

Chapitre 1

Corps des nombres réels

1.1 Introduction - Sous ensembles remarquables de $\mathbb{R}$

Les nombres apparaissent très tôt dans l'histoire de l'humanité. Il s'agissait de compter avec des cailloux afin d'évaluer des quantités entières. Ces entiers naturels permettaient de résoudre des équations de type : $x + 1 = 3$ par exemple. Cet ensemble sera par la suite noté $\mathbb{N}$ en 1888 par Richard Dedekind, on notera ainsi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Il s'avéra très vite que les entiers ne pouvaient pas résoudre certaines équations comme : $x + 3 = 2$. Il fallut alors introduire un ensemble plus grand que l'on appellera entiers relatifs et on note ainsi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

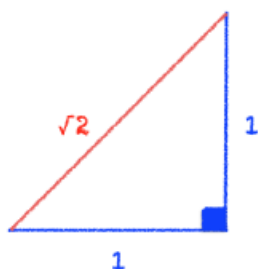
Il fallut ensuite résoudre des équations de type : $x \times 3 = 5$. On ne pouvait pas trouver toutes les solutions dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et un autre ensemble fut alors introduit : l'ensemble des rationnels noté $\mathbb{Q}$ par Giuseppe Peano en 1895 et on notera ainsi $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Il ne faut cependant pas confondre avec les nombres décimaux $D = \left\{ a = \frac{\alpha}{10^p}, p \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$.

Les nombres décimaux ont un nombre fini de chiffres après la virgule par exemple

$1.2 = 12 \cdot 10^{-1} = \frac{12}{10}$. Tandis qu'un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ peut s'écrire en plus de sa forme fractionnaire comme un développement décimal limité de la forme $\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ou illimité périodique, par exemple $r_1 = \frac{3}{5} = 0.6$ (développement décimal limité) et

$r_2 = \frac{1}{3} = 0.\underline{3}33\dots$ (développement illimité périodique).



Vint enfin une équation à résoudre : $x^2 = 2$, cette équation provenant d'un problème géométrique assez simple (Le théorème de Pythagore).

Cette équation a permis d'introduire l'ensemble des irrationnels : Un nombre est dit irrationnel s'il n'est pas rationnel : tout développement décimal illimité non périodique comme $\sqrt{2} = 1.4142\dots$, $\pi = 3.14159\dots$, $e = 2.718\dots$

Il fallut donner un nom à l'ensemble de ces nombres qui contenait tous les précédents, René Descartes les appela nombres réels en 1637 et c'est Georg Cantor qui désigna l'ensemble des réels par $\mathbb{R}$

Remarque1. Un nombre décimal est un cas particulier de nombre rationnel.

Pour montrer qu'un nombre α est irrationnel, raisonner par l'absurde : supposer que α est rationnel et déduire une contradiction.

Remarque2. On a: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

1.2.1 Addition et Multiplication

Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$ (L'addition est commutative).
- 2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$ (L'addition est associative)
- 3) $\forall a \in \mathbb{R} : 0 + a = a + 0 = a$. (0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$)
- 4) $\forall a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ ($-a$ est l'élément symétrique de a dans $\mathbb{R}$)
- 5) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \times b = b \times a$ (La multiplication est commutative)

- 6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (La multiplication est associative)
- 7) $\forall a \in \mathbb{R} : 1 \times a = a \times 1 = a$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$)
- 8) $\forall a \in \mathbb{R} : a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ (a^{-1} est l'inverse de a dans $\mathbb{R}$)
- 9) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (Distributivité de la multiplication sur l'addition)
- 10) $a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Propriété 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

1.2.2 Ordre sur $\mathbb{R}$

Nous allons voir que les réels sont ordonnés. La notion d'ordre est générale et nous allons définir cette notion sur un ensemble quelconque. Cependant, gardez à l'esprit que pour nous $E = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{R} = "$ $\leq$ $"$

Définition 1. Soit E un ensemble. Une relation $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre si :

- $\mathfrak{R}$ est réflexive : pour tout $x \in E$, $x \mathfrak{R} x$.
- $\mathfrak{R}$ est anti-symétrique : pour tout $x, y \in E$: $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} x \Rightarrow x = y$
- $\mathfrak{R}$ est transitive : pour tout $x, y, z \in E$: $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z$.

Définition 2. Soit E un ensemble. Une relation d'ordre $\mathfrak{R}$ est totale si :

pour tout $x, y \in E$ on a: $x \mathfrak{R} y$ ou $y \mathfrak{R} x$.

On dit aussi que $(E, \mathfrak{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Exemple 1. $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

En effet, on a :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ si : $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$: si $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a: $x \leq y$ ou $y \leq x$.

1.3 Propriété d'Archimède et Partie entière

Propriété2. $\mathbb{R}$ est archimédien.

C'est à dire qu'il satisfait à l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Etant donnés deux réels y et x , $x > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y \leq nx$ (En faisant assez de pas de longueur x , on dépasse y)
2. Etant donné un réel y , il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $y < n$.

Définition3.(Partie entière)

Pour tout réel x il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha \leq x < \alpha + 1$. l'entier α s'appelle partie entière de x et on note $E(x)$ ou $[x]$ ainsi on a :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

ou encore

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

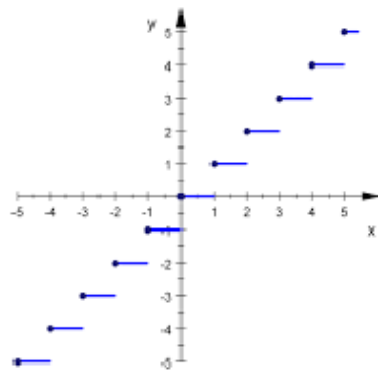
Remarque3. La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Exemple2. $E(2.852) = 2$ car $2 \leq 2.852 < 3$

$$E(-3.5) = -4 \text{ car } -4 \leq -3.5 < -3$$

Voici le graphe de la fonction partie entière

entire



2.png

1.4 Valeur absolue et distance

On définit la valeur absolue d'un réel x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

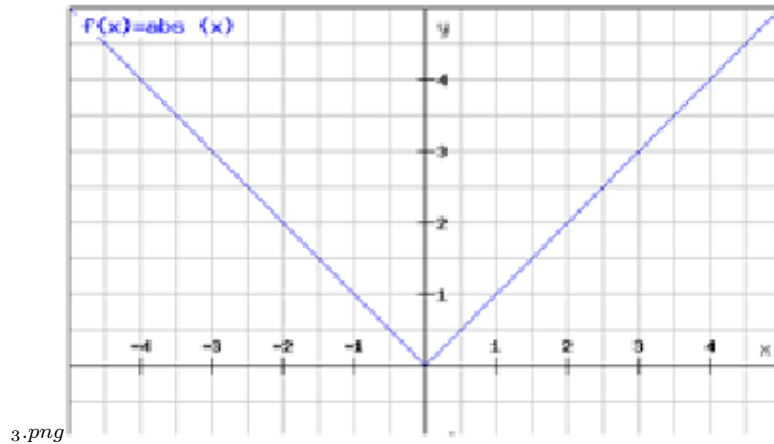
Proposition 1.

Soient x et y deux réels et δ un réel strictement positif, on a :

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\sqrt[2]{x^2} = |x|$.
4. $|y - x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq y - x \leq \delta \Leftrightarrow x - \delta \leq y \leq x + \delta$.
5. $|x| \geq \delta \Leftrightarrow x \leq -\delta \text{ ou } x \geq \delta$.
6. $|xy| = |x| |y|$.
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).
8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (Inégalité triangulaire inversée).

Voici le graphe de la fonction valeur absolue

1. *valeurabsolue*



Définition4.(Distance) L'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $d(x, y) = |x - y|$ est appelée distance sur $\mathbb{R}$, elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.

1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définitions5.

1. On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie I vérifiant : pour tout x et y dans I et tout $z \in \mathbb{R} : \text{si } x \leq z \leq y \text{ alors } z \text{ appartient à } I$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2 : x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

2. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé et borné (**Segment**) de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

4. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle semi-ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

et aussi

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

1.6 Voisinage d'un point

La notion de voisinage servira pour les chapitres suivants quand on abordera les notions de limites.

Définition6. Soit a un nombre réel. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset V$ (Ce qu'il y a autour de a tout en étant très proche de a)

1.7 Borne supérieure-Borne inférieure

Définition7.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Un réel a est **un plus grand élément** de A si $\underline{a \in A}$ et $\forall x \in A : x \leq a$. S'il existe, le plus grand élément de A est unique et on le note alors $\max A$.
- **Le plus petit élément** de A noté $\min A$ s'il existe est le réel b tel que $\underline{b \in A}$ et $\forall x \in A : x \geq b$.

Remarque4. Le plus grand élément s'appelle aussi le maximum et le plus petit élément le minimum, et il faut garder à l'esprit que le max et le min n'existent pas toujours.

- Un réel M est **un majorant** de A si $\forall x \in A : x \leq M$.
- Un réel m est un **minorant** de A si $\forall x \in A : x \geq m$.

Remarque5. Si A admet un majorant, on dit qu'elle est majorée. Si A admet un minorant, on dit qu'elle est minorée, et si elle admet un majorant et un minorant on dit qu'elle est bornée.

- Si A est majorée et si l'ensemble de ces majorants a un plus petit élément α , alors α est appelé la **borne supérieure** de A , et on note $\alpha = \sup A$.
- Si A est minorée et si l'ensemble de ces minorants a un plus grand élément β , alors β est appelé la **borne inférieure** de A , et on note $\beta = \inf A$.

Exemple3.

1. $A_1 =]0, 1]$, on a : $\forall x \in A_1, x \leq 1$ et $1 \in A_1$, ainsi $\max A_1 = 1$

$\forall x \in A_1, x > 0$ **mais** $0 \notin A_1$, ainsi $\min A_1 \nexists$

→ L'ensemble des majorants de A_1 est l'intervalle $[1, +\infty[$.

→ L'ensemble de minorants de A_1 est l'intervalle $] -\infty, 0]$

→Le plus petit élément des majorants de A_1 est 1, ainsi $\sup A_1 = 1$

→Le plus grand élément des minorants de A_1 est 0, ainsi $\inf A_1 = 0$

2. $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : 5 \leq n^2 \leq 25\}$. On doit tout d'abord déterminer les éléments de A_2 .

On a $A_2 = \{3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}$, et par conséquent, on a $\max A_2 = 5$, $\min A_2 = 3$, l'ensemble des majorants de A_2 est l'ensemble $\{5, 6, 7, \dots\}$, l'ensemble des minorants de A_2 est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, $\sup A_2 = 5$ et $\inf A_2 = 3$.

3. $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} : a^2 \geq 36\}$ on peut écrire que $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} : a \geq 6\} \cup \{a \in \mathbb{Z} : a \leq -6\}$

A_3 n'a ni un plus grand élément, ni un plus petit élément. Cet ensemble n'est ni majoré ni minoré.

Théorème1.

1. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup.
2. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inf.
3. Les bornes sup et inf d'une partie de $\mathbb{R}$ si elles existent, sont uniques.

Théorème2.(Caractérisation de la borne sup et la borne inf)

1. Si A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ alors

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} i) M \text{ est un majorant de } A \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon \end{cases}$$

2. Si A une partie minorée de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$ alors

$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i) m \text{ est un minorant de } A \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Exemple4. Soit l'ensemble $A = \{u_n = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer si elles existent les bornes sup et inf de A .

Commençons par avoir une idée sur les éléments de A , à chaque fois qu'on donne une valeur à n , on détermine un élément de A .

Pour la première valeur de $n = 1$ on a $u_1 = 3 \in A$, et donc $A \neq \emptyset$.

et on a $\forall n : 3 \leq u_n < 2$ ce qui montre que A est borné et par conséquent $\exists \sup A$ et $\exists \inf A$.

On a $\max A = \sup A = 3 \in A$ et $\inf A = 2 \notin A$, ainsi, $\nexists \min A$.

Montrons alors que $\inf A = 2$. D'après la caractérisation de la borne inf on sait que

$$\inf A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} i) 2 \text{ est un minorant de } A \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists u_{n0} \in A : u_{n0} < 2 + \varepsilon \end{cases}$$

i) il est clair que 2 est un minorant de A car $\forall u_n \in A : u_n < 2$

ii) Question : est ce qu'il existe un élément de A qu'on note u_{n0} tel que $u_{n0} < 2 + \varepsilon$, autrement

dit : est ce qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n0} = \frac{2n_0+1}{n_0} < 2 + \varepsilon$

On a :

$u_{n0} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{n_0} < 2 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et ce n_0 existe effectivement d'après la propriété d'Archimède.

1.8 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 8. (Densité)

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow \exists r \in A : x < r < y$$

Théorème 3.

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: Tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: Tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.

1.9 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts et qui n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$, notés $-\infty$ et $+\infty$ et on prolonge à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ les lois internes $+$, $\times$ et la relation d'ordre $\leq$ par :

- 1. $\forall x \in \mathbb{R} : x + (+\infty) = (+\infty) + x = (+\infty)$ et $x + (-\infty) = (-\infty) + x = (-\infty)$

2. $.(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$ et $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : x.(+\infty) = (+\infty).x = (+\infty)$ et $x.(-\infty) = (-\infty).x = (-\infty)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}_-^* : x.(+\infty) = (+\infty).x = (-\infty)$ et $x.(-\infty) = (-\infty).x = (+\infty)$.
5. $(+\infty).(+\infty) = (+\infty)$, $(-\infty).(-\infty) = (+\infty)$ et $(+\infty).(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = (-\infty)$
6. $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$, $-\infty \leq -\infty$, $+\infty \leq +\infty$.

$\overline{\mathbb{R}}$ s'appelle la droite numérique achevée. On remarque que les lois $+$ et $\times$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ne sont pas partout définies, $(-\infty) + (+\infty)$, $(-\infty).0$, $0.(-\infty)$, $(+\infty).0$, $0.(+\infty)$ ne sont pas définies, ils correspondent à des formes indéterminées. Il y a dans $\overline{\mathbb{R}}$ exactement quatre types d'intervalles : $[\bar{a}, \bar{b}]$, $[\bar{a}, \bar{b}[$, $] \bar{a}, \bar{b}]$, $] \bar{a}, \bar{b}[$ pour $(\bar{a}, \bar{b}) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Proposition 2. Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 5.

$$\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathbb{R}}) = +\infty, \sup_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}) = +\infty, \sup_{\overline{\mathbb{R}}}([-\infty, 0[) = 0 = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} (]-\infty, 0]) .$$