

Examen

Durée = 1 heure

Exercice 1. (10 points)

Soit $I =]a, b[$. Soit c une fonction positive, définie et continue sur $\bar{I} = [a, b]$ et $f \in L^2(I)$. On se donne également un nombre réel $\alpha \geq 0$. On se propose d'étudier le problème variationnel (P_V) suivant : trouver $u \in V = \{v \in H^1(I), v(a) = 0\}$ tel que $\forall v \in V$ on a

$$\int_a^b [u'v' + c(x)uv]dx + \alpha u(b)v(b) = \int_a^b f v dx.$$

- 1) Montrer que le problème variationnel ainsi défini admet une solution et une seule dans V .
- 2) Montrer que la solution du problème variationnel appartient à $H^2(I)$. Quel problème aux limites (P) a-t-on résolu ?

Exercice 2. (10 points)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ régulière. On se donne deux fonctions $p \in C(\bar{\Omega})$, $f \in L^2(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On considère le problème aux limites elliptiques suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta u + p(x)u + \lambda u = f \text{ dans } \Omega, \\ \gamma_0(u) = 0. \end{cases}$$

- 1) Ecrire la formulation variationnelle de P .
(P_V) Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u, v) = L(v)$
 V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.
- 2) Montrer qu'il existe λ_0 tel que si $\lambda \geq \lambda_0$ alors le problème (P_V) admet une et une seule solution, de plus il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)})$$

- 3) Montrer que la solution de (P_V) appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie (P) .