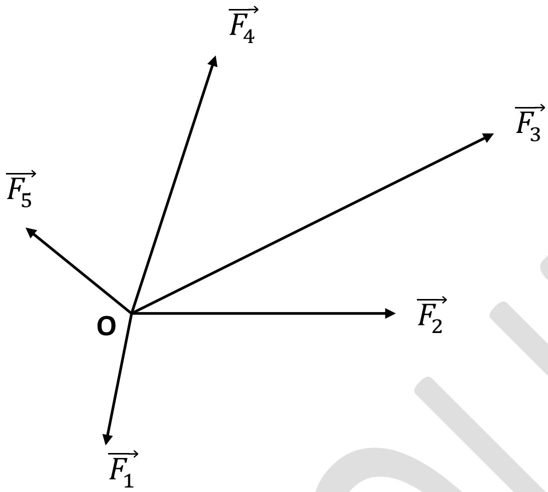
Un point est une “particule” de matière, sans dimension (ni volume, ni surface), mais de masse non nulle. Quant au solide, il s’agit d’un ensemble (fini ou non) de points matériels. Un corps sera dit “solide parfait”, s’il est indéformable, c’est-à-dire si la distance entre deux quelconques de ses points reste constamment inchangée.
Dans la suite du cours, nous considérerons tous les corps comme des corps solides parfaits.

B) Unités de forces

Dans le système international (SI), l’unité de force est le : newton [N]. La masse d’un corps peut être considérée, en première approximation, comme étant la quantité de matière qui le compose; l’unité de masse est le kilogramme [kg].
Définition : le newton [N] est la force qui communique à une masse de un kilogramme une accélération de 1 m/s^2.
Remarque importante : Il ne faut pas confondre la notion de “masse” avec celle de “poids”. En effet, la masse est l’ensemble des molécules qui composent un corps tandis que le poids est la force.

I.3 Composition de forces concourantes

Si les forces sont concourantes c'est à dire si elles sont toutes appliquées au même point, leur résultante $\vec{R}$ est une somme vectorielle.



Alors la résultante de plusieurs forces concourantes $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ ....= $\sum_i^n \vec{F_\iota}$.

Si les forces sont coplanaires, c'est à dire dans le même plan, exemple le plan XOY nous avons alors

$$\boxed{\vec{R} = R_x\vec{U}_x + R_y\vec{U}_y}$$

Où

$$R_x = \sum_i^n F_i\, x$$

$$R_y = \sum_i^n F_i\, y$$

La grandeur (module) de $\vec{R}$ est égale :

$$\vec{R} = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$$

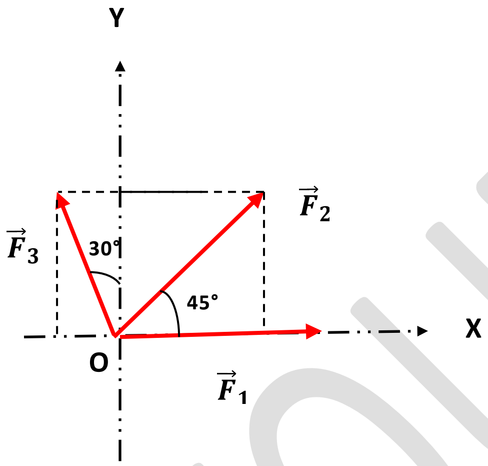
et sa direction est donnée par l'angle α tel que :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x}}$$

Exemple :

Trouver la résultante des forces suivantes F_1, F_2, F_3 agissant sur un corps au point O (voir figure). $F_1 = 1200N$, $F_2 = 900N$ et $F3 = 300N$

On fait la projection des forces sur les axes Ox et Oy.



$$\vec{R} = R_x\vec{U}_x + R_y\vec{U}_y$$

$$R_x = \sum_i^n F_i\, x = F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=1200 + F_2\cos45°-F_3\sin30° = 1200 +900\tfrac{\sqrt{2}}{2} -300\tfrac{1}{2}$$

$$R_x = 1200 +636,3-150 = 1686,3N$$

$$R_y = \sum_i^n F_i\, y = F_{1y}+F_{2y}+F_{3y} = 0 + F_2\sin45°+F_3\cos30° = 900\tfrac{\sqrt{2}}{2} + 300\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R_y = 636,3 + 259,8 = 896,1N$$

D'où

$$\vec{R} = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \vec{R} = \sqrt{1686,3^2 + 896,1^2} = 1909,60N$$

$$\boldsymbol{\vec{R} = 1909,60N}$$

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{896,1}{1636,3} = 0,54$$

$$\rightarrow \alpha = \text{arctang}(0.54) = 28,36°$$

$$\boldsymbol{\alpha = 28,36°}$$

2.1. Moments de forces

2.2.1. Introduction et définition

L'expérience quotidienne nous montre que la seule notion de force ne suffit pas : par exemple, pour soulever un poids au moyen d'un levier coudé ACB, on a tout intérêt à appliquer l'effort (force $\vec{F}$) le plus loin possible à l'extrémité B du levier, si on désire que le module de $\vec{F}$ soit le plus faible possible.

Ainsi donc, le "*bras de levier*" de $\vec{F}$) joue un rôle dans la composition des forces en présence.

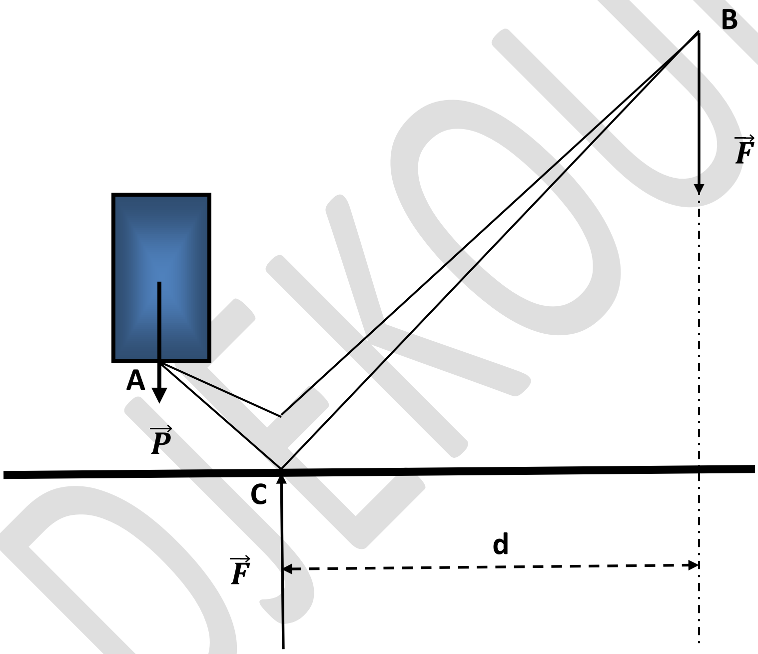


Figure 1. *- Notion de moment de force*

Notre expérience quotidienne nous indique que l'efficacité de la force $\vec{F}$ à produire une rotation croit avec la distance (appelée bras de levier **d**) entre la ligne d'action de $\vec{F}$et le point de rotation C.

Considérons une force agissant sur un corps solide C qui peut tourner autour d'un point O fixe (***fig.2)***. Si la force ne passe pas par O, elle aura pour effet de faire tourner le corps autour de O.

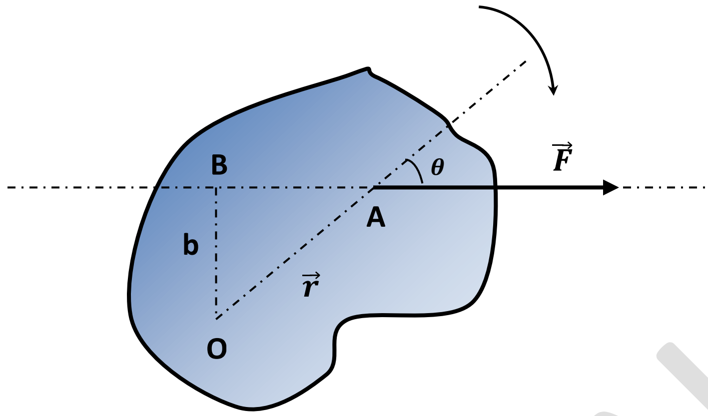


Figure. 2- *Moment de force*

OB = b (bras de levier)

A : le point d'application de la force $\vec{F}$

Alors, il est plus commode de définir dans ce cas une grandeur physique $\mathcal{M}$ qu'on appellera moment de la force $\vec{F}$ par l'expression :

Le module du moment de la force $|\vec{F}|$ = le module de la force $|\vec{F}|$ *x* ***le bras de levier b***

$$|M| = |\vec{F}|.\mathbf{b}$$

Moment = force x bras de levier

On exprime un moment dans le système international en Nm (newton mètre).

Notons :

- qu'on peut déplacer une force le long de sa ligne d'action sans changer son moment (la distance $\boldsymbol{b = OA.\sin\theta}$ reste la même); avec OA = r.

  alors, $\boldsymbol{b = r.\sin\theta}$
- que le mouvement de rotation sous l'action de $\vec{F}$ s'effectue autour d'un axe de rotation perpendiculaire au plan formé par la force $\vec{F}$ et le point O.

2.2.2. Moment d'une force par rapport à un point

A- ***Expression vectorielle***

De ce qui précède, on peut conclure que le moment peut être considéré comme une grandeur vectorielle (*fig. 3*) donnée par le produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

Où r est le vecteur position, par rapport au point O, du point où s'applique la force.

Le moment à la même direction que le pouce de la main droite.

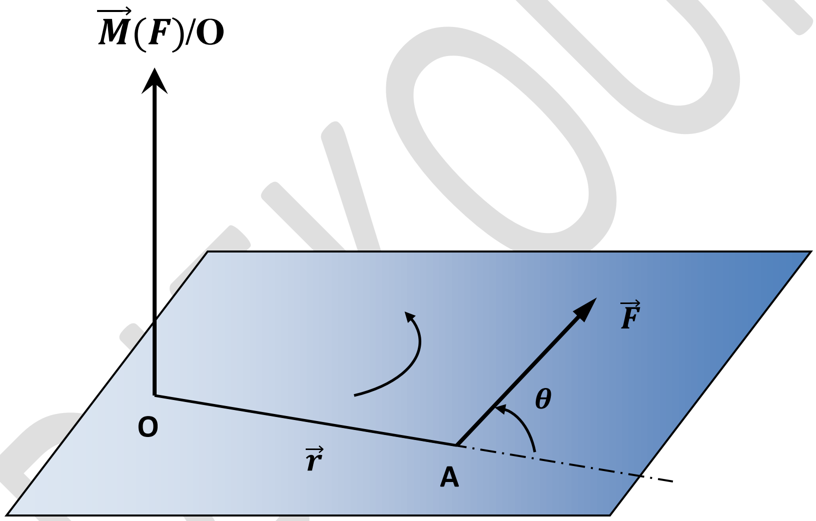


Figure .3. *- Moment de force par rapport à un point.*

Avec :

- le point par rapport auquel on cherche le moment;
- A, en fait, *un point quelconque* de la ligne d'action de la force.

$\vec{M}$ (F)/O est donc un vecteur :

- lié au point P;
- perpendiculaire au plan formé par $\vec{F}$ et OA;
- de module $|\vec{M}| = |\vec{r}|\ |\vec{F}| \sin\theta$

- Le moment d'une force est toujours défini *par rapport à un point donné*; si on change ce point de référence, en général le moment de la force change;
- $\vec{M}(F)/O = 0$ si O est sur la ligne d'action de $|\vec{F}|$ ou si $|\vec{F}| = 0.$

2.2.3. Moment de plusieurs forces concourantes

Considérons maintenant le cas de plusieurs forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4} \ldots\ldots\ldots \vec{F_n}$ agissant en un point A.

Le moment par rapport à O de chaque $\vec{F_i}$ est :

$$\boxed{\vec{M_i} = \vec{r} \wedge \vec{F_i}}$$

Remarquons que nous écrivons $\vec{r}$ et $\vec{r_i}$, car toutes les forces sont appliquées au même point A.Alors le moment de la résultante $\vec{R}$ est :

$$\boxed{\vec{M_i} = \vec{r} \wedge (\vec{F_i} + \vec{F_i} + \vec{F_i} + \vec{F_i} + \ldots\ldots\ldots)}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{r} \wedge \vec{F_1} + \vec{r} \wedge \vec{F_2} + \vec{r} \wedge \vec{F_3} + \ldots\ldots)}$$

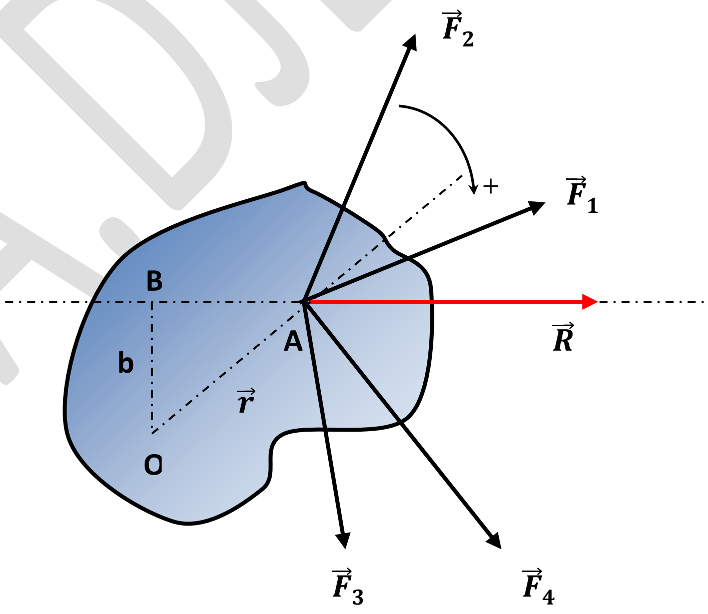


Figure .4. *- Moment de plusieurs forces concourantes par rapport à un point.*

Alors :

$$\boxed{\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3+\vec{M}_4+\vec{M}_5+\ \dots\dots\vec{M}_n=\sum_i^n \vec{M}_n}$$

Ceci s'énonce que le moment de la résultante c'est la somme vectorielle des moments des forces composantes si elles sont concourantes.

2.3. Composition de forces parallèles

2.3.1. Définition

Considérons un système de forces parallèles $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ ……… $\vec{F_n}$, supposant qu'elles agissent toutes suivant une direction perpendiculaire à l'axe des X en des points x_1, x_2, x_3, ………..x_n à partir de l'origine O (voir figure.5.) la grandeur de la résultante de ces forces est :

$$\boxed{\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4+\ \dots\dots\vec{F}_n=\sum_i^n \vec{F}_n}$$

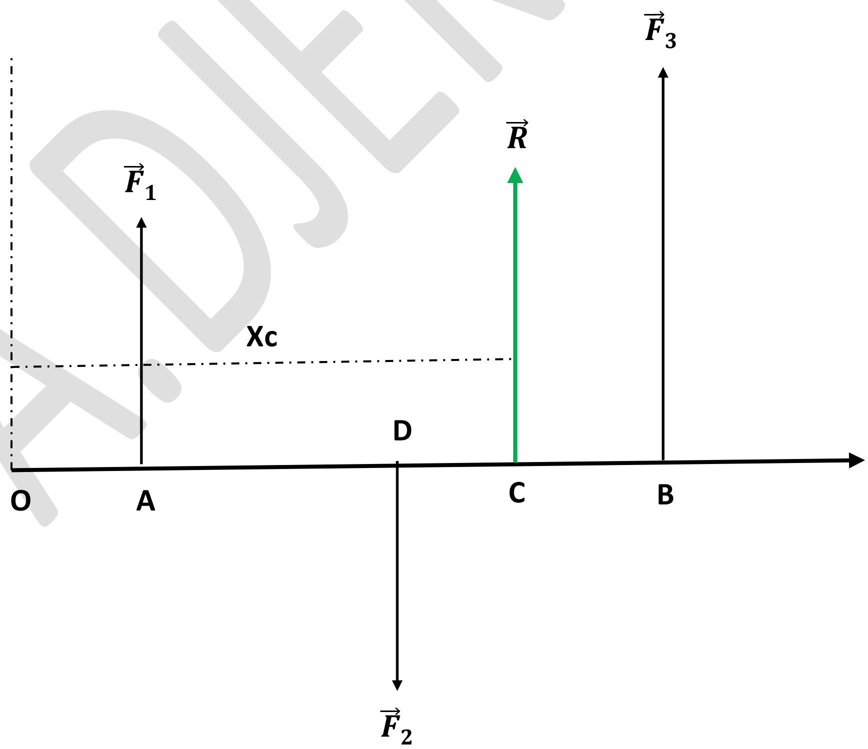


Figure 5. *- Forces parallèles*

La force résultante $\vec{R}$ doit être appliquée en un point C situé à la distance X_c de Ode telle sorte que :

$$\boxed{|\vec{\boldsymbol{M}}| = |\boldsymbol{X_c}| . |\vec{\boldsymbol{R}}|}$$

D'où

$$X_c = \frac{|M|}{|R|} = \frac{\sum X_i . F_i}{\sum F_i}$$

Dans le cas général, où les forces parallèles se trouvent dans l'espace à 3 dimensions, les coordonnées de C sont données par :

$$X_c = \frac{\sum X_i . F_i}{\sum F_i}$$

,

$$Y_c = \frac{\sum Y_i . F_i}{\sum F_i}$$

,

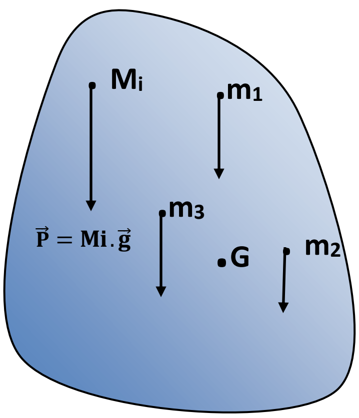
$$Z_c = \frac{\sum Z_i . F_i}{\sum F_i}$$

2.3.2. Centre de gravité :

Sur chaque particule soumise au champ de gravitation de la terre, s'exerce une force $\vec{P}$ qu'on appelle son poids.

Si **m** est la masse de la particule est **g** l'accélération de la pesanteur alors :

$\vec{P} = m . \vec{g}$



Et comme le corps solide est constitué d'un ensemble de particules et on peut considérer lespoids comme parallèles, alors le poids résultant est :

$$\vec{P}_T = \sum \mathrm{m_i} \, . \vec{\mathrm{g}}$$

La somme s'étendant à toutes les particules constituants le corps, et s'applique en un point donné par :

$$r_c = \frac{M}{R} = \frac{\sum r_i . m_i \, . g}{\sum m_i . g}$$

$$r_c = \frac{\sum r_i . m_i}{\sum m_i .}$$

Alors nous pouvons écrire les composantes de r_G du centre gravité **G :**

$$X_c = \frac{\sum X_i . m_i}{\sum m_i .}$$

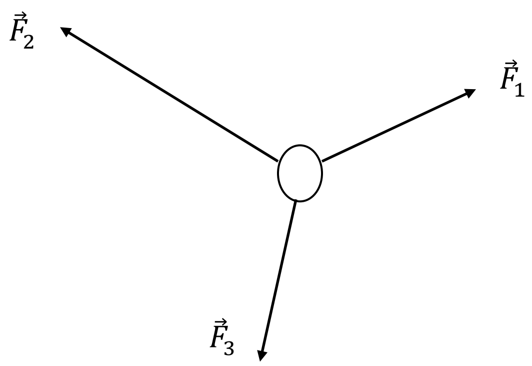
$$Y_c = \frac{\sum Y_i . m_i}{\sum m_i .}$$

$$Z_c = \frac{\sum Z_i . m_i}{\sum m_i .}$$

2.3.3. Equilibre d'une particule

Une particule est en équilibre si la somme de toutes les forces qui agissent sur elle est nulle, ou encore :

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{0}$$



Donc les projections de toutes les forces sur les axes ox, oy et oz sont nulles c'est à dire :

$$\sum \boldsymbol{F_{ix}} = \mathbf{0}$$

$$\sum \boldsymbol{F_{iy}} = \mathbf{0}$$

$$\sum \boldsymbol{F_{iz}} = \mathbf{0}$$

2.3.4. Equilibre d'un corps solide

Quand des forces agissent sur un corps solide, il est nécessaire d'envisager l'équilibre aussi bien en ce qui concerne la translation que la rotation : les deux conditions suivantes sont donc requises

I. La somme de toutes les forces doit être nulle (équilibre en translation).

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_i = \mathbf{0}$$

II. La somme de tous les moments pris par rapport à un point quelconque doit être nulle (équilibre en rotation)

$$\sum \vec{\boldsymbol{M}}_i = \mathbf{0}$$

Et si les forces appliquées sont toutes dans le même plan les conditions ci-dessus se réduisent aux trois équations suivantes :

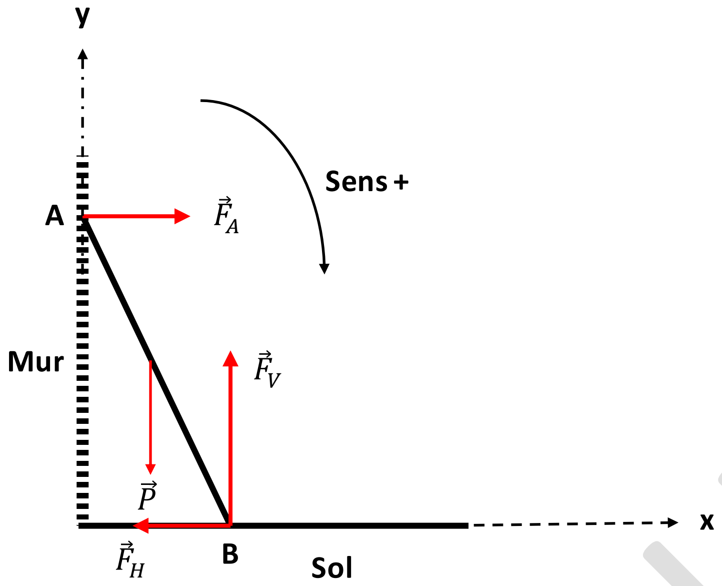
$$\sum \boldsymbol{F_{ix}} = \mathbf{0}, \qquad \sum \boldsymbol{F_{iy}} = \mathbf{0}, \qquad \sum \boldsymbol{F_{iz}} = \mathbf{0},$$

Exercice d'application :

Une échelle AB pesant 160N s'appuie sur un mur vertical, en faisant un angle de 60° avec le sol.

- Trouver les forces s'exerçant sur l'échelle en A et B. l'échelle est munie de roulettes de sorte que le frottement sur le mur vertical est négligeable.

Solution :



$\vec{F}_V$ Composante verticale de la force en B

$\vec{F}_H$ Composante horizontale de la force en B

I / Equilibre en translation

Somme des forces appliquées est nulle

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Projection des forces sur les axes Ox et Oy

$$\sum F_{ix} = 0$$

Suivant Ox

$-F_H + F_A = 0 \quad \rightarrow \quad F_A = F_H$

Suivant Oy

$-P + F_V = 0 \quad \rightarrow \quad F_V = P = 160N$

II/ Equilibre en rotation

Somme des moments par rapport à B est nulle

$$\sum \vec{M}_i = 0$$

$$\boxed{\vec{M} / B = \vec{F}_A \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{P} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{F}_H \wedge \overrightarrow{BB} + \vec{F}_V \wedge \overrightarrow{BB} = 0}$$