Série 4

Exercice 1 Soients H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Montrer que $\forall x, y \in H$, on a
$$(Tx, y) = \frac{1}{4}[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) + i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy)]$$
2. En déduire que si $\forall x \in H$, $(Tx, x) = 0$, alors $T = 0$.
3. Montrer que $(Tx, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$ si et seulement si T est auto-adjoint.
4. On suppose que $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, montrer que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient $H = \ell^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et $T : H \to H$ l'opérateur défini par $T(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...)$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$ et calculer sa norme.
2. Déterminer l'adjoint de T.
3. Montrer que si $\mid \lambda \mid < 1$ alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.
4. En déduire le spectre de T.

Exercice 3 $T : E \to E$ l'opérateur défini
$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt,$$
où $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ est une fonction continue.

1. Déterminer l'adjoint de T.
2. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors T est auto-adjoint.
3. Soit E muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que T est compact. En déduire que le spectre de T n'est pas vide.

Exercice 4

1. Soit $H = L^2([-1,1])$. Pour $r \in \mathbb{R}$ fixé, on note
$$T_r : H \to H, f \mapsto g,\ g(x) = \int_{-1}^1 (x^2 + \frac{3}{2}xt + rt^2) f(t) dt$$
   (a) Montrer que T_r est continu de rang fini.
   (b) Expliciter l'adjoint de T_r. Pour quelles valeurs r a-t-on T_r auto-adjoint ?

Exercice 5 Soient H_1 un espace de Banach et H_2 un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$. Montrer que T est compact si et seulement s' il est limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis.

Exercice 6 Soient $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $T : H \to H$ une application linéaire définie pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in H$ par $Tx = y$, où $y = (\frac{x_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que $T \in \mathscr{L}(H)$.
2. On définit $T_n : H \to H$ par
$$T_n x = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_n}{n}, 0, 0, ...)$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de rang fini.
   (b) Estimer $\lim_{n \to +\infty} \parallel T - T_n \parallel$, puis en déduire que T est compact.

1. F. Zouyed, email :fzouyed@gmail.com, Laboratoire des Mathématiques appliquées $\mathcal{LMA}$